国外电子与通信教材系列

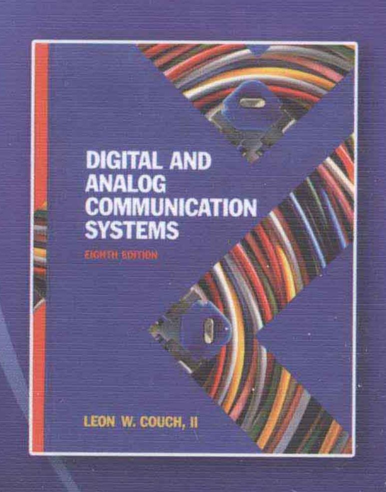
PEARSON

数字与模拟通信系统

（第八版）

Digital and Analog Communication Systems

Eighth Edition



［美］ Leon W. Couch，II 著

罗新民 任品毅 译

電子工業出版社
PHEI
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

数字与模拟通信系统（第八版）

Digital and Analog Communication Systems

Eighth Edition

本书在前七版的基础上进行了修订与更新，系统介绍了现代通信系统的基本理论和最新技术发展。全书共分8章，内容包括：绪论；信号与频谱；基带脉冲与数字信号；带通信号传输原理及电路；调幅、调频及数字调制系统；随机过程和频谱分析；噪声背景下通信系统的性能；有线及无线通信系统。每章都有一定的助学例题及大量的习题，部分例题及习题另配有MATLAB文件。本书还包含3个附录：数学技巧、恒等式和表；概率和随机变量；MATLAB的使用。此次新版中更新了所有MATLAB文件，新增了100多道例题并给出了更多的习题答案。此外，本书还给出了数字电视（DTV）技术、长期演进（LTE）系统、WiMAX 4G蜂窝系统、个人通信系统及其应用等内容的介绍。

本书新版的改进之处：

- 列出了最新的专业术语及标准。
- 给出了通过设置合适的关键词，利用Google等因特网搜索引擎获取最新标准及其应用信息的建议。
- 继续强调利用MATLAB编程的方法来解决问题，这种利用计算机编程解决问题的方法，对于训练刚进入通信行业中的工程师非常重要。
- 更新了所有MATLAB文件，以便在Version R2010b版本中运行。

相关的MATLAB文件及其他资源，可登录华信教育资源网(www.hxedu.com.cn)注册下载。

本书配有丰富的教辅资源（习题解答、PPT等），申请方式请参见书末的“教学支持说明”。





PEARSON
www.pearson.com





策划编辑：冯小贝
责任编辑：周宏敏
责任美编：孙焱津



国外电子与通信教材系列

数字与模拟通信系统

（第八版）

Digital and Analog Communication Systems

Eighth Edition

[美] Leon W. Couch, II 著

罗新民 任品毅 译

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 · BEIJING

内 容 简 介

本书在前七版的基础上改编而成，书中系统地介绍了现代通信系统的基本理论和最新发展技术。全书共分8章，内容包括：绪论；信号与频谱；基带脉冲与数字信号；带通信号传输原理及电路；调幅、调频及数字调制系统；随机过程和频谱分析；噪声背景下通信系统的性能；有线及无线通信系统。每章都有一定的助学例题及大量的习题，部分例题及习题另配有 MATLAB 文件。此外，本书还包含3个附录：数学技巧、恒等式和表；概率和随机变量；MATLAB 的使用。新版中更新了所有 MATLAB 文件，新增了100多道例题并给出了更多的习题答案。本书还给出了数字电视（DTV）技术、长期演进（LTE）系统、WiMAX 4G 蜂窝系统、个人通信系统及其应用等内容的介绍。

本书适合作为无线电技术、通信与信息系统等专业的高年级本科生或研究生的教材，也可作为通信工程领域技术人员和科研人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

数字与模拟通信系统：第8版/（美）库奇（Couch, II L. W.）著；罗新民，任品毅译.
北京：电子工业出版社，2013.11
（国外电子与通信教材系列）
书名原文：Digital and Analog Communication Systems, Eighth Edition
ISBN 978-7-121-21738-8

Ⅰ.①数… Ⅱ.①库… ②罗… ③任… Ⅲ.①数字通信系统-高等学校-教材-英文 ②模拟通信-通信系统-高等学校-教材-英文 Ⅳ.①TN914

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第253006号

策划编辑：冯小贝
责任编辑：周宏敏
印　　刷：三河市鑫金马印装有限公司
装　　订：三河市鑫金马印装有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路173信箱　邮编　100036
开　　本：787×1092　1/16　印张：36.75　字数：1060千字
印　　次：2013年11月第1次印刷
定　　价：89.00元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

译 者 序

本书译自美国佛罗里达大学 Leon W. Couch, II 教授所著的 *Digital and Analog Communication Systems*, *Eighth Edition* 一书。该书作为通信工程专业高年级本科生或研究生通信原理课程的教材，被国外大学普遍采用，影响广泛，因而具有较高的知名度。第八版在第七版的基础上，更新了所有 MATLAB 文件，并新增了 100 多道例题及书后部分习题答案。除此以外，还增加了数字电视(DTV)技术、长期演进(LTE)系统、WiMax 4G 蜂窝系统、个人通信系统及其应用等反映通信系统最新发展技术方面的介绍。

本书全面系统地论述了现代通信系统的基本理论，内容完整，可读性强。全书共分 8 章及 3 个附录，内容上注重理论和实际应用的结合。每章中既有帮助读者理解所学知识的例题及助学例题，又有帮助读者巩固所学内容的大量课外习题。对书中的每道例题、部分助学例题及习题附有 MATLAB 仿真软件，部分课外习题附有答案。附录中的内容包括：数学基本公式及图表，概率论及随机变量的简易教程，MATLAB 入门等。这些内容既是正文的补充，又是独立的章节，可供没有这方面基础的读者阅读参考。

本书适合作为无线电技术、通信与信息系统及相关专业的高年级本科生或研究生教材，也可作为通信工程技术人员和科研人员的参考书。

本书由罗新民翻译第 1 ~4 章及前言，任品毅翻译第 5 ~8 章及附录，最后由罗新民统稿和审校。限于时间和水平有限，错误和不妥之处在所难免，敬请读者批评指正。

译者

2013 年 11 月于西安交通大学

前　　言

本书继承了第一至七版的风格，第八版中介绍了数字通信系统的最新技术发展成果。本书不仅适合工科二、三年级的本科生使用，也适合作为研究生的入门课程教材，或作为电气工程师的最新技术参考书。与本书配套的还有包含100多道精选的课外习题详细解题过程的学生题解手册，以及需借助计算机求解的课外习题的MATLAB文件，都可在www.pearson-highered.com/couch下载得到。①

第八版中的一个最大变化是全书新增加了100多道例题。学生们总是希望书中能有更多的例题。大部分新增加的例题都包含几行文字的问题描述，MATLAB文件(可从以上网址下载得到)中包含新增加的例题的解题过程、计算步骤及绘图结果。这样做有以下好处：首先，对每道例题的问题描述只用了几行文字，因此全书不会增加太多的篇幅；其次，使学生学习到用MATLAB编程解题的方法；还有就是得到了比用手工计算方法更清晰的绘图结果，同时还能发现MATLAB程序中的参数变化是如何影响计算结果的。作者相信这种解题方法是一种教学手段上的创新。

要学习通信系统，首先必须搞清楚通信系统是如何工作的。读者在掌握本书前五章介绍的通信系统基本知识(信号功率、频谱及信号的傅里叶分析等)的基础上，再通过对书中大量的助学例题和课外习题的练习，以及对采用的通信标准的应用，能够更好地理解通信系统的工作原理。特别值得关注的是有线及无线通信系统。另外，噪声对通信系统的影响也是很重要的。如果通信系统中没有噪声(噪声由概率论及随机过程来描述)，那么用极小的发射功率就可以把信号传至无穷远。总之，本书包括了学习有线及无线通信系统所需的基本内容和通信系统中采用的技术标准，具体内容有：

- 通信系统的工作原理：第1~5章；
- 噪声对通信系统的影响：第6章及第7章；
- 有线和无线通信系统：第8章。

本书既可作为一学期课程的教材使用，也可作为两学期课程的教材使用。本书着重阐述了能在一学期课程内讲述的通信系统理论和应用的基本内容，也介绍了可在两学期课程内深入讨论的必要内容。这里“着重”的意思是说全书的篇幅必须限制在750页左右。② 其实更大的篇幅也不能完全包括新增加的内容，即便是用于两学期课程。(目前许多学校都倾向于开设阐述基本通信理论的一学期课程。)本书介绍了编码、无线信号传播、WiMAX及蜂窝系统的长期演进(LTE)等概念。这些概念的详细内容将在专门的教材中讨论。

如果作为一学期课程的教材来使用，建议将本书中的前五章作为讲授内容，介绍通信系统的基本工作原理(适当选择第8章的内容作为补充)；倘若作为两学期课程的教材来使用，则将全书作为讲授内容。

本书涉及了通信系统中的一些实际应用问题，这些实际应用建立在通信系统坚实的理论基础之上。

---

① 相关资源也可登录华信教育资源网(www.hxedu.com.cn)注册下载。

② 指英文原版书的篇幅。——编者注

通信系统的理论基础

- 数字信号与模拟信号
- 幅频特性和相频特性
- 傅里叶分析
- 正交函数理论
- 功率谱密度
- 线性系统
- 非线性系统
- 码间串扰
- 复包络
- 调制理论
- 概率论与随机过程
- 匹配滤波器
- SNR(信噪比)的计算
- BER(误比特率)的计算
- 最佳系统
- 分组码与卷积码

实际的应用

- PAM、PCM、DPCM、DM、PWM 及 PPM 等基带信号
- 数字通信系统的误比特率
- 光纤系统
- OOK、BPSK、QPSK、MPSK、MSK、OFDM 及 QAM 等带通数字信号
- 扩频系统
- AMPS、GSM、iDEN、TDMA、WiMAX 及 CDMA 蜂窝电话系统与 PCS 系统
- AM、DSB-SC、SSB、VSB、PM 及 FM 等带通模拟信号
- 数字与模拟电视系统
- 时分复用及其体系标准
- AM、FM、TV、DTV 及 CATV 系统的技术标准
- 数字线路传输码及其频谱
- 通信系统中所用的电路
- 有线数据调制解调器
- 比特同步、帧同步及载波同步电路
- Wi-Fi 及 WiMAX 无线数据网络
- 软件无线电
- Web 页面中的 MATLAB M 文件
- 频分复用及其体系标准
- 电信系统
- 数学图表
- 电话系统
- 助学例题
- 数字用户环线调制解调器
- 超过 100 道带有求解过程的例题,其中大约 80 道例题带有 MATLAB M 文件
- 数字用户环线
- 卫星通信系统
- 超过 550 道的课外习题和部分答案
- 卫星无线广播系统
- 超过 60 道需借助计算机求解的课外习题
- 有效输入噪声温度与噪声系数
- 大量的参考文献
- 线路预算分析
- 重视通信系统的设计
- 模拟通信系统输出端的信噪比
- 学生题解手册

新版书中的改进之处

- 增加了 100 多道带有解题过程的例题。大部分增加的例题有 MATLAB 解题程序文件，这些文件可以从作者的网址中下载。
- 增加了最新的无线通信系统、LTE 系统、WiMAX 4G 蜂窝系统、个人通信系统及其应用等内容的介绍。
- 增加了数字电视(DTV)最新发展技术的介绍。
- 列出了最新的专业术语及标准。
- 更新了参考文献。

- 更新了所有章节内容。
- 增加并修订了课外习题。
- 给出了通过设置合适的关键词，利用 Google 等因特网搜索引擎获取最新标准及其应用信息的建议。
- 继续强调了利用 MATLAB 编程的方法来解决问题，这种利用计算机编程解决问题的方法对训练刚进入通信行业中的工程师们非常重要。本书是为数不多的几本提供了 MATLAB 文件(可以从网上下载)的教材之一。这样做省去了读者自己输入教材中列出的程序的时间。
- 更新了所有的 MATLAB 文件，以便在 Version R2010b 版本中运行。
- 增加了书后部分习题答案的数量，并在适当的地方给出了习题的 MATLAB 解题文件。

本书在许多课外习题旁标有计算机的符号，表示这些课外习题有用 MATLAB 编写的仿真软件及答案。

书中每章的后面都有课外习题。大约有 1/3 的课外习题标有★，这些习题的完整解题过程可在学生题解手册中找到。学生题解手册可以通过以下网址下载：www. pearsonhighered. com/couch，供学生使用的 M 文件也可在此下载。[①] 教师题解手册中给出了包括计算机求解过程在内的全部课外习题答案(教师题解手册只提供给选用本书的教师使用)。题解手册为 PDF 文件，对需借助计算机求解的课外习题，也给出了相应的 MATLAB M 文件。[②]

本书是我在佛罗里达大学多年从事教学工作积累的成果，后又以我作为业余无线电接线员(编号为 K4GWQ)的经历对该书进行了补充和完善。我认为读者只有对书中课外习题进行一定的练习后，才能理解书中的技术内容。因此，本书为读者设计了 550 多道习题。有些习题比较容易，这样可以使得那些刚开始学习的同学不感到吃力。对那些学习程度更深的同学也有足够难的习题让他们去练习。所有的习题都能激励学生去思考，从而加深对通信系统的理解。

感谢在本书的编写过程中帮助过我的许多人及多年来对本书的编写工作提出过建设性意见的人们。特别要感谢德克萨斯大学的 K. R. Rao；奥本大学的 Jitendra J. Tugnait；伦斯勒理工学院的 John F. McDonald；罗斯-霍曼理工学院的 Bruce A. Ferguson ；哈特福特大学的 Ladimer S. Nagurney；波士顿大学的 Jeffrey Carruthers；加州州立大学长滩分校的 Hen-Geul Yeh。还要感谢我在佛罗里达大学的同事们的帮助。最后要感谢我的妻子——Margaret Couch 博士，是她帮助我打印并校对了该书的原稿和修订稿。

Leon W. Couch, II
于佛罗里达州，冈斯韦尔
couch@ufl. edu

① 相关资源也可登录华信教育资源网(www.hxedu.com.cn)注册下载。
② 相关教辅资源的申请方式请参见本书末的“教学支持说明”。

符 号 表

由于在英语和希腊语字母表中，没有足够多的符号让我们能够不重复地使用它们，因此有些符号可能在不同的地方用来表示不同的量，这些用法已在上下文中交代清楚。此外，书中所用的符号通常与相关的数学学科中所用的符号相同。例如，在讲述复变量时，x 表示复数的实部（即 $c = x + jy$），而在讲述统计学时，x 表示的可能是随机变量。

符号

a_n	常数
a_n	正交形式傅里叶级数的系数
A_c	载波频率为 f_c 的已调信号电平
A_e	天线的有效面积
b_n	正交形式傅里叶级数的系数
B	基带信号带宽
B_p	带通滤波器带宽
B_T	发射信号（带通型）带宽
c	复数（$c = x + jy$）
c	常数
c_n	复数形式傅里叶级数的系数
C	信道容量
C	电容量
℃	摄氏温度
dB	分贝
D	每秒维数、每秒符号数（$D = N/T_0$）或波特率
D_f	调频增益因子
D_n	极坐标形式傅里叶级数的系数
D_p	调相增益因子
e	误差
e	自然数 2.7183
E	调制效率
E	能量
$\mathscr{E}(f)$	能量谱密度（ESD）
E_b/N_0	单位比特能量与噪声功率谱密度之比
f	频率（赫兹）
$f(x)$	概率密度函数（PDF）
f_c	载波频率
f_i	瞬时频率
f_0	（频率）常数；周期波形的基波频率
f_s	抽样频率
F	噪声系数

$F(a)$ 累积分布函数(CDF)
$g(t)$ 复包络
$\tilde{g}(t)$ 受噪声影响的复包络
G 功率增益
$G(f)$ 功率传输函数
h 普朗克常数，6.63×10^{-34} J · s
$h(t)$ 线性网络的冲激响应
$h(x)$ x 到 $h(x)$ 的变换函数
H 熵(平均信息量)
$H(f)$ 线性网络的传输函数
i 整数
I_j 第 j 条消息中包含的信息量
j 虚数($\sqrt{-1}$)
j 整数
k 玻尔兹曼常数，1.38×10^{-23} J/K
k 整数
$k(t)$ 带通网络复冲激响应
K 表示数字消息的二进制码字中的比特数
K 热力学温度(摄氏温度 +273)
l 整数
ℓ 单个数或单个符号中的比特数
L 电感量
L 允许使用的电平数
m 整数
m 均值
$m(t)$ 消息(调制)波形
$\tilde{m}(t)$ 受噪声干扰的消息波形
M 整数
M 允许使用的消息符号数
n 整数
n 消息符号中的比特数
$n(t)$ 噪声波形
N 整数
N 表示数字消息的符号个数
N 噪声功率
N_0 白噪声功率谱密度值
$p(t)$ 绝对时限脉冲波形
$p(t)$ 瞬时功率
$p(m)$ 调频信号概率密度函数
P 平均功率
P_e 误比特率
$P(C)$ 正确判别概率

$P(E)$	消息错误概率
$\mathscr{P}(f)$	功率谱密度(PSD)
$Q(z)$	高斯函数积分
$Q(x_k)$	第 k 个抽样值 x_k 的量化值
$r(t)$	接收到的信号与噪声混合物
R	数据速率(bps)
R	电阻
$R(t)$	实包络
$R(\tau)$	自相关函数
$s(t)$	信号
$\tilde{s}(t)$	受噪声干扰的信号
S/N	信号功率与噪声功率之比
t	时间
T	时间间隔
T	热力学温度(开氏温度)
T_b	比特周期
T_e	有效输入噪声温度
T_0	发射符号或消息持续时间
T_0	周期波形的周期
T_0	标准室内温度(290 K)
T_s	抽样周期
u_{11}	协方差
$v(t)$	电压波形
$v(t)$	带通波形或带通随机过程
$w(t)$	波形
$W(f)$	$w(t)$ 的频谱(傅里叶变换)
x	输入
x	随机变量
x	复函数的实部或复常数
$x(t)$	随机过程
y	输出
y	输出随机变量
y	复函数的虚部或复常数
$y(t)$	随机过程
α	常数
β	常数
β_f	调频指数
β_p	调相指数
δ	ΔM 调制中的量化台阶
δ_{ij}	Kronecker δ 函数
$\delta(t)$	冲激函数[狄拉克(Dirac) δ 函数]
ΔF	最大频率偏移(赫兹)

$\Delta\theta$	最大相位偏移
ϵ	常数
ϵ	误差
η	频谱效率[(bps)/赫兹]
$\theta(t)$	相位波形
λ	积分时的哑变量
λ	波长
$\Lambda(r)$	似然比
π	3.14159
ρ	相关系数
σ	标准偏差
τ	自相关函数的独立变量
τ	脉冲宽度
$\varphi_j(t)$	正交函数
φ_n	极坐标形式傅里叶级数的系数
ω_c	载波角频率，$2\pi f_c$
$\equiv$	数学恒等式
$\triangleq$	符号的数学定义式

定义函数

$J_n(.)$	第一类 n 阶贝塞尔函数
$\ln(.)$	自然对数
$\log(.)$	以 10 为底的对数
$\log_2(.)$	以 2 为底的对数
$Q(z)$	高斯概率密度函数积分
$\mathrm{Sa}(z)$	$(\sin z)/z$
$u(.)$	单位阶跃函数
$\Lambda(.)$	三角函数
$\Pi(.)$	矩形函数

运算符

$\mathrm{Im}\{\cdot\}$	虚部
$\mathrm{Re}\{\cdot\}$	实部
$\overline{[\cdot]}$	集平均
$\langle[\cdot]\rangle$	时间平均
$[\cdot]*[\cdot]$	卷积
$[\cdot]^*$	复共轭
$\angle[\cdot]$	角度运算或角度，参见式(2.108)
$\lvert[\cdot]\rvert$	绝对值
$\lvert\hat{\cdot}\rvert$	希尔伯特变换
$\mathscr{F}[\cdot]$	傅里叶变换
$\mathscr{L}[\cdot]$	拉普拉斯变换
$[\cdot]\cdot[\cdot]$	点积



北京培生信息中心
北京市东城区北三环东路 36 号
北京环球贸易中心 D 座 1208 室
邮政编码：100013
电话：(8610) 57355171/57355169/57355176
传真：(8610) 58257961

Beijing Pearson Education
Information Centre
Suit 1208, Tower D, Beijing Global Trade Centre,
36 North Third Ring Road East,
Dongcheng District, Beijing, China 100013
TEL: (8610)57355171/57355169/57355176
FAX: (8610)58257961

尊敬的老师：

您好！

为了确保您及时有效地申请教辅资源，请您务必完整填写如下教辅申请表，加盖学院公章后将扫描件用电子邮件的形式发送给我们，我们将会在 2-3 个工作日内为您开通属于您个人的唯一账号以供您下载与教材配套的教师资源。

请填写所需教辅的开课信息：

采用教材			□中文版 □英文版 □双语版
作　　者		出版社	
版　　次		ISBN	
课程时间	始于　　年　月　日	学生人数	
	止于　　年　月　日	学生年级	□专科　□本科 1/2 年级 □研究生　□本科 3/4 年级

请填写您的个人信息：

学　　校			
院系/专业			
姓　　名		职　　称	□助教 □讲师 □副教授 □教授
通信地址/邮编			
手　　机		电　　话	
传　　真			
official email(必填) (eg:XXX@ruc.edu.cn)		email (eg:XXX@163.com)	
是否愿意接受我们定期的新书讯息通知：	□是　□否		

Publishing House of Electronics Industry
电子工业出版社：www.phei.com.cn
www.hxedu.com.cn
北京市万寿路 173 信箱高等教育分社（100036）
联系电话：010-88254555
E-mail：Te_service@phei.com.cn

系 / 院主任：________________（签字）

（系 / 院办公室章）

_____年_____月_____日

目　　录

第1章　绪　　论

本章要点

- 通信系统工作原理
- 频率分配与电波传播特性
- 计算机求解(MATLAB)
- 信息度量
- 编码性能

通信系统涉及的内容非常广泛，因此，在一本篇幅适中的书中不可能全部讲述。本教材中，我们精心选择了通信系统的基本理论作为讨论的重点内容。例如，在第2章中着重讨论了瞬时功率和平均功率的基本定义，在第4章中讨论了类似于AM无线带通信号的功率。其他内容集中在了模拟系统的频谱、信噪比以及数字系统的误比特率等概念上。此外，读者通过对实际通信系统的使用，可以进一步加深对通信系统工作原理的理解。通常，通信系统的实际应用先于理论的完善，这增加了读者的学习兴趣并激励他们去学好系统的基本理论。本书的目标是让读者体验理解通信系统工作原理后的喜悦，并培养设计新的通信系统的能力。

本书对一学期课程或两学期的课程都是适用的。本书着重阐述了能在一学期课程内讲述的通信系统理论和应用的基本内容，也介绍了可在两学期课程内深入讨论的必要内容。这里"着重"的意思是说全书的篇幅必须限制在750页左右①。其实更大的篇幅也不能包括新增加的内容，即便是用于两学期课程(目前许多学校都倾向于开设阐述通信系统理论的一学期课程)。本书简要介绍了编码、无线信号传播、WiMAX以及蜂窝系统的长期演进(LTE)技术等概念。这些重要概念的详细内容将会在专门的教材中讨论。

第八版主要的变化是在全书的各章中增加了100多道例题并附有解答。学生们总是希望书中有更多的例题。几乎所有新增加的例题中都包含有几行文字的问题描述。对这些例题的解答是通过MATLAB来完成的。这些MATLAB解答文件中包括了解题过程(MATLAB程序中的注释行)、计算步骤及绘图结果。这种表述过程有以下好处：首先，对每个例题的问题描述只用了几行文字，因此全书不会增加太多的篇幅；其次，学生可以积累如何使用MATLAB的经验(通过解题过程的示范)。还有就是得到了比用手工计算方法更清晰的绘图结果，同时还能发现MATLAB程序中的参数变化是如何影响计算结果的。

那么，什么是通信系统呢？什么是电气与计算机工程(ECE)呢？ECE解决两种类型的问题：(1)电能的产生或传输；(2)信息的传输或处理。而通信系统是设计用来传输信息的。

重要的是要搞清楚通信系统与电力系统之间有着明显的不同要求。在电力系统中，信号的波形是确定的，设计电力系统时主要考虑的是如何减小电能的损失。

在通信系统中，接收端(接收者)在没有收到信号之前是不知道信号波形的，否则就没有可传输的信息，也就没有必要进行通信了。接收者对所传输的消息越感到吃惊，收到的信息量就越大。也就是说，信息的传输意味着预先未知消息的交流。

噪声限制了通信系统的通信能力。如果没有噪声，就可以以极小的功率将信号传至无穷

---

① 指英文原版书的篇幅。——编者注

远。在无线通信的早期，人们就明显地意识到了这一点。但是关于噪声及噪声对信息传输系统影响的理论直到20世纪40年代才由D. O. 诺思(North)[1943]、S. O. 赖斯(Rice)[1944]、C. E. 香农(Shannon)[1948]及N. 维纳(Wiener)[1949]等人提出。

通信系统设计用来传输携带信息的波形给接收者。可以选择不同的波形来携带信息。例如，选择什么样的波形来表示打印出的字母A呢？这取决于许多因素，其中包括波形的带宽(频带宽度)和波形的中心频率、波形的功率或能量、噪声对波形携带的信息的影响以及发射端产生波形和接收端检测波形的成本。

本书分为8章及3个附录。第1章介绍了一些重要的概念，如信息的定义，同时提出了衡量通信系统传输信息能力的方法。第2章涉及获取信号波形频谱带宽及功率的基本技术。第3章研究了基带信号(基带信号的频谱在零频附近)。在第4章及第5章中，讨论了带通信号(带通信号的频谱不在零频附近)。第6章及第7章包括了噪声对信号波形选择的影响的内容。第8章重点介绍了包括个人通信系统(PCS)在内的几种有线及无线通信系统。附录中的内容有：数学技巧、恒等式和表，概率和随机变量，MATLAB的使用等。此外，在每一章中还适当地介绍了通信系统采用的技术标准。信号波形的绘制、波形频谱的计算以及通信系统的分析与设计都是借助于个人计算机来完成的。

总之，通信系统是设计用来传输信息的。设计通信系统时主要考虑以下4个方面的问题：

1. 携带信息的波形的选择。
2. 波形的带宽及功率。
3. 系统噪声对接收到的信息的影响。
4. 系统的成本。

1.1 历史回顾

表1.1中列出了通信系统发展的历程。建议读者花些时间来研究这张表，了解其中的内容。读者从表中会注意到，虽然在19世纪后期就发明了电话，但直到1954年第一条横渡大西洋的电话电缆才铺设完成。在这之前，所有的越洋电话都是通过短波通信来完成的。与此类似，在英国，1936年就开始了电视广播，但是直到1962年Telstar I号卫星被送入轨道后，才开始了横渡大西洋的电视转播。此外还可以看到，电报中使用的数字传输系统在19世纪50年代就已经发明，这比20世纪发明的应用于电话中的模拟传输系统还要早。但是，现在人们又比较重视数字通信技术的发展了。

表1.1 通信系统发展的重要历程

年 代	事 件
公元前3000年以前	埃及人发明象形文字语言
公元800年	阿拉伯人从印度引入现在所用的数字系统
1400	Johannes Gutenberg 发明可移动的活字金属打字机
1752	Benjamin Franklin 通过风筝证明雷电的存在
1827	Georg Simon Ohm 提出欧姆定理($I = E/R$)
1834	Carl F. Gauss 和 Ernst H. Weber 发明电磁电报机
1838	William F. Cooke 和 Charles Wheatstone 爵士建立电报系统
1844	Samuel F. B. Morse 在巴尔的摩及首都华盛顿之间的电报线路上演示电报通信过程
1850	Gustav Rorbert Kirchhoff 首次发表基尔霍夫电路定律
1858	首次铺设横渡大西洋的电缆，26天后宣告失败

（续表）

年 代	事 件
1864	James C. Maxwell 预言电磁辐射
1871	电报工程师协会在伦敦成立
1876	Alexander Graham Bell 发明电话并申请专利
1883	Thomas A. Edison 发现真空管中的电子束，称为“爱迪生效应 ，奠定了电子管的基础
1884	美国电子工程师学会(AIEE)成立
1887	Heinrich Hertz 验证了麦克斯韦(Maxwell)理论
1889	电报工程师协会在伦敦改名为电子工程师学会(IEE)
1894	Oliver Lodge 在 150 码的距离上演示无线通信过程
1900	Guglielmo Marconi 首次发射横渡大西洋的无线电信号
1905	Reginald Fessenden 通过无线电波传送语音与音乐
1906	Lee deForest 发明真空三极管放大器
1907	无线电报工程师协会在美国成立
1909	无线电学会在美国成立
1912	在美国由无线电报工程师协会及无线电学会合并成立无线电工程师学会(IRE)
1915	贝尔电话公司铺设横贯美国大陆的电话线
1918	Edwin H. Armstrong 发明超外差式接收电路
1920	匹兹堡的 KDKA 及 PA 公司开始首次无线广播
1920	J. R. Carson 将抽样引入通信系统
1923	Vladimir K. Zworkykin 发明电视光电摄像管
1926	J. L. Baird(英)和 C. F. Jenkins(美)共同演示电视
1927	美国成立联邦无线电委员会
1927	Harold Black 在贝尔实验室发明负反馈放大器
1928	Philo T. Farnsworth 演示第一个全电子电视系统
1931	电传打字电报机服务开始
1933	Edwin H. Armstrong 发明调频信号
1934	美国在联邦无线电委员会的基础上成立联邦通信委员会(FCC)
1935	Robert A. Watson-Watt 研制出首部实用雷达
1936	英国广播公司(BBC)首次开始电视广播
1937	Alex Reeves 提出脉冲编码调制(PCM)
1941	John V. Atanasoff 在艾奥瓦州立大学发明数字计算机
1941	FCC 批准在美国进行电视广播
1945	宾夕法尼亚大学的 John W. Mauchly 研究出电子数字计算机 ENIAC
1947	贝尔实验室的 Walter H. Brattain 、John Bardeen 及 William Shockley 发明晶体管
1947	贝尔实验室的 Steve O. Rice 给出了噪声的统计描述
1948	Claude E. Shannon 发表信息论
1950	时分复用技术应用于电报系统
1950s	微波通信开始应用
1953	NTSC 彩色电视制式引入美国
1953	第一条横渡大西洋的电话电缆(共 36 个语音信道)铺设完成
1957	前苏联发射第一颗人造地球卫星，Sputnik I
1958	A. L. Schawlow 及 C. H. Townes 发表激光理论
1958	德州仪器公司的 Jack Kilby 研制出第一块锗集成电路
1958	Fairchild 公司的 Robert Noyce 生产出第一块硅集成电路
1961	美国开始立体声调频广播
1962	第一颗有源人造地球卫星(Telstar I)在美国和欧洲之间转播电视信号
1963	贝尔公司推出按键电话
1963	IRE 和 AIEE 合并成立电气与电子工程师学会(IEEE)
1963 - 1966	提出纠错编码理论及高速无差错数字通信自适应均衡理论

(续表)

年　代	事　件
1964	电子电话交换机(No.1 ESS)投入使用
1965	第一颗商用通信卫星(Early Bird)投入使用
1968	有线电视系统出现
1971	英特尔公司生产出第一块单片微处理器,4004
1972	摩托罗拉公司为 FCC 演示蜂窝电话系统
1976	个人计算机出现
1979	64 kb 随机存储器的出现宣告超大规模集成(VLSI)电路时代的到来
1980	贝尔公司推出 FT3 光纤通信系统
1980	飞利普公司和索尼公司开发出压缩磁盘
1981	IBM PC 出现
1982	美国电话电报公司同意解散其下属的 22 家贝尔电话公司
1984	苹果公司推出 Macintosh 计算机
1985	传真机广泛使用
1989	卫星全球定位系统(GPS)完成部署
1995	互联网(Internet)及 WWW 浏览广泛流行
2000—至今	进入基于微处理器的数字信号处理、数字示波器、数字调谐接收机、高速个人计算机、扩频通信系统、数字卫星通信系统、数字电视(DTV)及个人通信系统(PCS)时代

1.2 数字信源、模拟信源与系统

定义 数字信源是指产生有限个消息符号的信源。

电话机拨号键盘就是一种数字信源,由它产生的符号数是有限的。

定义 模拟信源是指产生连续消息的信源。

麦克风是一种模拟信源,它的输出电压包含语音信息,并且在一定的取值范围内连续变化。

定义 数字通信系统是指将信息从数字信源传输到接收者(又称信宿)的通信系统。

定义 模拟通信系统是指将信息从模拟信源传输到信宿的通信系统。

严格地说,数字波形是指只取离散幅度值的时间函数。如果是二进制的数字波形,幅度取值就只有两个。模拟波形是指取连续幅度值的时间函数。

数字通信系统中通常有数字电压波形和数字电流波形,但也可以有模拟信号波形。例如,在二进制的数字通信系统中,可以用频率为 1000 Hz 的正弦波代表二进制码元“1”,而用频率为 500 Hz 的正弦波代表二进制码元“0”。这样系统通过模拟信号波形把信息从数字信源传输到接收端,但这种系统仍称为数字通信系统。从这点来说,数字通信工程师应该既能分析数字电路又能分析模拟电路。

数字通信系统有以下许多优点:

- 数字电路成本低。
- 保密性好。
- 动态范围(最大值与最小值之间的差值)更大。
- 音频、视频及数据等不同信源的数据可以综合到一个数字通信系统中传输。
- 长途通信系统中,中继站之间的噪声不积累。

- 在强噪声条件下，误码也可以小。
- 可通过编码纠错。

不过，数字通信系统也有以下不足：

- 一般来说，数字通信系统比模拟通信系统要求更宽的带宽。
- 需要同步。

但是，数字通信系统的优点比其缺点多。因此，数字通信系统的应用越来越广泛。

1.3　确定波形与随机波形

在通信系统中有两大类波形：确定波形与随机波形(不确定波形)。

定义　*确定波形是指能用确定的时间函数来描述的波形。*

例如，如果用下式来描述信号波形：

$$w(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi_0) \tag{1.1}$$

其中 A、ω_0、ϕ_0 是已知的常数，那么这个波形就是确定波形，因为这时任意给定 t 的值，就可以计算出 $w(t)$ 的值。如果以上三个常数中任意一个是未知的，那么就不能计算出 $w(t)$ 的值，这时信号波形就不是确定波形。

定义　*随机波形(不确定波形)是指不能用确定的时间函数来描述的波形，对它的描述必须用概率统计的方法来进行。*①

接下来，当分析通信系统性能时会遇到一些困难。因为我们知道，来自信源的波形不可能是确定波形。例如，在数字通信系统中，发送每个英文字母时都传递了信息，对应每个英文字母可能要用一个确定波形来表示。但是，当我们考察信源发出的波形时，会发现它是随机波形。因为你并不知道下一个要发送的是哪一个字符，因此我们实际需要设计的是传输随机波形的通信系统。噪声也是用随机波形来描述的。这就要求使用概率论和统计学中的概念(这些是第 6 章和第 7 章的内容)，从而使得设计和分析通信系统的过程更为复杂。但是，如果在分析通信系统性能时把随机波形视为一种特殊的确定波形，就可以得到大部分(当然不是全部)想要的结果。本书的前五章采用的就是这种分析方法。

1.4　本书结构

本书的前五章用确定波形的方法来分析通信系统。采用这种分析方法可以得到一些重要的概念，而且避开了复杂的统计分析过程，同时也让那些不熟悉统计分析的读者对通信系统有一个基本的了解。但是不采用统计的方法是不能分析通信系统重要的噪声性能的。这部分内容安排在第 6 章、第 7 章及附录 B 中。② 第 8 章介绍了几种实际的有线和无线通信系统。

本书将成为读者的良师益友。为了帮助学生解答课外习题，本书各章中安排有超过 100 道的例题，这些例题大部分都有 MATLAB 解答过程，可以在本段末所提供的网站上免费下载相关

---

① 随机波形，也叫随机过程，第 6 章将给出它的更精确的定义。

② 附录 B 中介绍了概率论及随机变量的知识，并且自成体系。这样可以让那些没有这方面基础的读者在学习第 6 章及第 7 章内容之前也能了解这些知识。

的 M 文件。此外，在每章的末尾都安排有若干道助学例题，这些助学例题都附有解题过程。在适当的地方还要用到个人计算机(PC)来求解这些例题。此外，学生题解手册在550道课外习题中挑选了100多道进行了详细解答。所选的课外习题用★进行了标志。对这些所选的课外习题，如果有电脑解答过程的，相应的MATLAB文件也提供给了学生。学生题解手册和MATLAB文件可以通过以下的网址免费下载：http://lcouch.us 或 http://couch.ece.ufl.edu。

如果需要，本书的勘误表也会发布在该网站上。

本书可以作为以下各学科的参考文献：数学(附录A)、统计学(附录B及第6章)及MATLAB(附录C)。此外本书中引用的通信系统标准(第3、4、5、8章)也有参考价值。

从事通信事业是一份令人心动的职业。我极力建议读者先去浏览一下第8章中介绍的有线和无线通信系统中那些让人特别感兴趣的内容。为了学习了解更多的实际通信系统知识以及自己可以设计的电路类型，可以参考或购买最新出版的ARRL手册(如2010年版的ARRL手册)。

1.5 个人计算机及 MATLAB 的使用

在本书中，使用了个人计算机(PC)来绘制信号波形图、计算信号的频谱(采用快速傅里叶变换)及求解积分。总之，借助PC可以帮助读者理解、分析和设计通信系统。计算机的编程语言采用的是MATLAB，之所以选择MATLAB是因为这种语言编程效率高，而且MATLAB学生版的价格也比较合理。如果想要了解MATLAB的编程思想及使用方法，可以参考附录C(MATLAB的使用)中的内容。附录C中提供了书中的例题、助学例题及所选的课外习题的解题过程的MATLAB文件。这些文件都在7.11 R2010b版本的MATLAB中运行。这些文件在前面提到的网站上可以免费下载。更多的细节参考附录C。

(其他所有标有个人计算机符号💻的课外习题的MATLAB文件可以参考教师解题手册。)

1.6 通信系统框图

通信系统可以用图1.1所示的框图来描述。不管是何种通信系统，它都包括三个部分：发射端、信道和接收端。为了使读者清楚各种信号在通信系统中的位置，我们在本书中将一直采用图中所示的各种符号。来自信源的消息用输入波形 $m(t)$ 表示。接收端收到的消息用 $\tilde{m}(t)$ 表示。符号[~]表示接收到的消息与发射的消息不一样，即接收到的消息 $\tilde{m}(t)$ 可能在信道中受到了噪声的干扰，或是在系统中受到其他的损伤，如受到不需要的滤波或不需要的非线性变换等因素的影响。信号波形可以是模拟的或数字的，这取决于具体的通信系统，它可以表示音频、视频或其他类型的信息。在多路复用通信系统中，信号波形可以是复用后的发射信号及接收信号。信号 $m(t)$ 及 $\tilde{m}(t)$ 的频谱(或频率)集中在 $f=0$ 处，因此它们都称为基带信号。

发射端中信号处理部分的功能是提高系统的传输效率。例如，在模拟通信系统中，信号处理器可能是用来限制信号 $m(t)$ 带宽的模拟低通滤波器。而在数模混合通信系统中，信号处理器可能是模数转换器(ADC)。模数转换器的作用是将输入的模拟信号的抽样值转换为数字信号(相关内容在第3章中的脉冲编码调制部分讨论)。这种情况下，ADC在信号处理器中的作用是对输入信号进行信源编码。此外，信号处理器还可以对数字信号进行信道编码，增加奇偶校验位。这样在接收端中的信号处理器就可以进行检错和纠错，从而减小或消除由信道中的噪声引起的比特错误。发射端中信号处理器的输出信号仍为基带信号，因为它的频谱集中在 $f=0$ 处。

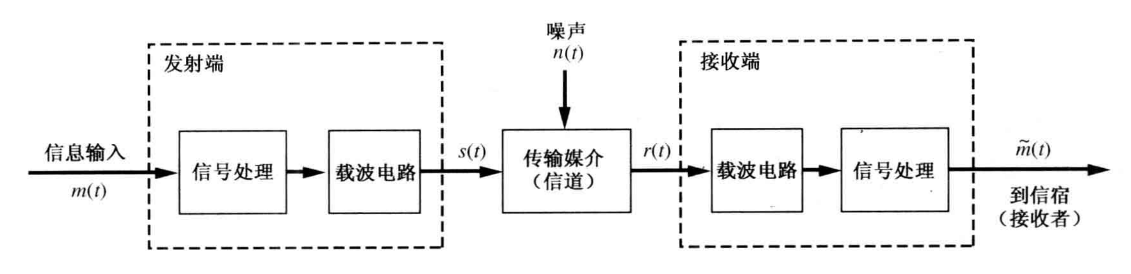


图 1.1　通信系统

发射端中，载波电路的功能是将处理好的基带信号变换为适合于信道传输的频带信号。例如，如果信道是由光纤组成的，那么载波电路就将基带信号变换为光波，即发射信号 $s(t)$ 是光信号。如果在信道中直接传输基带信号，那么就不需要载波电路，这时发射信号 $s(t)$ 就是信号处理器的输出信号。当传输信道是中心频率位于 $f_c \gg 0$（f_c 为载波频率）的带通型信道时，就必须用到载波电路了。这时 $s(t)$ 是带通型信号，它的中心频率位于 f_c 处。例如，频率为 850 kHz 的调幅（AM）广播电台的载波频率就是 850 kHz。将基带输入信号 $m(t)$ 变换为带通信号 $s(t)$ 的过程称为调制[在调幅（AM）广播系统中，$m(t)$ 是音频信号]。在第 4 章中，将会看到带通信号具有如下的形式：

$$s(t) = R(t)\cos[\omega_c t + \theta(t)] \tag{1.2}$$

式中，$\omega_c = 2\pi f_c$。如果上式中 $R(t) = 1$，$\theta(t) = 0$，那么信号 $s(t)$ 就变成了频率 $f = f_c$ 的正弦波，它的带宽为零。在由载波电路完成的调制过程中，$R(t)$ 或 $\theta(t)$ 或两者同时随基带信号 $m(t)$ 而变化。$R(t)$ 和 $\theta(t)$ 的变化将导致信号 $s(t)$ 产生带宽，带宽的大小将由信号 $m(t)$ 的特性及变换函数共同确定。第 5 章中将会给出具体的数字和模拟带通型信号。

信道可以分为两大类：有线信道和无线信道。有线信道的例子有双绞电话线、同轴电缆、波导及光纤等。无线信道的典型例子包括大气、真空及海水。虽然信道对不同种类的信号有不同的传输特性，但数字和模拟调制的一般原理对所有类型的信道都是适用的。通常，信号在信道中传输时产生衰减，信道中的噪声和由不理想接收机引入的噪声会引起接收信号的失真。信道中的噪声可能来自于自然界中的电气干扰（如雷电）或者来自人为的干扰（如高压输电线路、汽车点火装置以及数字计算机的开关电路等）。信道中还会包括有源放大设备，如电话系统中的中继站、空间通信系统中的卫星转发器等。

此外，在信道中还会产生多径效应。多径效应是由于信号经过多个反射体引起的。多径效应可以近似由时延扩展及多普勒频移两个参数来描述。时延扩展是由于路径长度不同的多径传播引起的。多径传播时，来自不同路径的信号有不同的时延，接收端收到的信号是这些具有不同时延信号的合成，这导致发射的窄脉冲在接收端出现时间上展宽的现象。同时，多个反射体的运动引起接收到的合成信号产生多普勒频移。如果反射体慢速运动且时隐时现的话，那么接收到的合成信号将会产生衰落，这是由于来自不同路径的接收信号互相抵消所致。这种衰落现象可能大家在夜晚收听远方的 AM 广播时就已经注意到了（夜晚远方的 AM 广播信号的传播方式是天波，具体见 1.8 节中的讨论）。

接收端收到由信道输出的受到噪声污染的信号后，由接收端的基带处理器转换为基带信号。基带处理器的功能是“清除”噪声，并在通信系统的输出端得到信源信息的估计值 $\tilde{m}(t)$。

我们的目标是在允许的发射功率、信号带宽及成本的条件下，设计出以尽可能小的失真量将信息传输到接收端的通信系统。在数字通信系统中，衡量失真量的是发送数据 $\tilde{m}$ 的比特错误概率（P_e），也称为误比特率（BER）。在模拟通信系统中，衡量系统性能的是接收端的输出信噪比。

1.7 频率分配

无线通信系统通常采用大气层作为传输信道。这时干扰和电波传播条件主要取决于所采用的传输频率值。从理论上说，任何调制方式(如调幅、调频、单边带、相移键控、频移键控等)都可以在任意频段上使用。但是，为了维护电波传播秩序，减小干扰，政府相关部门对指定的频段上使用的调制类型、信号带宽、发射功率以及传输的信息内容都做出了规定。

国际上，频率的指配及技术标准的制定是由国际电信联盟(ITU)负责的。ITU 是联合国的一个特殊机构，它的行政总部位于瑞士的日内瓦，有大约 700 名工作人员(见 http://www.itu.ch)。工作人员的职责是管理由 ITU 的 200 个成员国批准的各种协议。ITU 下属三个部门：无线电通信部门(ITU-R)，它负责频率的指配，关心的是提高无线电频谱的使用效率；电信标准部门(ITU-T)，它的任务是研究通信技术、执行及资费等问题，并对世界范围内的公共电信网络(PTN)及相关的无线通信系统提出建议标准；电信发展部门(ITU-D)，它的职责是提供技术援助，特别是对发展中国家提供技术援助，以帮助这些国家提供全面的、经济的电信服务并融入世界电信网络之中。在 1992 年以前，ITU 主要由两个下属部门组成：国际电话与电报咨询委员会(CCITT)和国际无线电咨询委员会(CCIR)。

ITU 的每个成员国在其领土范围内拥有频谱使用及选择采用某种通信标准的权力，但是每个成员国应该遵守由 ITU 制定的频率规划和建议采用的通信标准。通常，ITU 的每个成员国都设有负责管理本国无线电频率指配等事宜的行政管理部门。在美国，联邦通信委员会(FCC)负责一般公共的及各州和地方政府的无线电系统的管理，并给它们发放许可证(见 http://fcc.gov)。此外，对美国政府及美军的频率指配工作是由国家电信和信息管理局(NTIA)负责的。FCC 把国际上指配的频率又分为了若干个子波段，一共可容纳 900 万台发射机工作，提供 70 种业务服务。表 1.2中列出了频段的一般划分、频段的名称、典型的传播条件以及提供的典型业务。

要详细了解目前美国最新的频率分配情况，可参考以下网页：http://www.ntica.doc.gov/osmhome/allochrt.html。

表 1.2 频段名称、传播特性及典型应用

频段[a]	名称	传播特性	典型应用
3 ~ 30 kHz	甚低频(VLF)	地波传播；白天和晚上，损耗小；大气噪声电平高	远距离导航；海底通信
30 ~ 300 kHz	低频(LF)	与甚低频类似，但可靠性稍差；白天有吸收	远距离导航；海底通信；无线信标
300 ~ 3000 kHz	中频(MF)	地波传播，晚上天波传播；晚上损耗小，白天损耗大；有大气噪声	海上无线通信、定位及调幅广播(AM)
3 ~ 30 MHz	高频(HF)	电离层反射，随时间、季节及频率变化；30 MHz 以下时大气噪声电平低	业余无线电；国际广播，军事通信，远距离的飞机及轮船间通信，电话、电报及传真
30 ~ 300 MHz	甚高频(VHF)	接近视线(LOS)传播，温度变化会引起散射，宇宙噪声	VHF 电视，调频双向无线通信，飞行器调幅通信，飞行器辅助导航
0.3 ~ 3 GHz	极高频(UHF)	视线传播，宇宙噪声	UHF 电视，蜂窝电话，辅助导航，雷达，GPS，微波通信，个人通信系统
	字母符号		
1.0 ~ 2.0	L		
2.0 ~ 4.0	S		
3 ~ 30 GHz	超高频(SHF)	视线传播，10 GHz 以上时有雨滴损耗，氧气、水蒸气会引起大气损耗，22.2 GHz 时有大的水蒸气吸收	卫星通信，雷达，微波通信

[a] $kHz = 10^3$ Hz；$MHz = 10^6$ Hz；$GHz = 10^9$ Hz。

（续表）

频 段[a]	名 称	传播特性	典型应用
	字母符号		
2.0～4.0	S		
4.0～8.0	C		
8.0～12.0	X		
12.0～18.0	Ku		
18.0～27.0	K		
27.0～40.0	Ka		
26.5～40.0	R		
30～300 GHz	极高频(EHF)	同上；183 GHz 时有大的水蒸气吸收，60 GHz 及 119 GHz 时有氧气吸收	雷达，卫星通信，实验
	字母符号		
27.0～40.0	Ka		
26.5～40.0	R		
33.0～50.0	Q		
40.0～75.0	V		
75.0～110.0	W		
110～300	毫米波		
10^3～10^7 GHz	红外线、可见光及紫外线	视线传播	光纤通信

[a] kHz = 10^3 Hz； MHz = 10^6 Hz； GHz = 10^9 Hz。

1.8 电波传播

如表1.2中所列，无线信道中的电波传播特性主要取决于频率值的大小，因此需要根据电波的覆盖要求来指配使用的频率。电波的传播特性取决于无线电波的传播速度，传播速度是高度和边界条件的函数，它与大气温度、大气密度及电离层的浓度有关。

位于大气层上部的电离子(即自由电子)主要影响中频(MF)和高频(HF)电磁波的传播。电离子是由于大气层受到太阳紫外线和宇宙射线的辐射而产生的。因此，电离子的浓度在每天的不同时段、每年的不同季节以及太阳的不同活动(太阳黑子)周期内都不相同，从而造成了在地球外表不同高度的大气层中有不同的电离子浓度。

对电波的传播起主要作用的电离区域是D、E、F_1 及 F_2 层。其中D层位于接近地球表面大约45英里或55英里的高度。对频率 $f > 300$ kHz 的电磁波，D层就像是海绵吸水一样地吸收(衰减)这些电磁波。不过，D层对电波的衰减随着频率的增加而减小，当频率 $f > 4$ MHz 时，衰减量就不大了。对频率 $f < 300$ kHz 的电磁波，D层对它们将产生折射(弯曲)作用。D层白天浓度大，正午时分达到最大值。到了晚上，D层几乎消失。E层的高度在65～75英里之间，它的浓度在正午时分达到最大值，太阳落山后消失。E层白天反射高频(HF)电波。F层的高度在90～250英里之间，它的浓度在太阳升起的时候很快上升，午后达到最大值，太阳落山后缓慢消失。F层在白天分离为 F_1 和 F_2 两层，到了晚上，又合为一层。对高频(HF)信号起反射作用的主要是F层。不同频率的电波以不同的方式传播，电波的传播方式主要有三种：地波、天波和视线传播(LOS)，如图1.2所示。

地波传播方式如图1.2(a)所示，它是频率在2 MHz以下的电磁波的主要传播方式。在这种方式中，电磁波弯曲地沿着地球的表面传播，这是由于电磁波的绕射作用造成的。地波是调幅广播中的传播方式。在调幅(AM)广播中，电波覆盖地球的表面，信号在可视的水平范围内传播。经常有人会问下面的问题：最低的可用无线电频率是多少？这个问题的答案是：最低的可

用无线电频率值取决于你想制造多长的天线。要保证有效的辐射，所需的天线长度必须比波长的 1/10 要长。例如，对载波频率 f_c = 10 kHz 的信号来说，波长为

$$\lambda = \frac{c}{f_c}$$
$$\lambda = \frac{(3 \times 10^8 \text{m/s})}{10^4} = 3 \times 10^4 \text{m} \tag{1.3}$$

这里 c 为光速。(公式 $\lambda = c/f_c$ 意思是：距离 = 速度 × 时间，这里的时间是跨越一个波长所需的时间，为 $t = 1/f_c$。)因此，为了有效地辐射 10 kHz 的电磁波，天线的长度至少应为 3000 m。

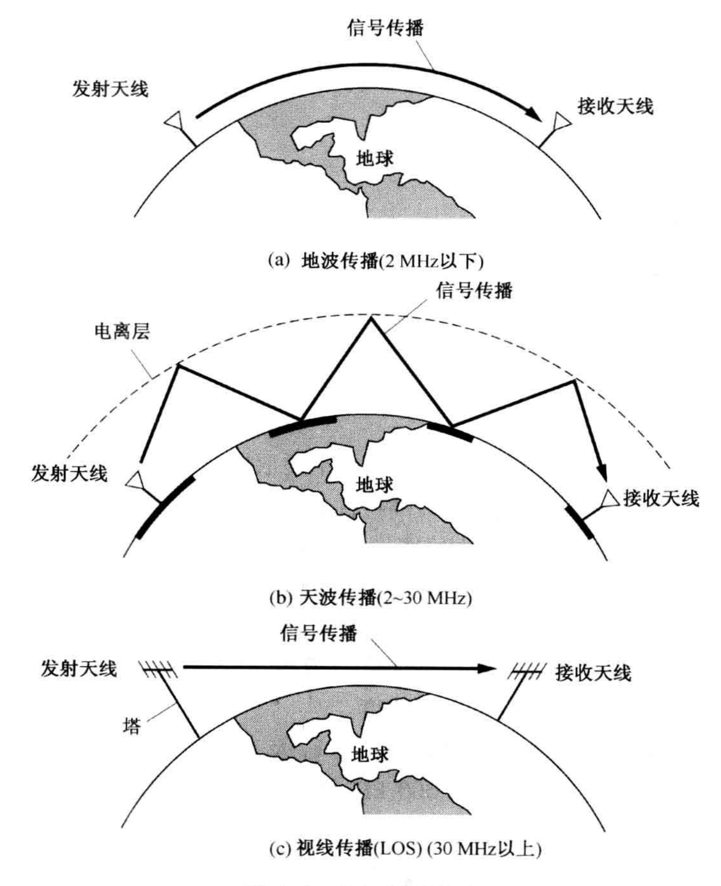


图 1.2 电波传播方式

天波的传播方式如图 1.2(b)所示，它是频率在 2 ~ 30 MHz 之间的电磁波的主要传播方式。电波在电离层和地球表面之间来回反射，从而实现远距离的电波覆盖。实际上，由于电离层的折射率随着高度以及电离层浓度的变化而变化，使得电波在电离层中以倒 U 字形的形状逐渐地发生折射(弯曲)。电离层的折射率由 Griffiths(1987)、Jordan 和 Balmain(1968)等人给出，如下式所示：

$$n = \sqrt{1 - \frac{81N}{f^2}} \tag{1.4}$$

式中，n 为折射率，N 为自由电子密度(每立方米内的自由电子数)，f 为电磁波的频率(单位为赫兹)。N 的值取决于时间、季节以及太阳黑子的数量，典型值在10^{10} ~ 10^{12}之间。在电离层区域内，

因为 $N > 0$，所以 $n < 1$，而在电离层区域外，因为 $N \approx 0$，所以 $n \approx 1$。由于在电离层内 $n < 1$，因此电波的折射满足斯涅耳(Snell)定律，即

$$n \sin \varphi_r = \sin \varphi_i \tag{1.5}$$

式中，φ_i 为电波的入射角(电波的入射方向与垂直线之间的夹角)，φ_r 为电波的折射角。此外，在电离层区域内，N 的值随高度会发生变化，从而折射率也会不同。当电波的频率处在 2 ~ 30 MHz 范围内时，电波折射率的变化恰好使得电波弯曲回到地面。因此，电离层的作用像是一个反射器。由图 1.2(b) 可以看出，发射台的覆盖范围是图中标出的黑粗线部分。发射天线周围的区域是地波覆盖的范围，其他范围是由天波覆盖的。注意，在发射天线和接收天线之间还有电波没有覆盖到的地方。电波的反射角及电离层反射点上的信号损耗取决于电波的频率、每天的时段、季节以及太阳的活动情况[见 Jordan，1985，第 33 章]。

白天的时候，电子的浓度(在电离层的反射点处)会高些，故 $n < 1$，因此可以收听到远方的短波电台广播。但是，白天 D 层也存在，它吸收频率 4 MHz 以下的电磁波。

调幅(AM)广播的情况就是这样。白天收不到远方的调幅广播，但到了晚上，D 层消失了，就可以通过天波听到广播了。在美国，FCC 为 AM 波段指配了若干个频率点作为"清晰频道"(见表 5.1)。在这些频道上，只有一个或两个 50 kW 的大功率电台及少数几个小功率的电台晚上广播。由于这些频道上的干扰较小，因此 50 kW 的大功率电台的广播通过天波使远在800 英里以外的地方都常能听到。例如，在这些"清晰频道"上广播的 50 kW 大功率电台有：位于 Nashville 的 WSM 电台，工作频率为 650 kHz；位于 Minneapolis 的 WCCO 电台，工作频率为 830 kHz；位于 Des Moines 的 WHO 电台，工作频率为 1040 kHz。不过这几年随着一些新电台的陆续开播，这些"清晰频道"上的广播也不像当初那样清晰了。

天波的传播主要是由 F 层(高度在 90 ~ 250 英里之间)对电波的反射作用引起的。由于有了 F 层，几乎在白天或晚上的任何时候都能收听到来自地球另一面的国际短波电台广播。

视线传播(如图 1.2(c)所示)是频率高于 30 MHz 的电磁波的主要传播方式，这时电磁波以直线方式传播。在这种情况下，$f^2 \gg 81N$，因此 $n \approx 1$。这样电离层对电磁波的折射就很小。事实上，这时信号将穿过电离层。卫星通信利用的就是这种特性。

视线传播方式的不足之处在于：当在两个地球站之间进行通信时，信号的传播路径必须位于水平线之上，否则地球曲率就会遮挡视线路径。因此，为了让接收天线能"看见"发射天线，必须把收发天线架设在高塔上。视线传播距离 d 与天线高度有关，由图 1.3 可以容易地得到计算 d 的公式。从图中可以看出：

$$d^2 + r^2 = (r + h)^2$$

或

$$d^2 = 2rh + h^2$$

其中，r 为地球的半径，h 为地面上的天线高度。这里 h^2 与 $2rh$ 相比可以忽略不计。地球的半径为 3960 英里。然而，对视线传播的电波来说，地球的有效半径为 $\frac{4}{3} \times (3960)$ 英里。① 因此，视线传播距离 d 为

$$d = \sqrt{2h}\ \text{英里} \tag{1.6}$$

这里用到了转换因子，因此，天线高度 h 的单位为英尺，而 d 的单位为英里。例如，指配给电视

---

① 大气层的折射率随高度的增加缓慢地减小，从而引起电波发生轻微的弯曲。这种效果可以体现在用等效地球半径来计算视线传播距离上。等效地球半径的值是实际地球半径值的 4/3。

台工作的频率是 30 MHz 以上的 VHF 和 UHF 频段范围(见表 1.2),大功率的电视台的覆盖范围取决于视线传播距离。对一个发射塔高度为 1000 英尺的电视台来说,它的视线传播距离 d 为 44.7 英里。对电视接收端来说,如果接收天线的高度为 30 英尺,那么视线距离 d 为 7.75 英里。因此,对这样的发射和接收天线高度而言,电视台的覆盖区域将是电视台周围半径为 44.7 + 7.75 = 52.45英里的范围。

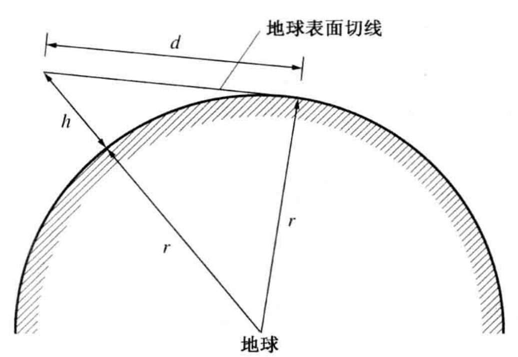


图 1.3 视线传播距离的计算

例题 1.1 视距问题

试绘制发射天线高度从 0 英尺到 1000 英尺变化时的 LOS 视线距离图形。假设接收天线高度为 5 英尺。解题过程及结果参见并运行 M 文件 Example1_1.m。

除了视线传播方式以外,频率在 30 ~ 60 MHz 范围内的电磁波可能还会发生电离层散射传播现象,这是由于电离层的低端(大约在离地球表面 50 英里的高度)折射率的不规则性引起的。由于电波的散射传播,使得超过视线传播距离的 1000 英里之间的通信也能进行。类似地,对流层(在离地球表面 10 英里高度以内)的散射传播,能将频率在 40 MHz ~ 4 GHz 范围的电磁波传输到几百英里外的地方。

关于无线电波传播更详细的技术细节,可以参阅由 Griffiths (1987)、Jordan 和 Balmain (1968)等人编写的教科书中有关地波和天波传播的章节内容以及 Rappaport(2002) 编写的教科书中有关无线蜂窝信号传播的章节内容。还有一本叫做 ARRL(ARRL, 2010)手册的参考书对这个问题讲得也很清楚,非常值得一读。该参考书中还包括有预测天波传播条件的计算机程序(如 VOACAP)。

1.9 信息的度量

正如看到的那样,通信系统的目的是将信息由信源传输到接收者。但是信息到底是什么呢? 信息又如何来度量呢? 我们定性地知道,信息与接收者收到消息时感到的惊讶程度有关。例如,"海洋受到了核爆炸的破坏"这条消息比"今天下雨"这条消息包含有更多的信息量。

定义 从数字信源发出的第 j 条消息包含的信息量由下式给出:

$$I_j = \log_2\left(\frac{1}{P_j}\right) \text{ bps} \tag{1.7a}$$

式中,P_j 为传输第 j 条消息的概率。[1]

[1] 附录 B 中给出了概率的定义。

由上面给出的定义看出，越不容易发生的消息（P_j 的值越小）包含的信息量越大（I_j 的值越大）。我们也看到，信息的度量只与发送消息的可能性有关，而与消息的内容是否有意义无关。

对数的底的取值决定了信息度量的单位。当取以 2 为底的对数时，信息的单位为比特（bit）。如果取自然对数，信息的单位为奈特（nat）。当取以 10 为底的对数时，信息的单位为哈特利（Hartley），它以 R. V. Hartley 的名字命名。R. V. Hartley［Hartley，1948］1928 年首次建议用对数来度量信息。

本章中，比特用来表示由式（1.7a）定义的信息的单位。在后续的章节中，特别是第 3 章中，比特也用来表示二进制数据的单位。注意，不要混淆 bit 这个词的两种不同含义。有些作者用 binit 来表示数据的单位，而用 bit 专门来表示信息的单位。但是，大多数工程师使用同一个词 bit 来表示两种不同的单位，而从上下文中去理解该词的含义。本书保持了工业界的习惯用法，用相同的词来表示两种不同的单位。

为了方便用计数器来计算信息量 I_j，式（1.7a）可以写为以 10 为底的对数形式或自然对数的形式：

$$I_j = -\frac{1}{\log_{10} 2} \log_{10} P_j = -\frac{1}{\ln 2} \ln P_j \tag{1.7b}$$

通常，由于每条消息发送的概率 P_j 是不相同的，因而每条消息包含的信息量也不相同。所以在考察信源所有可能发送的消息后，需要计算信源的平均信息量。

定义　数字信源的平均信息量为

$$H = \sum_{j=1}^{m} P_j I_j = \sum_{j=1}^{m} P_j \log_2\left(\frac{1}{P_j}\right) \text{ bps} \tag{1.8}$$

式中，m 是信源中包含的可能发送的消息的个数（由于假设是数字信源，所以 m 的值是有限的），P_j 为传输第 j 条消息的概率。平均信息量称为信源熵（entropy）。

例题 1.2　信源熵

假设在二进制的条件下，检验信源熵是如何随 P_1 的变化而变化的。P_1 是获得“1”的概率，取值范围为 0 ~ 1。解题过程及结果参见并运行 M 文件 Example1_2. m。

例题 1.3　信息量及信源熵的计算

试求一条由 12 位长的数字组成的消息中包含的信息量。设每位数字以相同的概率取 4 种可能的电平值，且每位数字所取的电平值与前一位数字无关。

在一串由 12 个符号（数字）组成的消息中，每个符号取 4 种可能的电平值，这样就有 $4 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 4 = 4^{12}$ 种不同的组合。由于符号取每种电平的概率是相同的，所以这些组合出现的概率也是相同的。因此，

$$p_j = \frac{1}{4^{12}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{12}$$

或

$$I_j = \log_2\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^{12}}\right) = 12 \log_2(4) = 24 \text{ bps}$$

在这道例题中，可以看出每条消息包含的信息量都等于 24 比特，因此，平均信息量 H 为 24 比特。

假设每个数字只能取两种电平值，且取值概率相同，那么消息中包含的信息量是 12 比特，因

而平均信息量也为 12 比特。这里，因为所有由 12 个符号组成的消息发生的概率相同，所以它们包含的信息量都是 12 比特。如果消息发生的概率不同，那么有些消息包含的信息量多于 12 比特，有些消息包含的信息量少于 12 比特。这样平均信息量会比 12 比特小。例如，有一半的消息(如在 4096 条消息中有 2048 条)发生的概率为 $P_j = 10^{-5}$ (对应的 $I_j = 16.61$ 比特)，另一半消息发生的概率为 $P_j = 4.78 \times 10^{-4}$ (对应的 $I_j = 11.03$ 比特)，那么平均信息量为 $H = 11.14$ 比特。

信息速率也是重要的指标。

定义 信息速率由下式给出：

$$R = \frac{H}{T} \text{ bps} \tag{1.9}$$

这里，H 是由式(1.8)计算出的信息量，T 是发送消息所需的时间。

以上给出的几条定义适用于数字信源。对模拟信源可以用数字信源来近似，近似的程度可以达到我们所希望的精度。

1.10 信道容量与理想的通信系统

有许多标准可以用来衡量通信系统的有效性，以判断通信系统是否理想或完善。对数字通信系统来说，理想的系统应该是在一定的发送能量及信道带宽的条件下，系统的输出端有最小的比特错误概率。因此，比特错误概率及信号带宽是最重要的指标，这些将在后续的章节中讨论。这样就提出了一个问题：有没有可能设计一种通信系统，在信道受到噪声的干扰时，输出端的比特错误概率为零。香农(Shannon)在 1948 年到 1949 年就回答了这个问题[Wyner 和 Shamai, 1998; Shannon,1948, 1949]。在一定的假设条件下，答案是肯定的。香农提出了计算信道容量 C(bps)(在信号与白高斯噪声相加的情况下)的公式，并指出如果信息速率 R(bps)小于信道容量 C，那么输出端的误比特率可以接近零。计算信道容量 C 的公式如下：

$$C = B \log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right) \tag{1.10}$$

式中，B 为信道带宽，单位是赫兹，S/N(单位是瓦特之比，不是 dB)为数字接收机输入端的信号与噪声功率之比。香农并没有告诉我们如何去构建这种通信系统，但是，他证明了在理论上这种通信系统是存在的。因此，香农给出了一个我们可以努力去实现的理论极限。系统要接近香农的理论极限，通常要采用纠错编码技术。

例题 1.4 信道容量

假设电话线的带宽为 3300 Hz，试画出电话线的信道容量与变化范围为 0 ~ 60 dB 的信噪比 S/N 之间的函数图形。解题过程及结果参见并运行 M 文件 Example1_4. m。

对模拟通信系统来说，最佳的系统应该是在一定的信道带宽及发射功率的条件下，接收机的输出端具有最大的信噪比。这里，输出端信噪比的计算最重要。可能有人会问，可不可以设计一种通信系统，在信道受到噪声干扰时，输出端的信噪比为无穷大？答案是否定的。在第 7 章中给出了实际的模拟通信系统与香农的理想通信系统的性能比较结果(见图 7.27)。

奈奎斯特(Nyquist)和哈特利(Hartley)分别在 1924 年和 1928 年给出了数字传输系统中其他的基本限制条件。奈奎斯特证明了如果一位二进制符号用一个脉冲来表示，那么无干扰的脉冲传输速率不大于 $2B$ 个脉冲/秒，其中 B(单位为赫兹)是信道带宽。这就是将在第 2 章中讨论的

维数定理。哈特利把奈奎斯特得出的结论推广到多进制脉冲系统中，这将在第 3 章和第 5 章中讨论。

在下一节中将介绍数字系统采用编码技术后系统性能改善的情况以及与香农的理想系统性能比较的情况。

1.11 编码

如果数字通信系统输出端的数据错误太多，那么采用以下任意一种技术常能减少错误的发生：

- 自动重发请求(ARQ)
- 前向纠错(FEC)

在 ARQ 系统中，当接收电路检测到一组数据中有奇偶检验误差时，它将请求发送端重发该组数据。在 FEC 系统中，对发送的数据进行编码，这样接收端就能发现错误并纠正它。这些处理过程属于信道编码，因为它们用来纠正由信道中的噪声引起的错误。这与第 3 章中讨论的信源编码不一样。信源编码的目的是从信源中提取主要的信息并将其编码为数字形式，以便用数字技术有效地存储和传输这些信息。

选择采用 ARQ 或 FEC 技术中的哪一种取决于具体的应用场合。ARQ 技术通常在计算机通信系统中采用，因为这种技术实现起来比较经济。而且在计算机通信系统中，通常有双工(双向)信道，这样接收端在收到正确数据后能够通过反向信道发回确认(ACK)信号，而在收到错误数据后能够通过反向信道发回重发请求(NAC)信号。FEC 技术用来纠正单工(单向)信道中发生的错误，单工信道不能给发端回传 ACK/NAC(ARQ 技术中需要)信号。FEC 技术适合用在长传输时延的系统中。这种系统如果采用 ARQ 技术的话，数据的有效速率会很低，因为这时发射端在等待由于系统的传输时延而晚到的 ACK/NAC 信号的过程中，会有一个长的空置时间。下面将主要讨论 FEC 技术。

采用 FEC 技术的通信系统如图 1.4 所示，图中标出了编码和译码模块。编码时在数据流中加入额外(冗余的)的比特位，这样接收端的译码器就能减少或纠正错码。但是，额外加入的比特位会提高数据速率(bps)，从而增加编码信号的带宽。

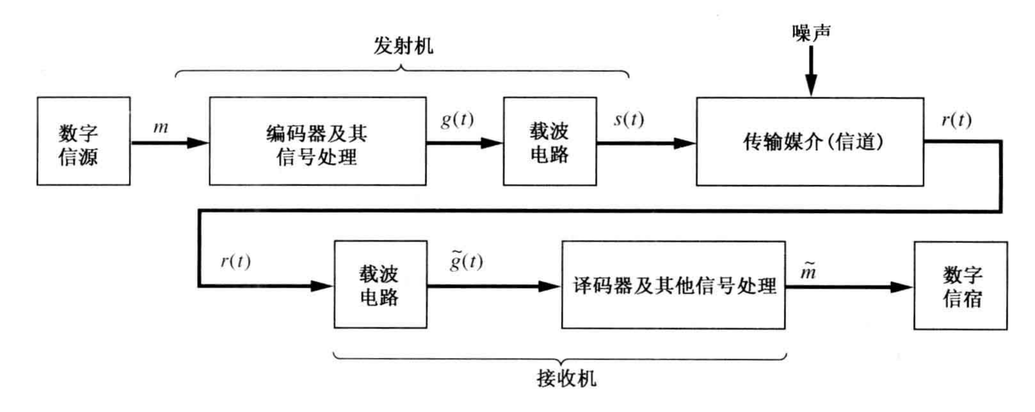


图 1.4　数字通信系统的一般模型

编码可以分为两大类:

- 分组码。分组码编码时,是把输入的 k 位二进制符号变为 n 位的二进制符号输出,因而分组编码器是无记忆器件。由于 $n>k$,因此分组码中加入了冗余比特位,如奇偶校验位。译码器用这些冗余位来发现并纠正错码。分组码记为(n,k)码。编码效率 R① 定义为 $R=k/n$。实际系统中,R 的取值在 1/4 ~ 7/8 之间,k 的取值在 3 ~ 几百之间[Clark 和 Cain,1981]。
- 卷积码。卷积码是由具有记忆功能的卷积编码器产生的。卷积编码器将输入的 k 位二进制符号变为 n 位的二进制符号输出。输出的 n 位二进制符号由 $v+k$ 位的输入二进制符号确定。编码器的记忆功能体现在 $v>0$ 上。编码效率 R 为 $R=k/n$。k 和 n 的典型值在 1 ~ 8 之间,v 的取值在 2 ~ 60 之间。R 的取值范围在 1/4 ~ 7/8 之间[Clark 和 Cain,1981]。编码效率 R 的取值小意味着编码时加入的冗余度大,这会提高译码器的纠错能力,但也付出了增加信号带宽的代价。

1.11.1 分组码

在开始讨论分组码之前,需要明确几个定义。码字的汉明权重是指码字中"1"码的数目。例如,码字"110101"的汉明权重为4。两个码字之间的汉明距离记为 d,是指它们对应的码位上不同码元的个数。例如,码字"110101"与"111001"之间的汉明距离为 2。由接收到的码字可以检测错误。如果满足 $d \geqslant s+t+1$,那么就可以检测和纠正一些错码,其中,s 为可以检测到的错码个数,t 为可以纠正的错码个数($s \geqslant t$)。因而,当满足 $d \geqslant 2t+1$ 时,就可以检测并纠正 t 个或少于 t 个的错码。一般的码字可用下面的形式来表示:

$$i_1 i_2 i_3 \cdots i_k p_1 p_2 p_3 \cdots p_r$$

其中,k 为信息比特的位数,r 为奇偶校验比特的位数,$n=k+r$ 为(n,k)分组码的总码长。这种信息比特在前、奇偶校验比特在后的码字结构是最常见的,具有这种结构的分组码称为系统码。还有奇偶校验比特位于信息比特之间的码字结构,这种结构的分组码通常认为具有和系统码相同的性能。

汉明提出了一种设计具有纠正单个错码能力的分组码的方法[Hamming,1950]。汉明分组码的汉明距离为 3,满足 $d \geqslant 2t+1$,$t=1$,因此可以检测并纠正 1 个错码。但是,只有满足特定条件的(n,k)分组码才是汉明码。这些分组码是

$$(n,k)=(2^m-1, 2^m-1-m) \tag{1.11}$$

式中,m 为整数,且 $m \geqslant 3$。因此汉明码有(7, 4),(15, 11),(31, 26),(63, 57)和(127, 120)等。m 值增大时,编码效率 R 的值接近为 1。

除了汉明码以外,还有许多其他类型的分组码,循环码就是其中的一类。循环码是一种特殊的分组码,循环码中的任一码字循环移位后可以得到循环码的另一个码字。这种码的优点是编码简单,并且编码器可以用廉价的带反馈的线性移位寄存器来实现。循环码的译码也容易实现。循环码及与循环码相关的码有 Bose-Chaudhuri-Hocquenhem(BCH)码、Reed-Solomon 码、Hamming 码、maximal-length 码、Reed-Müller 码和 Golay 码等。表 1.3[Bhargava,1983]中给出了分组码的一些性质。

---

① 注意不要将编码效率(单位为比特/比特)与数据速率或信息速率(单位为 bps)混淆。

表 1.3　分组码的性质

性　质	编　码[a]			
	BCH	Reed-Solomon	Hamming	Maximal-Length
分组长度	$n=2^m=1$ $m=3,4,5,\cdots$	$n=m(2^m-1)$ 比特	$n=2^m-1$	$n=2^m-1$
校验位长度		$r=m2t$ 比特	$r=m$	
最小码距	$d\geqslant 2t+1$	$d=m(2t+1)$ 比特	$d=3$	$d=2^m-1$
信息位长度	$k\geqslant n-mt$			$k=m$

[a] 在没有特别说明时，m 为正整数，n 为分组码长度，k 为信息位长度。

1.11.2　卷积码

卷积编码器如图 1.5 所示。这里，每次输入 k 个比特(一个输入帧)，输出 n 个比特(一个输出帧)，$n>k$。即每 k 个比特的输入帧产生 n 个比特的输出帧。因为 $n>k$，所以编码时产生了冗余。此外，输出帧还与前 K 个($K>1$)输入帧有关，因此编码器具有记忆功能。编码效率 $R=k/n$，图中的编码器效率为 3/4。约束长度 K，是保留在 kK 位移位寄存器中的输入帧的帧数。① 卷积编码时，来自 kK 位移位寄存器中的数据比特进行模 2 加运算后，产生 n 位比特的输出码。

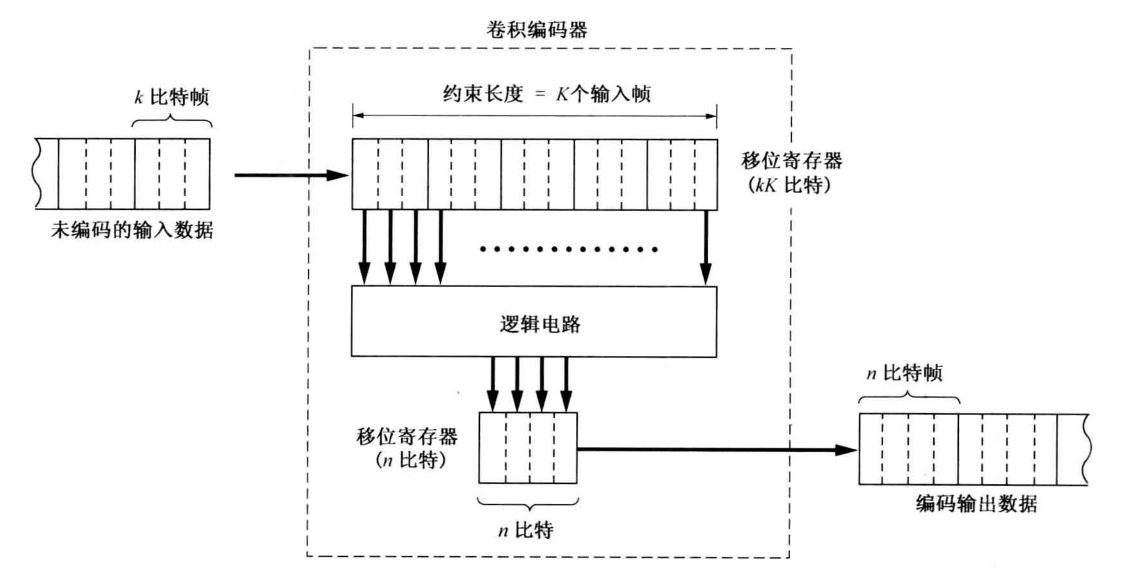


图 1.5　卷积编码器($k=3$，$n=4$，$K=5$ 及 $R=3/4$)

作为例子，考察一下图 1.6 所示的卷积编码器。图中 $k=1$，$n=2$，$K=3$，两级输出移位寄存器用具有两个输入端的转换开关代替。每输入一位信息比特，转换开关旋转一次，产生两位输出比特。对连续输入的信息比特重复以上过程就得到卷积码输出。本编码器中，一个输入比特产生两个输出比特，因此编码效率为 $R=k/n=1/2$。图 1.6 所示的卷积编码器产生的码序列可以用图 1.7 所示的码树来表示。使用码树时，当输入比特位为“0”时，取上一支路；当输入比特位为“1”时，取下一支路。圆括号中的码序列即为编码器的输出序列。例如，设输入的序列为 $x_{11}=1010$(序列按从左到右的顺序进入编码器)，由图 1.7 中码树的路径图可以看出，对应的输出序列为 $y_{11}=11010001$。

① 约束长度在其他文献[Blahut,1983；Clark and Cain,1981；Proakis，1995]中有不同的定义。

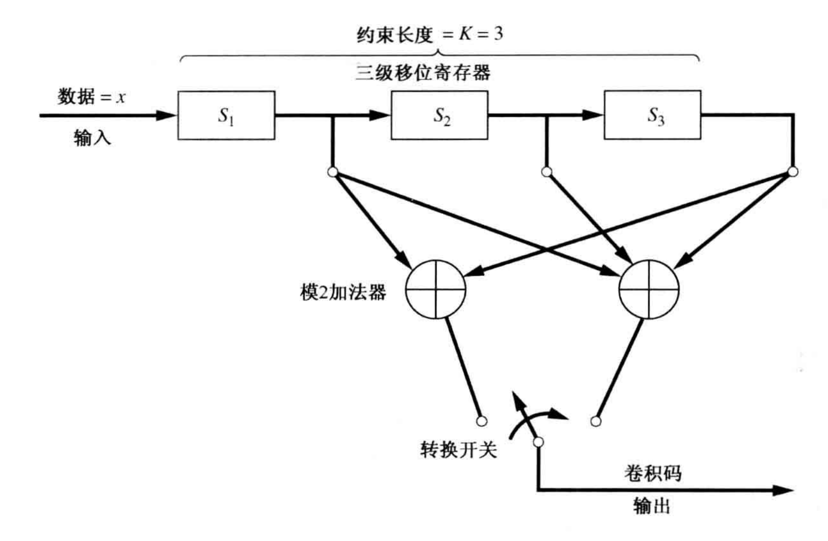


图 1.6 编码效率为 1/2，约束长度为 3 的卷积编码器

$x_1 = 0000$ $y_1 = 00000000$
$x_2 = 0001$ $y_2 = 00000011$
$x_3 = 0010$ $y_3 = 00001101$
$x_4 = 0011$ $y_4 = 00001110$
$x_5 = 0100$ $y_5 = 00110111$
$x_6 = 0101$ $y_6 = 00110100$
$x_7 = 0110$ $y_7 = 00111010$
$x_8 = 0111$ $y_8 = 00111001$
$x_9 = 1000$ $y_9 = 11011100$
$x_{10} = 1001$ $y_{10} = 11011111$
$x_{11} = 1010$ $y_{11} = 11010001$
$x_{12} = 1011$ $y_{12} = 11010010$
$x_{13} = 1100$ $y_{13} = 11101011$
$x_{14} = 1101$ $y_{14} = 11101000$
$x_{15} = 1110$ $y_{15} = 11100110$
$x_{16} = 1111$ $y_{16} = 11100101$

路径 A

图 1.7 图 1.6 所示的卷积编码器的码树结构

卷积码译码时，是通过在编码树的路径图中选择与接收序列最接近的路径来实现的。在序列译码(一种次优译码技术)方式中，路径的选择方法就像是一个经常在岔路口转错方向的司机在发现错误后，退回来，又重新去试另一条道路一样。例如，如果收到序列为 $y_{11}=11010001$，那么图中的路径 A 与序列最接近，因此译码器的输出应该为 $x_{11}=1010$。如果信道中有噪声存在，接收到的序列发生了错误，那么所选的路径与接收序列就不是最接近的。这时，就选择路径序列与接收序列之间有最小汉明距离的那条路径。

卷积码的最优译码算法是维特比译码，它的译码过程和序列译码过程相似。不过维特比译码时，是先分析可能的多条路径，然后在条件概率的基础上选择其中一条最佳路径[Forney, 1973]。维特比译码过程可以采用软判决或硬判决来实现。软判决算法中，首先根据"判断统计值"①是大于还是小于判决门限确定一个结果，然后给出一个指定"判断统计值"与门限值有多接近的"信任"数。

在硬判决过程中，仅知道判决的结果而并不知道判决的过程(因为"判断统计值"与判决门限几乎相等)。与硬判决过程相比，软判决时接收端所需的 E_b/N_0 改善了(减小)2 dB[Clark 和 Cain, 1981]。E_b 是单位比特时间内接收的信号能量，$N_0/2$ 是接收机输入端的信道噪声功率谱密度(PSD)。E_b 和 N_0 的详细定义将在后面的章节中给出[例如，可参见式(7.24b)或式(8.44)]。

1.11.3　交织码

在前面的讨论中，我们假设：如果没有采用信道编码技术，那么由信道噪声引起的接收端的误码是随机发生的，这些误码是离散出现的(即不产生相邻的误码)。当采用信道编码技术时，编码中引入的冗余度使得接收端的译码器可以纠正错码，从而保证译码器的输出几乎是无误码的数据序列。但是在有些应用场合，信道中会出现强度大、持续时间长的脉冲噪声。在这种情况下，如果系统采用的是一般的信道编码技术，那么系统中将会出现突发性错误，这是因为脉冲噪声的持续时间比编码信号的"冗余时间"还长。这种突发性错误可以通过交织编码来减少。

交织的过程是发射端对编码后的码元在若干个分组码长(对分组码而言)或几个约束长度(对卷积码而言)的时间段内进行搅乱(即像洗牌一样地搅乱)。交织所需的时间段是噪声脉冲宽度的若干倍。接收端在译码之前，先对发生了突发错误的接收码元解交织，得到误码分散的编码信号，再将这些编码信号通过译码器进行纠错。这样就能得到几乎无误的输出，甚至当噪声脉冲出现在接收机的输入端时也是如此。交织器的类型有两种：分组交织器和卷积交织器[Sklar,1988]。

1.11.4　编码性能

采用编码技术能够改善数字通信系统的性能，如图1.8所示。设接收机的输入端为数字信号与信道噪声的混合物。图中示出了二进制相移键控(BPSK)系统在采用了编码技术和不采用编码技术时的系统性能。正如在第7章推导的并由式(7.38)描述的那样，不采用编码技术情况下的系统性能，是接收端在使用了最佳检测电路(匹配滤波器)的条件下得到的。采用编码技术情况下的系统性能，是在使用(23, 12)Golay 码的条件下得到的。P_e 是接收机输出端的比特错误概率，也称为误比特率(BER)。E_b/N_0 为接收机输入端的单位比特信号能量与噪声密度之比(正如在前一节描述的那样)。当 $E_b/N_0=7$ dB 时，由图1.8可以看出，未编码情况下的 BER 为 10^{-3}，编码情况下的 BER 下降为 10^{-5}。

① "判断统计值"是在特定的时间间隔内，接收机根据输入值计算出的一个量[见式(7.4)]。

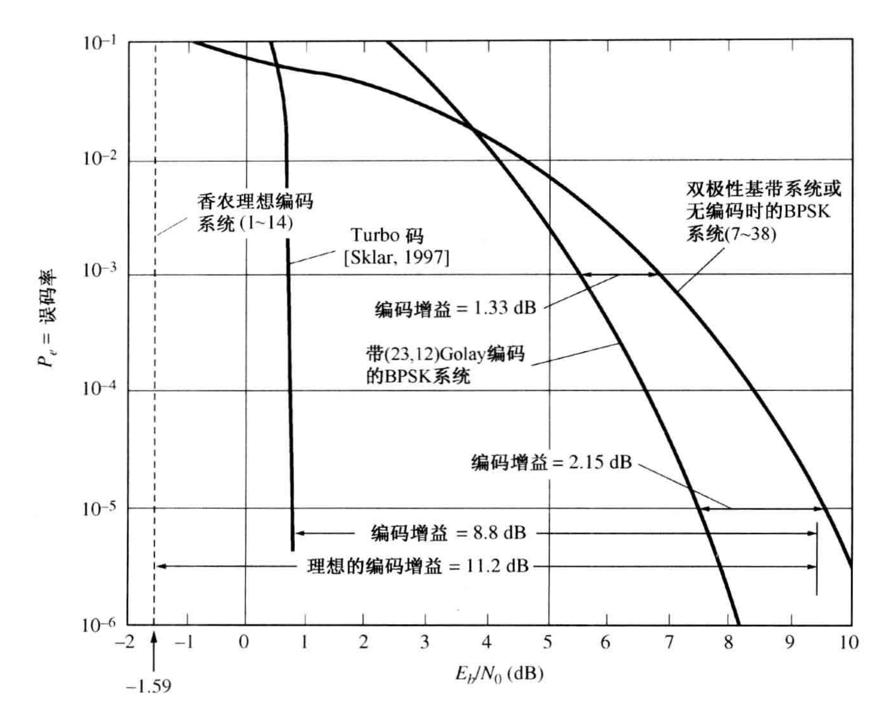


图 1.8 编码和未编码时数字系统的性能

编码增益定义为，在给定某一特定的 P_e 值的条件下，编码情况与未编码情况相比所需的 E_b/N_0（dB 值）的下降值。例如，从图 1.8 可以看出，BER 为10^{-3}时获得了 1.33 dB 的编码增益。BER 减小时，编码增益会增大。因此，当 BER 为10^{-5}时，编码增益为 2.15 dB。这种改善对空间通信系统意义重大，因为在那样的场合每一个分贝的改善都是宝贵的。此外，从图中还可以看出，存在一个编码门限，当 E_b/N_0 的值小于该门限时，编码系统的性能比未编码系统的性能还差。本图中，编码门限值大约为 3.5 dB。所有的编码系统中都存在着编码门限。

对于最佳编码系统，由香农的信道容量定理，即式(1.10)，可以得到系统所需的值。也就是说，如果信息速率低于信道容量，即使信道中有噪声，最佳编码系统也能使接收端的误比特率 $P_e \to 0$（即$10^{-\infty}$）。下面我们将找出最佳(未知的)编码时，在 $P_e \to 0$ 的条件下，系统所需的 E_b/N_0 值。假设最佳编码信号的带宽不受限，那么由式(1.10)可得

$$C = \lim_{B\to\infty}\left\{B\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)\right\} = \lim_{B\to\infty}\left\{B\log_2\left(1+\frac{E_b/T_b}{N_0 B}\right)\right\}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left\{\frac{\log_2[1+(E_b/N_0 T_b)x]}{x}\right\}$$

式中，T_b 为发送 1 比特信息所需的时间，N 为信号带宽内的噪声功率。功率谱密度(PSD)为 $\mathcal{P}_n(f) = N_0/2$，那么，正如第 2 章中讨论的那样，噪声功率为

$$N = \int_{-B}^{B}\mathcal{P}_n(f)\mathrm{d}f = \int_{-B}^{B}\left(\frac{N_0}{2}\right)\mathrm{d}f = N_0 B \tag{1.12}$$

式中，B 为信号的带宽。利用 L'Hospital 准则求解以上的极限值，得到

$$C = \lim_{x \to 0} \left\{ \frac{1}{1 + (E_b/N_0 T_b)x} \left(\frac{E_b}{N_0 T_b} \right) \log_2 e \right\} = \frac{E_b}{N_0 T_b \ln 2} \tag{1.13}$$

如果我们以接近信道容量的速率传输信息，而且 $P_e \to 0$，那么这个传输速率就是最大信息速率（即最佳系统）。因此，有 $1/T_b = C$，代入式(1.13)得

$$\frac{1}{T_b} = \frac{E_b}{N_0 T_b \ln 2}$$

或

$$E_b/N_0 = \ln 2 = -1.59\,\text{dB} \tag{1.14}$$

上式中得到的 E_b/N_0 的最小值为 -1.59 dB，这个值称为香农极限。也就是说，如果在发射端和接收端采用最佳的编码和解码技术的话，那么只要接收机输入端的 E_b/N_0 值大于 -1.59 dB，系统就可以进行无误的信息传输。图1.8中用虚线示出了这个像“砖墙”一样的极限值。当 E_b/N_0 的值小于 -1.59 dB 时，理想编码系统的误比特率 P_e 从 0($10^{-\infty}$)增加到 $\frac{1}{2}(0.5 \times 10^0)$。实际通信系统的性能都会比香农极限描述的理想系统的性能差。因此，数字通信系统的设计就是寻找接近香农理想(未知的)编码性能的好码。

从图1.8可以看出，最佳编码系统与未采用编码技术的 BPSK 系统(BER 为 10^{-5})相比，系统的编码增益为 9.61 - (-1.59) = 11.2 dB。当采用 Turbo 码时，系统的编码增益为 8.8 dB。表1.4给出了系统采用其他编码方式时获得的编码增益。

Turbo 码的性能接近香农极限，并且译码也不复杂[Sklar,1997]，因此自1993年首次被提出以来就非常流行。Turbo 码编码器由两个简单的卷积码编码器并行连接而成，其中一个卷积码编码器连接之前通过了一个交织器[Benedetto 和 Montorsi，1996]。交织器的作用是保证接收到的码字中容易发生错误的码元与另一码字中不容易发生错误的码元相对应。

表1.4 编码增益(与双极基带系统、BPSK 或 QPSK 相比)

采用的编码技术	编码增益(dB)(BER 为10^{-5})	编码增益(dB)(BER 为10^{-8})	数据速率
理想编码	11.2	13.6	
Turbo 码[Sklar,1997]	8.8		
Reed-Solomon 码与卷积码的级联(维特比译码)[a]	6.5 ~ 7.5	8.5 ~ 9.5	适中
序列译码时的卷积码(软判决)	6.0 ~ 7.0	8.0 ~ 9.0	适中
分组码(软判决)	5.0 ~ 6.0	6.5 ~ 7.5	适中
Reed-Solomon 码与分组短码的级联[a]	4.5 ~ 5.5	6.5 ~ 7.5	非常高
维特比译码的卷积码	4.0 ~ 5.5	5.0 ~ 6.5	高
序列译码时的卷积码(硬判决)	4.0 ~ 5.0	6.0 ~ 7.0	高
分组码(硬判决)	3.0 ~ 4.0	4.5 ~ 5.5	高
门限译码时的分组码	2.0 ~ 4.0	3.5 ~ 5.5	高
门限译码时的卷积码	1.5 ~ 3.0	2.5 ~ 4.0	非常高

[a]发射端使用两种不同的编码器级联(见图1.4)，接收端使用相应的译码器。
资料来源：Bhargava[1983]和[Sklar,1997]。

以上讨论的各种编码系统中，编码增益都是以增加带宽为代价获得的。也就是说，为了获得编码增益，必须引入冗余比特，从而提高了数据速率，因而增加了信号的带宽。编码后的信号带宽是未编码信号的带宽与编码效率倒数的乘积，即编码后的信号带宽与未编码信号的带宽之比为 $1/R = n/k$。因此，如果未编码信号占用了所有可用的带宽的话，就不能再进行信道编码

来减少接收端的误码了，因为这时编码信号的带宽将会超出系统提供的带宽。这个问题可以采用格码调制(TCM)技术来解决。

1.11.5 格码调制

格码调制(TCM)技术是由 Gottfried Ungerboeck 发明的。这种将多电平调制与信道编码相结合的技术，可以在不增加信号带宽的条件下，获得编码增益[Benedetto, Mondin, Montorsi, 1994; Biglieri, Divsalar, McLane 和 Simon, 1991; Ungerboeck, 1982, 1987]。这种技术的巧妙之处在于通过增加数字调制信号的电平数引入冗余比特，而不改变脉冲的宽度(如果脉冲宽度不变，那么信号的带宽也不会改变，因为信号的带宽与脉冲宽度的倒数成正比)。这种称为多进制信号传输的技术将在第 3 章的 3.4 节中介绍。例如，图 3.14(a)中为 $L=4$ 的多进制数字传输脉冲，每个脉冲携带有 2 比特的信息量，如表 3.3 所列。现在将 2 比特的信息位增加一位冗余比特来表示 8 种脉冲电平，但保持脉冲的宽度不变，因此信号的带宽没有增加。这样，由于编码引入的冗余比特并没有使信号的带宽增加。这个概念能推广到 5.10 节最后部分讨论的复数多进制信号的传输系统中。总之，TCM 是在不增加编码信号带宽的基础上，将调制与编码设计相结合的一种技术。

当编码方式是约束长度为 $K=3$ 的卷积编码时，采用 TCM 技术的系统与具有相同的带宽和信息速率的未编码系统相比，获得的编码增益为 3 dB。当卷积编码的约束长度为 9 时，获得的编码增益几乎为 6 dB。约束长度更大的卷积编码并不难产生，不过对应的卷积译码器电路非常复杂。但使用速度非常高的集成电路(VHSIC)可以解决这个问题。

在速率为 9600 bps 的 CCITT V.32、速率为 14 400 bps 的 CCITT V.33 及速率为28 800 bps的 CCITT V.34 等系列的计算机调制解调器中采用了 TCM 技术。其中 CCITT V.32 系列的调制解调器的编码增益为 4 dB。这在 Wei 的论文中的例题 4 里有讨论[Wei, 1984; CCITT 研究小组 XVII, 1984]。

关于编码更详细的研究内容，读者可以参阅以下优秀著作:[Blauhut, 1983; Clark 和 Cain, 1981; Gallagher, 1968; Lin 和 Costello, 1983; McEliece, 1979; Peterson 和 Weldon, 1972; Sweeney, 1991; Viterbi 和 Omura, 1979]。

1.12 展望

由前面的讨论可以看出，为了理解并设计通信系统，必须有一些基本的工具。这些工具主要是各种用来表示信号、噪声和线性系统的数学模型。第 2 章中将讨论这些内容，包括信号和噪声的性质、傅里叶变换和频谱、信号的正交表示、带限表示及线性系统的描述等内容。此外，第 2 章还对带宽的度量进行了定义。

1.13 助学例题

SA1.1 视线距离(LOS)的计算 设电视(TV)台天线位于 1500 英尺高的发射塔顶端，如果接收天线(位于覆盖边缘)的高度为 20 英尺，试计算电视台视线距离(LOS)的覆盖范围。

解: 利用式(1.6)，可以求出电视发射天线对应的视线距离为

$$d_1=\sqrt{2h}=\sqrt{2(1500)}=54.8\text{英里}$$

接收天线对应的视线距离为

$$d_2=\sqrt{2(20)}=6.3\text{英里}$$

因此，总的 LOS 覆盖范围是半径为

$$d = d_1 + d_2 = 61.1\text{英里}$$

的圆形区域(以发射塔为中心)。

SA1.2 信息速率 一部按键电话机上有 9 个数字键(0～9)及"*"和"#"字键。设发射"*"和"#"的概率各为 0.005，发射 0～9 的概率都为 0.099。如果以 2 个键/秒的速度按压电话，试计算信息速率。

解：利用式(1.8)，可以得到

$$H = \Sigma P_j \log_2\left(\frac{1}{P_j}\right)$$

$$= \frac{1}{\log_{10}(2)}\left[10(0.099)\log_{10}\left(\frac{1}{0.099}\right) + 2(0.005)\log_{10}\left(\frac{1}{0.005}\right)\right]$$

或

$$H = 3.38\text{比特/键}$$

再利用式(1.9)，其中的 $T = 1/(2\text{ 键/秒}) = 0.5$ 秒/键，代入式中得到

$$R = \frac{H}{T} = \frac{3.38}{0.5} = 6.76\ \text{bps}$$

SA1.3 最大电话线传输速率 某计算机用户计划购买一台速度更快的调制解调器以便在模拟电话线上传输数据。设电话线上的信噪比(SNR)为 25 dB，传输的音频信号范围为 300～3200 Hz。试计算在这条电话线上进行无误数据传输时的最高速率。

解：根据功率的比值，SNR 为 $S/N = 10^{(25/10)} = 316.2$(见第 2 章中关于 dB 的定义)。电话线提供的带宽为 3200 - 300 = 2900 Hz。利用式(1.10)，可以得到

$$R = B\log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right) = 2900[\log_{10}(1 + 316.2)]/\log_{10}(2)$$

或

$$R = 24\,097\ \text{bps}$$

因此，速度为 28.8 kbps 的调制解调器不能在该条电话线上使用。但是，速度为 14.4 kbps 的调制解调器能够在这条电话线上无误地进行数据传输。

习题

1.1 假设地球的地形是相对平坦的，但有一座相对平均地形高度为 800 英尺的山。试问一个高度为 100 英尺的小区铁塔最远应当位于此山多远处，才能保障覆盖站在此山顶上的人的手机信号？

1.2 设有一工作频率为 96.9 MHz 的大功率 FM 广播电台，天线高度为 1000 英尺，如果想在 55 英里以外的地方收听该广播，试问应架设多高的接收天线？

★ 1.3 利用几何知识，证明式(1.6)成立。

1.4 设计一个地面微波系统，设发射天线和接收天线放置在相同高度的铁塔顶端，收发之间的距离为 25 英里。试计算视线(LOS)传播时所需的最低铁塔高度。

1.5 设蜂窝电话系统中，小区的基站天线位于 100 英尺高的铁塔顶端，蜂窝电话用户的天线高度为 4 英尺。试计算该小区基站视线传播的覆盖半径。

★ 1.6 设数字信源发送 -1.0 V 和 0.0 V 电平的概率分别为 0.2，发送 +3.0 V 和 +4.0 V 电平的概率分别为 0.3。试计算该信源的平均信息量。

1.7 利用恒等式 $\log_2(x) = [1/\log_{10}(2)]\log_{10}(x)$，证明以 10 为底的对数可以转换为以 2 为底的对数。

1.8 如果信源以相同的概率发送所有的消息(即 $P_j = P$)，证明式(1.8)中 H 值可简化为 $H = \log_2(1/P)$。

★ 1.9 对二进制信源:

(a)证明当发送二进制码元“1”的概率和发送二进制码元“0”的概率相同时，信源熵最大。

(b)试求最大的信源熵。

★ 1.10 设有一位数字的七段液晶显示(LCD)屏，发送数字0的概率为0.25，发送数字1和2的概率分别为0.15，发送数字3、4、5、6、7和8的概率为分别为0.07，发送数字9的概率为0.03。试计算该信源的平均信息量。

1.11 (a)设二进制信源发送“1”码的概率为0.3。试计算该信源的平均信息量。

(b)对二进制信源，要求信源的平均信息量最大，试求发送“1”码和“0”码的概率各为多少?

★ 1.12 设数字键盘上有数字0、1、2、3、4、5、6、7、8和9，发送任一数字的概率都相同。试问应以多快的速率发送数字，才能达到3 bps的信息速率?

1.13 参考例题1.3，系统中传输的是由12位长的数字组成的消息，每位数字以相同的概率取两种可能的电平。假设有一半的消息发送的概率为$\left(\frac{1}{2}\right)^{13}$，另一半的消息发送的概率为$3\left(\frac{1}{2}\right)^{13}$。试求该信源熵。

1.14 设电传打字机信道带宽为300 Hz，信噪比为30 dB。试求该信道容量。

★ 1.15 假设计算机的终端键盘上有110个字符，每个字符用二进制码元来表示。

(a)每个字符需要用几位二进制码元来表示?

(b)在一条带宽为3.2 kHz，信噪比(SNR)为20 dB的电话线路上，能以多快的速度(字符/秒)发送字符?

(c)如果以相同的概率发送每个字符，试求每个字符包含的信息量。

1.16 设有一条模拟电话线路，信噪比(SNR)为45 dB，传输的音频信号范围为300~3200 Hz。现设计一个调制解调器用来在该电话线路上无误地发送和接收数字信号(即双工方式)。

(a)如果在300~1200 Hz的频率范围发送信号，试求最大的发送数据速率。

(b)如果在1500~3200 Hz的频率范围接收信号，试求最大的接收数据速率。

(c)如果在整个300~3200 Hz的频率范围同时发送和接收信号(使用混合电路，见第8章中的图8.4)，试求最大的发送和接收数据速率。

1.17 根据卷积编码的相关定义，画出编码效率$R=2/3$，约束长度$K=3$的卷积编码器的结构框图。

★ 1.18 设卷积编码器的结构如图P1.18所示。试计算当输入数据为$x=[10111]$时，编码器的输出数据。(**x**行矢量最左边的元素是第一个进入编码器的比特。)

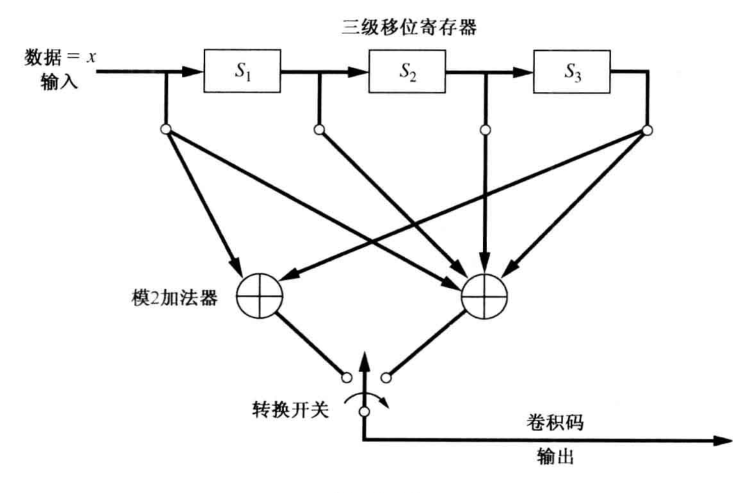


图 P1.18

第 2 章　信号与频谱

本章要点

- 信号的基本特性(直流分量、均方根值、dBm 及功率)
- 傅里叶变换与频谱
- 线性系统与线性失真
- 带限信号与抽样
- 离散傅里叶变换
- 信号带宽

2.1　信号与噪声的特性

通信系统中，接收到的波形通常分为两部分：包含信息的想要部分和外来的或不想要的部分。想要的部分称为信号，不想要的部分称为噪声。

本章将从确定波形的角度出发，导出用来描述信号与噪声的数学工具(第 6 章中给出了随机波形的分析方法)。波形可以用数学表达式直接表示，或用正交级数(如傅里叶级数)来表示。本章中还将研究波形的基本特性，如直流分量、均方根值(RMS)、归一化功率值、振幅频谱、相位频谱、功率谱密度以及带宽等。此外，还将讨论线性滤波的效果。

讨论的波形可以是电压时间函数 $v(t)$ 或电流时间函数 $i(t)$。通常，对这两种波形进行分析的数学方法是相同的。因此，为使分析具有一般性，将用 $w(t)$ 来简单地表示这些波形。

2.1.1　物理可实现波形

实际的物理可实现波形(即可在实验室测量到的波形)满足以下条件：①

1. 波形在限定的时间段内有较大的非零幅度值。
2. 波形的频谱在限定的频段内有较大的非零频谱值。
3. 波形是连续的时间函数。
4. 波形的峰值是有限的。
5. 波形的值仅为实数。也就是说，任何时候波形的值都不能为复数 $a+jb$，其中 b 为非零值。

第一个条件是必需的，因为系统及系统中的波形只在一定的时间段内存在，而且信号的能量也是有限的。由于传输信号的媒介，如导线、同轴电缆、波导或光纤的带宽是有限的，因此，第二个条件也是必需的。第三个条件是第二个条件的必然结果，这点将会在 2.2 节的频谱分析中清楚地看到。要满足第四个条件是因为如果器件中的电压或电流值为无穷大的话，将会损坏实际的物理器件。第五个条件成立是基于这样的事实，即在现实世界中只能观察到实波形，尽

---

① 有关第一个条件和第二个条件有趣的讨论，参见 Slepian[1976]。

管信号的频谱可能是复数。在第4章的讨论中将会看到，复数信号在表示带通型的实信号时非常有用。

为了简化数学分析过程，常常使用不满足以上所列的某些或全部条件的数学模型。但是只要数学模型选择得合适，就可以从分析结果中得出正确的结论。例如，考察图2.1所示的数字波形，可以看出，其中作为数学模型来分析的数字波形在转换时刻不连续。这不满足第三个条件，而实际的波形是连续的。实际的波形是时限的(即在 $t = \pm\infty$ 之前衰减为零)，而数学模型波形的持续时间为无穷长。

换句话说，数学模型是假设实际的波形以稳态条件持续无穷长的时间。对数学模型进行频谱分析，除了在非常高的频率位置外，将会得到接近正确的结果。由数学模型计算出的平均功率和在适当的时间间隔内测得的实际波形的平均功率是相同的。由于数学模型信号的持续时间无穷长，因此信号的能量为无穷大，但是实际波形的能量是有限的。因而，该模型在没有利用实际波形的一些附加信息时，不能正确地确定实际波形的能量。但是，在某些确定的时间段内，数学模型是可以用来计算实际波形能量的。数学模型信号的功率是有限的(能量无限)，这种信号称为功率信号，实际波形的能量是有限的，这种信号称为能量信号。(有关功率信号与能量信号的数学定义将在后面的章节中给出。)虽然一般使用功率信号的数学模型来简化分析过程，但实际的信号都为能量信号。

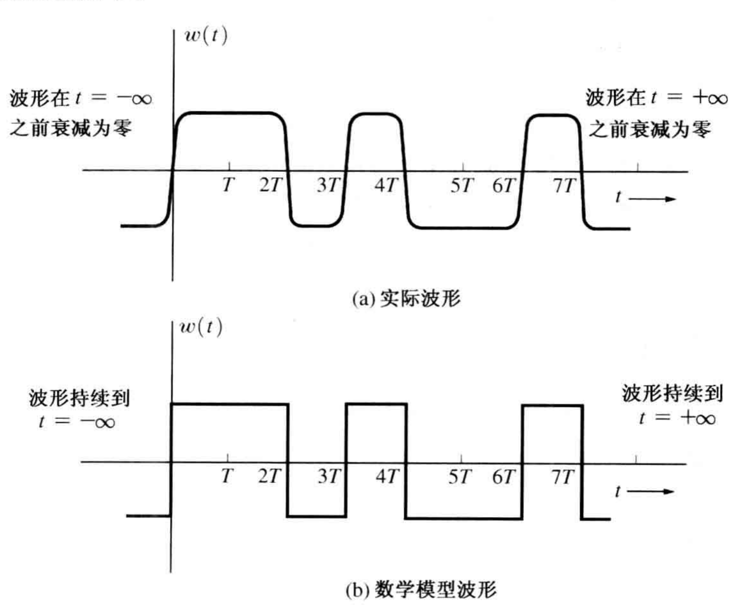


图2.1 实际波形与数学模型波形

总之，波形通常可以按以下的方式分类：信号或噪声、数字的或模拟的、确定的或不确定的、物理可实现的或物理不可实现的以及功率型或能量型的。其他的分类方法(如周期型或非周期型)将在下一节给出。

2.1.2 时间平均运算

波形的一些有用特征包括直流(DC)分量、平均功率及均方根值(RMS)等。在复习这些概念之前，有必要给出“时间平均运算”的定义。

定义　所谓时间平均运算是指由下式给出的一种运算：①

$$\langle[\cdot]\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} [\cdot]\,\mathrm{d}t \tag{2.1}$$

由式(2.1)可以看出，两个波形之和的时间平均运算等于它们各自的时间平均运算之和，因此，时间平均运算是一种线性运算过程：②

$$\langle a_1 w_1(t) + a_2 w_2(t)\rangle = a_1\langle w_1(t)\rangle + a_2\langle w_2(t)\rangle \tag{2.2}$$

如果波形是周期的，则式(2.1)可以简化为式(2.4)的形式。

定义　如果波形 $w(t)$ 满足下式，就称 $w(t)$ 是周期信号，周期为 T_0。

$$w(t) = w(t + T_0) \quad \text{对所有的} t \tag{2.3}$$

其中，T_0 是满足上式的最小正数。③

例如，频率为 $f_0 = 1/T_0$ 赫兹的正弦信号满足式(2.3)，因此它是周期信号。从周期信号的定义可以清楚地看出，周期信号在所有的时间域内($-\infty$ ，$+\infty$)都有值。因此，实际的波形不可能为真正的周期信号，但是它在一定的时间段内是具有周期性的。即实际的波形只在一定的时间段内(而不是在所有的时间域内)满足式(2.3)。

定理　如果波形是周期性的，那么时间平均运算过程可以用下式表示：

$$\langle[\cdot]\rangle = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2+a}^{T_0/2+a} [\cdot]\,\mathrm{d}t \tag{2.4}$$

式中，T_0 是波形的周期，a 是任意的实常数，它可以取为零。

式(2.4)可以由式(2.1)容易地得到。由式(2.1)可以看出，对周期信号来说，在连续的 T_0 时间段内，式(2.1)的积分值是相同的，因为被积波形是周期波形，周期为 T_0。这样时间平均值在每个周期内是相同的，等于信号在一个周期内的积分值与周期 T_0 之比。

总之，式(2.1)可用来计算任意类型波形的时间平均值，不管它是否为周期信号，而式(2.4)只适用于求周期信号的时间平均值。

2.1.3　直流分量

定义　波形 $w(t)$ 的 DC(直流)分量为波形的时间平均值 $\langle w(t)\rangle$。

即

$$W_{\mathrm{dc}} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} w(t)\,\mathrm{d}t \tag{2.5}$$

对任意的实际波形来说，我们真正感兴趣的是计算某一特定时间段内(如 $t_1 \sim t_2$)的直流分量。因此，信号的 DC 值为

$$\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} w(t)\,\mathrm{d}t$$

但是，我们如果使用具有无穷时长的稳态波形的数学模型来分析的话，则利用式(2.5)的

① 附录 B 中，定义了集平均运算过程。

② 关于线性的定义，见式(2.130)。

③ 有些作者把非周期波形也称为无周期的波形。

定义，求 $T \to \infty$ 时的极限值就会得到正确的结论。此外，在第6章中将会证明，对满足各态历经性的随机波形来说，时间平均运算 $\langle[\cdot]\rangle$ 可以用集平均运算 $\overline{[\cdot]}$ 来代替。

2.1.4 功率

在通信系统中，当接收到的信号(平均)功率与噪声(平均)功率相比足够大时，信息才能被恢复。这个概念体现在了香农的信道容量公式，即式(1.10)中。因此，平均功率是一个必须理解的重要概念。在物理学中，我们知道，功率是单位时间内所做的功，电压是单位电荷所做的功，电流是单位时间内的电荷量。这些是在电系统中对功率进行定义时的基础。

定义 如图2.2所示的电路中，设 $v(t)$ 为电路两端的电压，$i(t)$ 为流入电路中的电流。那么该电路消耗的瞬时功率(增量功与增量时间之比)为

$$p(t) = v(t)i(t) \tag{2.6}$$

当瞬时功率 $p(t)$ 为正值时，表明电路消耗功率；而当瞬时功率 $p(t)$ 为负值时，表明电路将产生功率。

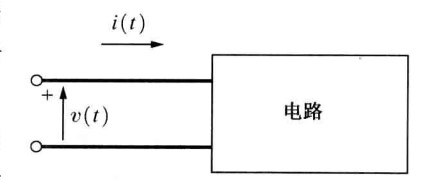


图2.2 约定极性的电压与电流

例题2.1 瞬时功率

设电路中有峰值为5 A的正弦电流和峰值为10 V的正弦电压，试画出电路消耗的瞬时功率以时间为自变量的函数图。解题过程及结果参阅并运行M文件 Example2_01.m。

定义 平均功率为

$$P = \langle p(t) \rangle = \langle v(t)i(t) \rangle \tag{2.7}$$

例题2.2 功率的计算

假设在图2.2中包含一个具有高功率因数的120 V, 60 Hz的荧光灯电路。电路中的电压与电流都为正弦信号，并且具有相同的相位值(功率因数为1)，如图2.3所示。[①] 那么，该(周期)电压波形的直流分量为

$$\begin{aligned} V_{dc} &= \langle v(t) \rangle = \langle V\cos\omega_0 t \rangle \\ &= \frac{1}{T_0}\int_{T_0/2}^{T_0/2} V\cos\omega_0 t\,\mathrm{d}t = 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

式中，$\omega_0 = 2\pi/T_0$ 或 $f_0 = 1/T_0 = 60$ Hz。类似地，可以求出 $I_{dc} = 0$。瞬时功率为

$$p(t) = (V\cos\omega_0 t)(I\cos\omega_0 t) = \frac{1}{2}VI(1+\cos 2\omega_0 t) \tag{2.9}$$

平均功率为

$$\begin{aligned} P &= \left\langle \frac{1}{2}VI(1+\cos 2\omega_0 t) \right\rangle \\ &= \frac{VI}{2T_0}\int_{T_0/2}^{T_0/2}(1+\cos 2\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{VI}{2} \end{aligned} \tag{2.10}$$

由式(2.9)及图2.3(c)可以看出，电路消耗的功率(即发出的光)是以脉冲的形式产生的，脉冲的

---

① 用高功率因数的整流器可以组成功率因数大于90%的双管荧光灯电路[Fink 和 Beaty, 1978]。

速率为每秒 $2f_0=120$ 个(实际上，这种荧光灯电路可以用作频闪仪来观察机械旋转的物体)。峰值功率为 VI，平均功率为 $\frac{1}{2}VI$，这里 V 是峰值电压，I 是峰值电流。此外，对正弦电压和电流来说，平均功率还可以由电压的有效值 $V/\sqrt{2}$ 与电流的有效值 $I/\sqrt{2}$ 相乘得到，参见 M 文件 Example2_02. m。

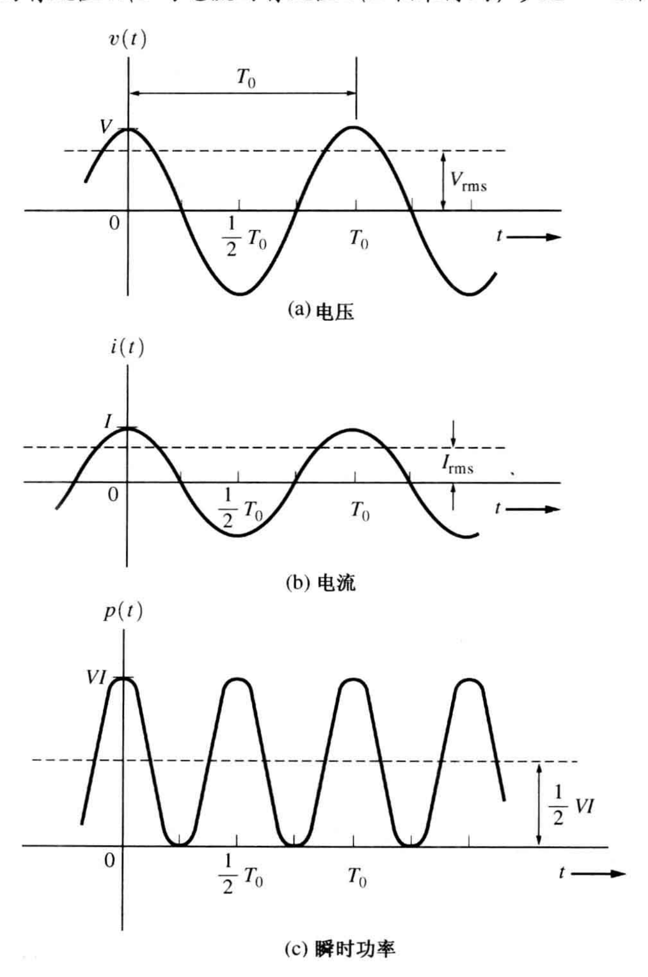


图 2.3　例题 2.2 中的稳态波形

2.1.5　均方根值(RMS)与归一化功率

定义　波形 $w(t)$ 的均方根值(RMS)为

$$W_{\mathrm{rms}}=\sqrt{\langle w^2(t)\rangle} \tag{2.11}$$

定理　如果负载是电阻性负载(即功率因数为 1)的话，那么负载上消耗的平均功率为

$$\begin{aligned}P&=\frac{\langle v^2(t)\rangle}{R}=\langle i^2(t)\rangle R=\frac{V_{\mathrm{rms}}^2}{R}\\&=I_{\mathrm{rms}}^2R=V_{\mathrm{rms}}I_{\mathrm{rms}}\end{aligned} \tag{2.12}$$

式中，R 为负载的电阻值。

式(2.12)由式(2.7)应用欧姆定理及式(2.11)而得来。欧姆定理为 $v(t)=i(t)R$。

继续考察例题2.2，并假设 $V_{\text{rms}} = 120$ V。由式(2.11)可以看出，当信号为正弦波时，电压和电流的有效值分别为 $V_{\text{rms}} = V/\sqrt{2}$ 和 $I_{\text{rms}} = I/\sqrt{2}$。因此，利用式(2.12)可以得到平均功率为 $\frac{1}{2}VI$。这和前面讨论时得到的结果是相同的。归一化功率是通信工程师们经常用到的一个概念。在提到这个概念时，电阻的阻值 R 假设为 1 Ω，尽管在实际电路中它可能为另外的值。用另一种方法来表达这个概念时，可以这样说，归一化功率是单位欧姆上消耗的功率。这样在计算信号与噪声的功率比时，R 自动地抵消了，因此用归一化的功率值可以得出正确的信噪比。如果在进行了一长串计算后想知道实际的功率值，那么只需将归一化的功率值反变换即可。由式(2.12)也可以看出，归一化功率的平方根值就是电压或电流的均方根值。

定义 归一化平均功率由下式给出：

$$P = \langle w^2(t) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} w^2(t)\,\mathrm{d}t \tag{2.13}$$

式中，$w(t)$ 为实际的电压或电流波形。

2.1.6 能量波形与功率波形①

定义 当且仅当波形 $w(t)$ 的归一化平均功率 P 为非零的有限值时(即 $0 < P < \infty$)，称 $w(t)$ 为功率波形。

定义 归一化总能量由下式给出：

$$E = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} w^2(t)\,\mathrm{d}t \tag{2.14}$$

定义 当且仅当波形 $w(t)$ 的归一化总能量 E 为非零的有限值时(即 $0 < E < \infty$)，称 $w(t)$ 为能量波形。

从这些定义可以看出，如果 $w(t)$ 属于某一种类型的波形，那么它就不可能再属于另外一种类型的波形。也就是说，如果 $w(t)$ 的能量是有限的，那么它在无穷时间域内的平均功率将为零；如果 $w(t)$ 的平均功率(在无穷时间域内)是有限的，那么它的能量将是无穷的。不过，数学上可以找到一些函数，它们的能量和功率都为无穷大，因此这些函数既不是能量波形也不是功率波形。例如 $w(t) = e^{-t}$ 就是这种函数。物理可实现波形是能量型波形，但我们通常将它们模型化为持续时间为无穷长的功率型波形。在实验室中，仪器测量到的量是在一定时间间隔内的平均值，如平均直流分量、均方根值及平均功率等。也就是说，式(2.1)中的 T 为有限值，不用趋近于无穷大。因此对能量有限的信号(实际信号)来说，可以得到非零的平均量。例如，当用普通的带有表头的伏特-欧姆-毫安表来测量直流分量时，时间平均间隔为由于表针质量而产生的阻尼运动的建立过程。因此用功率型的数学模型(在无穷时间域内求平均)可以计算出实验室中测量(在有限的时间间隔内求平均)到的平均量。

2.1.7 分贝

分贝是一种用以 10 为底的对数对功率比进行测量的方法。例如，电路的输出功率与输入功率之比常用分贝增益来表示，而不用实际的比值表示。

---

① 有些作者把能量波形与功率波形称为能量信号与功率信号，这种叫法既适合噪声波形也适合信号波形。

定义　电路的分贝增益定义为[①]

$$\mathrm{dB} = 10\log\left(\frac{\text{平均输出功率}}{\text{平均输入功率}}\right) = 10\log\left(\frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}}\right) \tag{2.15}$$

上面的定义给出了电路输出功率与输入功率的相对值，并没有表明实际的功率值。如果负载为电阻性负载，那么可以利用式(2.12)来简化式(2.15)，得到下式：

$$\mathrm{dB} = 20\log\left(\frac{V_{\text{rms out}}}{V_{\text{rms in}}}\right) + 10\log\left(\frac{R_{\text{in}}}{R_{\text{load}}}\right) \tag{2.16}$$

或

$$\mathrm{dB} = 20\log\left(\frac{I_{\text{rms out}}}{I_{\text{rms in}}}\right) + 10\log\left(\frac{R_{\text{load}}}{R_{\text{in}}}\right) \tag{2.17}$$

注意：由上面几个公式[见式(2.15)、式(2.16)或式(2.17)]可以看出，不管是采用功率、电压或电流来计算分贝值，得到的结果都是相同的。也就是说，虽然分贝是由功率比的对数值来定义的，但它也可以用电压或电流的比值来计算。

如果采用归一化功率来计算，那么分贝值变为

$$\mathrm{dB} = 20\log\left(\frac{V_{\text{rms out}}}{V_{\text{rms in}}}\right) = 20\log\left(\frac{I_{\text{rms out}}}{I_{\text{rms in}}}\right) \tag{2.18}$$

上式给出的并不是实际的分贝值，除非 $R_{\text{in}} = R_{\text{load}}$。但是在工程实践中，常用式(2.18)来计算分贝值，即使 $R_{\text{in}} \neq R_{\text{load}}$，甚至所得结果不完全正确。但工程师们清楚，如果想要得到正确的分贝值，在知道 R_{in} 和 R_{load} 值的条件下，是可以计算出来的。

如果已知分贝数，那么通过对给出的相应公式进行变换可以容易地得到功率比值或电压比值。例如，当需要知道功率比值时，可由式(2.15)变换后得到下式：

$$\frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} = 10^{\mathrm{dB}/10} \tag{2.19}$$

分贝也能用来表示电路中某点的信号功率与噪声功率之比。

定义　信噪比的分贝表示法为[②]

$$(S/N)_{\mathrm{dB}} = 10\log\left(\frac{P_{\text{signal}}}{P_{\text{noise}}}\right) = 10\log\left(\frac{\langle s^2(t)\rangle}{\langle n^2(t)\rangle}\right) \tag{2.20}$$

由于信号的功率为 $\langle s^2(t)\rangle/R = V^2_{\text{rms signal}}/R$，噪声的功率为 $\langle n^2(t)\rangle/R = V^2_{\text{rms noise}}/R$，因此该定义与下面的公式是等价的：

$$(S/N)_{\mathrm{dB}} = 20\log\left(\frac{V_{\text{rms signal}}}{V_{\text{rms noise}}}\right) \tag{2.21}$$

分贝也可以用来表示相对于某一参考值的绝对功率电平值。

定义　相对于 1 mW 的功率电平的分贝数为

---

① 以 10 为底的对数将用 log(·)表示，以 e 为底的对数将用 ln(·)表示。注意：dB 与功率比 $P_{\text{out}}/P_{\text{in}}$ 都是无量纲的量。

② 该定义给出的是平均信号功率与平均噪声功率之比。另外一种在某些场合有用的信噪比定义是峰值信号功率与平均噪声功率之比，见 6.8 节。

$$\begin{aligned}\text{dBm} &= 10\log(\text{实际的功率电平值(W)}/10^{-3})\\ &= 30 + 10\log(\text{实际的功率电平值(W)})\end{aligned} \quad (2.22)$$

这里，dBm 中的 m 是指以 1 mW 功率作为参考电平值。实验室中的射频信号发生器的输出功率一般以 dBm 为单位。

绝对功率电平值还有其他的分贝表示法。当参考电平值为 1 W 时，分贝数用 dBW 来表示。当参考电平值为 1 kW 时，分贝数用 dBk 来表示。例如，5 W 的功率可以表示为 +36.99 dBm、+6.99 dBW 或 -23.0 dBk。在电话系统中，使用 1 pW(10^{-12} W)的噪声功率作为参考电平[Jordan，1985]，这时的分贝数用 dBrn 来表示。0 dBrn 的电平值对应 -90 dBm。在电缆电视(CATV)系统中，使用75 Ω 负载上 1 mV 的均方根电压值作为参考电平，这时的分贝数用dBmV来表示，即 dBmV 定义为

$$\text{dBmV} = 20\log\left(\frac{V_{\text{rms}}}{10^{-3}}\right) \quad (2.23)$$

这里，0 dBmV 对应 -48.75 dBm。

应该强调，式(2.7)是用来计算功率的一般表达式。也就是说，式(2.7)可以用来计算任意类型的波形和负载条件下的功率。而式(2.12)只能用来计算电阻性负载条件下的功率。其他的教科书里，特别是在电工学中，给出的只是正弦波形条件下的功率计算式。

2.1.8 相量

在电气工程领域内，经常要产生正弦测试信号，因此常常用称为相量的简化符号来表示该信号。

定义 当复数 c 用来表示某一正弦波形时，就称 c 为一相量。即

$$w(t) = |c|\cos[\omega_0 t + \angle c] = \text{Re}\{c e^{j\omega_0 t}\} \quad (2.24)$$

式中，相量 $c = |c|e^{j\angle c}$，Re{·}表示复数量{·}的实部。

为了与相量 c 相区别，我们称 $ce^{j\omega_0 t}$ 为旋转相量。当用 c 来表示波形时，它代表电路中的实际波形，就是式(2.24)中表示的正弦信号。由于相量为复数，因此它可以用直角坐标或极坐标的形式来表示，即

$$c \triangleq x + jy = |c|e^{j\varphi} \quad (2.25)$$

式中，x 和 y 是直角坐标系中的实数，$|c|$ 和 $\angle c = \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ 为极坐标系中的长度和角度(都为实数)。式(2.25)中极坐标形式的右边可以简记为 $|c|\angle\varphi$。

例如，正弦信号 $25\sin(2\pi 500t + 45°)$ 可以用相量 $25\angle -45°$ 来表示。由附录 A 可知，$\sin x = \cos(x - 90°)$，因而 $25\sin(\omega_0 t + 45°) = 25\cos(\omega_0 t - 45°) = \text{Re}\{(25e^{-j\pi/4})e^{j\omega_0 t}\}$，其中 $\omega_0 = 2\pi f_0$，$f_0 = 500$ Hz。类似地，信号 $10\cos(\omega_0 t + 35°)$ 可用 $10\angle 35°$ 来表示。

有些作者对相量给出了稍微不同的定义。例如，$w(t)$ 可用复数的虚部来表示，而不是像式(2.24)中那样用复数的实部来表示。此外，相量可以用来表示 $w(t)$ 的均方根(RMS)值，而不是 $w(t)$ 的峰值[Kaufman 和 Seidman，1979]。在这种情况下，信号 $10\sin(\omega_0 t + 45°)$ 应该用 $7.07\angle 45°$ 来表示。本书中，相量将使用式(2.24)中给出的定义。相量仅能用来表示正弦波形。

2.2　傅里叶变换与频谱

2.2.1　定义

如何找到波形中包含的频率呢？此外，频率的定义是什么？对正弦波形来说，我们可以找到信号的频率为 $f_0 = 1/T_0$，其中 T_0 是正弦信号的周期，即频率是正弦信号产生的速率。所有其他的非周期波形中包含的频率不止一个。①

在大部分的实际应用中，波形并不是周期的，故没有周期 T_0 可以用来计算频率。因而，我们还需要回答这样的问题：有没有一种适用于计算任意类型波形频率的一般方法？答案是肯定的。这就是傅里叶变换(FT)。它用来计算 $w(t)$ 中的正弦分量。

定义　波形 $w(t)$ 的傅里叶变换(FT)为

$$W(f) = \mathscr{F}[w(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} [w(t)] e^{-j2\pi f t} dt \tag{2.26}$$

其中，$\mathscr{F}[\cdot]$ 表示对 $[\cdot]$ 进行傅里叶变换，f 是频率参数，单位为 Hz(即 1/s)。② 在这个定义中，进行傅里叶变换时用的参数是频率 f。

由于用式(2.26)得到的是波形的正频率和负频率分量，因此 $W(f)$ 也称为 $w(t)$ 的双边谱。应该清楚，电压(或电流)波形的频谱是通过数学方法计算出来的，它在实际电路中并不存在。f 仅仅是一个参数(称为频率)，它决定了在哪些点上来计算频谱函数的值。

傅里叶变换用来计算波形 $w(t)$ 中包含的频率分量。一旦选择某一个频率值，比如说 $f = f_0$，就可以计算 $|W(f_0)|$ 的值。如果 $|W(f_0)|$ 值不为零，就说明波形 $w(t)$ 中包含有频率 f_0。一般来说，为找出波形 $w(t)$ 中包含的所有频率，可以通过在 $-\infty < f < +\infty$ 的频率域内对所有可能的频率值反复地求傅里叶积分得到。

容易证明傅里叶变换为什么可以求出波形 $w(t)$ 中包含的频率分量。例如，假设 $w(t) = 1$，即波形为直流信号。这时式(2.26)中的被积函数为 $e^{-j2\pi ft} = \cos 2\pi ft - j\sin 2\pi ft$。由于正弦波在一个周期的时间间隔内积分面积为零，因而傅里叶变换的积分结果为零(只要 $f \neq 0$)。但是，如果选择 $f = 0$，傅里叶变换的积分不为零。因此，如预期的那样，由式(2.26)确定出 $f = 0$ 为波形 $w(t) = 1$ 中包含的频率。再看另外一个例子，设波形 $w(t) = 2\sin 2\pi f_0 t$，这时式(2.26)中的被积函数为 $\sin 2\pi(f_0 - f)t + \sin 2\pi(f + f_0)t - j\cos 2\pi(f_0 - f)t + j\cos 2\pi(f_0 + f)t$。当 $f = f_0$ 及 $f = -f_0$ 时，傅里叶变换的积分不为零。③ 用这种方法，就可以找出波形 $w(t)$ 中包含的频率。

直接计算傅里叶变换的积分并不容易，因此，下面列出的傅里叶变换的不同计算方法非常有用。式(2.26)的傅里叶积分可以用下面任意一种方法求出：

---

① 直流电压波形或直流电流波形中只有一个频率，$f = 0$。直流波形是 $T_0 \to \infty$ 和 $f_0 \to 0$ 的特殊条件下的余弦波形(即正弦型波形)。在例题 2.13 中将可以看到，周期方波信号中包含无穷个奇数谐波频率分量。

② 有些作者用角频率参数 $\omega = 2\pi f$ 来定义傅里叶变换，ω 的单位为：弧度/秒。当用 $2\pi f$ 来替换 ω 时，这种定义和式(2.26)中给出的定义是相同的。作者本人比较喜欢用式(2.26)中给出的定义，因为在频谱分析仪上标刻的单位通常为赫兹而不是弧度/秒。

③ 正弦波形的频率为 f_0，但是傅里叶变换得到的频率为 f_0 和它的镜像频率 $-f_0$，这种现象见例题 2.5 后面的讨论。

1. 直接积分。[①] 见例题 2.3。
2. 查傅里叶变换表或拉普拉斯变换表。见表 2.2 及例题 2.10。
3. 傅里叶变换定理。见表 2.1 及例题 2.4。
4. 分解为两个或更多个简单的问题后求解叠加。见助学例题 SA.5。
5. 对 $w(t)$ 进行积分或微分。见例题 2.7。
6. 在 PC 上通过 MATLAB 积分功能进行傅里叶变换的数值积分。见例题 2.6 及 M 文件 Example2_06.m。
7. 在 PC 上通过 MATLAB 的快速傅里叶变换(FFT)功能进行快速傅里叶变换。见图 2.21 和 M 文件 Example2_20.m 以及图 2.22 和 M 文件 Example2_21.m。

在本章的剩余部分将对这些计算方法进行讨论。

由式(2.26)可以看出，由于 $e^{-j2\pi ft}$ 为复函数，因此 $W(f)$ 为频率的复函数。$W(f)$ 可以分解为由两个实函数 $X(f)$ 和 $Y(f)$ 组成，即

$$W(f) = X(f) + jY(f) \tag{2.27}$$

这种表示方法和在直角坐标系中用两个实数来表示复数的方法是一样的。因此，式(2.27)有时也称为傅里叶变换的正交形式或直角坐标形式。类似地，式(2.26)也可以写成极坐标形式，其中一对实数分别表示振幅和相位：

$$W(f) = |W(f)|e^{j\theta(f)} \tag{2.28}$$

即

$$|W(f)| = \sqrt{X^2(f) + Y^2(f)} \quad 和 \quad \theta(f) = \arctan\left(\frac{Y(f)}{X(f)}\right) \tag{2.29}$$

这种表示方法称为傅里叶变换的振幅和相位形式或极坐标形式。为了确定波形中包含的频率，可以检查振幅频谱 $|W(f)|$ 的值，有时工程师们把振幅频谱不严密地称为频谱。

对频谱函数求傅里叶反变换可以得到时间波形：

$$w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} W(f)e^{j2\pi ft}\,df \tag{2.30}$$

函数 $w(t)$ 和 $W(f)$ 称为傅里叶变换对，其中 $w(t)$ 为时域波形，$W(f)$ 为频域波形。本书中，常用小写字母来表示时域波形，用大写字母来表示频域波形。为了书写方便，将用一双箭头的简化符号来表示傅里叶变换对，即 $w(t)\leftrightarrow W(f)$。

如果波形 $w(t)$ 满足以下的狄利克雷(Dirichlet)条件(充分条件)，那么波形的傅里叶变换将存在。

- 在任意有限的时间间隔内，函数 $w(t)$ 只有有限个极大值和极小值或有限个间断点(如果存在)。
- $w(t)$ 满足绝对可积条件，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |w(t)|\,dt < \infty \tag{2.31}$$

以上这些条件为波形存在傅里叶变换的充分条件，并非必要条件。事实上，下面给出的几个例题中的波形并不满足狄利克雷条件，但波形的傅里叶变换是存在的。

傅里叶变换存在更宽松的充分条件为

---

① 复变量的围线积分也是有用的积分方法。

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |w(t)|^2 \mathrm{d}t < \infty \tag{2.32}$$

式中，E 为波形的归一化能量[Goldberg，1961]。这是波形能量受限条件，所有的物理可实现波形都满足这个条件。因此，在工程实践中遇到的所有实际波形的傅里叶变换都存在。

应该注意的是，有时数学家们还使用其他的傅里叶变换定义，而不是式(2.26)中的定义。在这种情况下，与式(2.30)等效的傅里叶反变换的表达式也不相同。这样当傅里叶变换和相应的傅里叶反变换定义一起使用时，原波形 $w(t)$ 才可以恢复。这是傅里叶积分定理的必然结果，傅里叶积分定理为

$$w(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f(t-\lambda)}\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}f \tag{2.33}$$

式(2.33)可以分解为式(2.26)和式(2.30)，也可以分解为其他的傅里叶变换对形式。傅里叶积分定理只对性能良好的函数(即实际波形)成立。例如，假设波形 $w(t)$ 为理想的方波信号，那么在函数 $w(\lambda_0)$ 的间断点 λ_0 处，$w(t)$ 的函数值为函数 $w(\lambda)$ 在间断点 λ_0 两边所得到的值的平均。

例题 2.3　指数脉冲波形的频谱

假设 $w(t)$ 是衰减的指数脉冲波形，起始时刻为 $t=0$，即

$$w(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-t}, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$$

直接求傅里叶积分，得

$$W(f) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\mathrm{d}t = \left|\frac{-\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{j}2\pi f)t}}{1+\mathrm{j}2\pi f}\right|_0^{\infty}$$

或

$$W(f) = \frac{1}{1+\mathrm{j}2\pi f}$$

换句话说，傅里叶变换对为

$$\begin{Bmatrix} \mathrm{e}^{-t}, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{Bmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{1+\mathrm{j}2\pi f} \tag{2.34}$$

对式(2.34)的分母进行有理数变换后，可以得到波形频谱的正交形式为

$$X(f) = \frac{1}{1+(2\pi f)^2} \quad 和 \quad Y(f) = \frac{-2\pi f}{1+(2\pi f)^2}$$

波形频谱图见 M 文件 Example1_03A. m。

频谱的振幅——相位形式为

$$|W(f)| = \sqrt{\frac{1}{1+(2\pi f)^2}} \quad 和 \quad \theta(f) = -\arctan(2\pi f)$$

振幅、相位频谱图见 M 文件 Example2_03B. m。

下面在对一些有用的定理进行讨论后，将给出更多的例题。

2.2.2　傅里叶变换的性质

从式(2.26)给出的频谱定义式出发，可以得到频谱变换的许多有用和有趣的定理。实函数

波形的频谱变换定理就是其中之一。在任意的实际电路中，电压(或电流)波形是时间的实函数(与时间的复函数相对应)。

定理 实信号的频谱对称性。如果信号 $w(t)$ 是实信号，则有

$$W(-f)=W^*(f) \tag{2.35}$$

(上式中，右上角的星号为共轭运算符号。)

证明 由式(2.26)可得：

$$W(-f)=\int_{-\infty}^{\infty} w(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}t \tag{2.36}$$

对式(2.26)进行共轭运算，得到：

$$W^*(f)=\int_{-\infty}^{\infty} w^*(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}t \tag{2.37}$$

由于 $w(t)$ 为实信号，故有 $w^*(t)=w(t)$，因此式(2.36)与式(2.37)右边的量相同，因而式(2.35)成立。还能证明，如果 $w(t)$ 为实信号且为时间 t 的偶函数，那么 $W(f)$ 就为实函数。类似地，如果 $w(t)$ 为实信号且为时间 t 的奇函数，那么 $W(f)$ 就为虚函数。

由式(2.35)得出的另一个有用的推论是：对实函数 $w(t)$ 来说，其振幅频谱是原点轴(即 $f=0$)的偶函数，即

$$|W(-f)|=|W(f)| \tag{2.38}$$

而相位频谱是原点轴的奇函数，即

$$\theta(-f)=-\theta(f) \tag{2.39}$$

将信号的频谱写成极坐标形式后，可以容易地证明以上的推论。频谱的极坐标形式为

$$W(f)=|W(f)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta(f)}$$

故有

$$W(-f)=|W(-f)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta(-f)}$$

和

$$W^*(f)=|W(f)|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta(f)}$$

利用式(2.35)的关系，可以看出式(2.38)及式(2.39)成立。

总之，从前面的讨论中，可以看出傅里叶变换具有下面一些性质：

- f，称为频率，单位为赫兹，是傅里叶变换时的一个参数，它表示我们有兴趣寻找的波形 $w(t)$ 中包含的频率。
- 傅里叶变换是在所有的时间域内，即在 $-\infty<t<\infty$ 内，寻找波形 $w(t)$ 中包含的频率。
$$-\infty<t<\infty$$
- 尽管 $w(t)$ 为实信号，但 $W(f)$ 可能是复函数。
- 如果 $w(t)$ 为实信号，那么就有 $W(-f)=W^*(f)$。

2.2.3 帕塞瓦尔(Parseval)定理与能量谱密度

帕塞瓦尔定理为

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_1(t)w_2^*(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty} W_1(f)W_2^*(f)\mathrm{d}f \tag{2.40}$$

式中，如果 $w_1(t)=w_2(t)=w(t)$，那么帕塞瓦尔定理就简化为瑞利(Rayleigh)能量定理，该定理的内容如下：

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |w(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |W(f)|^2 \mathrm{d}f \tag{2.41}$$

证明　将式(2.40)左边的 $w_1(t)$ 用式(2.30)代替，得到下式：

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_1(t) w_2^*(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} W_1(f) \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f t} \mathrm{d}f \right] w_2^*(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_1(f) w_2^*(t) \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f t}\,\mathrm{d}f\,\mathrm{d}t$$

交换上式中 f 与 t 的积分次序①，得到：

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_1(t) w_2^*(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} W_1(f) \left[\int_{-\infty}^{\infty} w_2(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t} \mathrm{d}t \right]^* \mathrm{d}f$$

上式中，利用式(2.26)就得到式(2.40)。帕塞瓦尔定理给出了一种不通过时间函数而通过频谱函数来计算信号能量的方法。由此引出了能量谱密度函数的概念。

定义　能量波形的能量谱密度(ESD)函数定义为

$$\mathscr{E}(f) = |W(f)|^2 \tag{2.42}$$

其中，$w(t) \leftrightarrow W(f)$。$\mathscr{E}(f)$ 为波形的能量谱密度函数，单位是 J/Hz。

由式(2.41)，可以看出信号的归一化总能量为能量谱密度函数在频率域内的积分面积，即

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{E}(f)\,\mathrm{d}f \tag{2.43}$$

对功率波形，可以定义一个类似的函数，称为功率谱密度(PSD)。这将在 2.3 节及第 6 章中讨论。

除了帕塞瓦尔定理以外，对傅里叶变换还有许多其他的定理，表 2.1 中列出这些定理。在表中，最右边的结果是将相应的时间函数代入傅里叶变换的定义式中简化得来的。例如，尺度变换定理的证明如下，将 $w(at)$ 代入式(2.26)得：

$$\mathscr{F}[w(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} w(at) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\,\mathrm{d}t$$

令 $t_1 = at$，并假设 $a > 0$，得到：

$$\mathscr{F}[w(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a} w(t_1) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi (f/a) t_1} \mathrm{d}t_1 = \frac{1}{a} W\left(\frac{f}{a}\right)$$

如果 $a < 0$，上式变为

$$\mathscr{F}[w(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-1}{a} w(t_1) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi (f/a) t_1} \mathrm{d}t_1 = \frac{1}{|a|} W\left(\frac{f}{a}\right)$$

因此，对 $a > 0$ 或 $a < 0$ 有：

$$w(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} W\left(\frac{f}{a}\right)$$

---

① 由 Fubini 定理可知，当所有的积分为绝对收敛时，积分次序是可以交换的。也就是说，当被积量用它的绝对值代替时，这些积分的结果为有限值。我们假设这个条件是满足的。

表 2.1 中其他的定理可以用类似的方法直接证明。不过对积分定理来说，情况要复杂一些，因为它涉及到狄拉克(Dirac)函数 $\delta(f)$。积分定理可用卷积定理来证明，见习题2.38。带通信号定理将在第 4 章中详细讨论。它是第 4 章和第 5 章中讨论的数字调制和模拟调制技术的基础。在 2.8 节中，将对傅里叶变换和离散傅里叶变换(DFT)之间的关系进行研究。

在以下的例题中，将会看到使用这些定理能极大地简化傅里叶变换的计算过程。读者应该认真地研究表 2.1 中的内容，并随时准备使用它们。当傅里叶变换完成后，应该去验证所得结果是否满足傅里叶变换的性质。如果不满足，就表明发生了差错。例如，如果波形 $w(t)$ 为实信号，则有：

- $W(-f) = W^*(f)$，或 $|W(f)|$ 为偶函数，$\theta(f)$ 为奇函数。
- 当 $w(t)$ 为偶函数时，$W(f)$ 为实函数。
- 当 $w(t)$ 为奇函数时，$W(f)$ 为虚函数。

表 2.1 傅里叶变换定理[a]

运算	函数	傅里叶变换
线性	$a_1w_1(t)+a_2w_2(t)$	$a_1W_1(f)+a_2W_2(f)$
时延	$w(t-T_d)$	$W(f)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T_d}$
尺度变换	$w(at)$	$\frac{1}{\|a\|}w\left(\frac{f}{a}\right)$
共轭	$w^*(t)$	$W^*(-f)$
对偶	$W(t)$	$w(-f)$
实信号频移[$w(t)$ 为实信号]	$w(t)\cos(w_ct+\theta)$	$\frac{1}{2}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}W(f-f_c)+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}W(f+f_c)]$
复信号频移	$w(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_ct}$	$W(f-f_c)$
带通信号	$\mathrm{Re}\{g(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_ct}\}$	$\frac{1}{2}[G(f-f_c)+G^*(-f-f_c)]$
微分	$\frac{\mathrm{d}^nw(t)}{\mathrm{d}t^n}$	$(\mathrm{j}2\pi f)^nW(f)$
积分	$\int_{-\infty}^{t}w(\lambda)\mathrm{d}\lambda$	$(\mathrm{j}2\pi f)^{-1}W(f)+\frac{1}{2}W(0)\delta(f)$
卷积	$w_1(t)*w_2(t)=\int_{-\infty}^{t}w_1(\lambda)\mathrm{d}\lambda\cdot w_2(t-\lambda)\mathrm{d}\lambda$	$W_1(f)W_2(f)$
相乘[b]	$w_1(t)w_2(t)$	$W_1(f)*W_2(f)=\int_{-\infty}^{\infty}W_1(\lambda)W_2(f-\lambda)\mathrm{d}\lambda$
与 t^n 相乘	$t^nw(t)$	$(-\mathrm{j}2\pi)^{-n}\frac{\mathrm{d}^nW(f)}{\mathrm{d}f^n}$

[a] 表中 $w_c=2\pi f_c$。

[b] $*$ 号表示卷积运算，见式(2.62)中的详细描述。

例题 2.4 衰减正弦信号的频谱

假设有一正弦衰减信号为

$$w(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-t/T}\sin\omega_0t, & t>0,\ T>0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

对上式求傅里叶变换可以得到波形的频谱。傅里叶变换可以利用前面例题中得到的结论加上表 2.1 中傅里叶变换的性质求出。由式(2.34)的结果及表 2.1 中的尺度变换定理，其中 $a=1/T$，得到：

$$\begin{cases} e^{-t/T}, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases} \leftrightarrow \frac{T}{1+j(2\pi f T)}$$

利用实信号的频移定理及 $\theta = -\pi/2$，可得：

$$\begin{aligned} W(f) &= \frac{1}{2}\left\{e^{-j\pi/2}\frac{T}{1+j2\pi T(f-f_0)} + e^{j\pi/2}\frac{T}{1+j2\pi T(f+f_0)}\right\} \\ &= \frac{T}{2j}\left\{\frac{1}{1+j2\pi T(f-f_0)} - \frac{1}{1+j2\pi T(f+f_0)}\right\} \end{aligned} \tag{2.44}$$

式中，$e^{\pm j\pi/2} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \pm j\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pm j$。信号的频谱是复函数(即既不是实函数也不是虚函数)。这是由于 $w(t)$ 中既没有以 $t=0$ 轴为偶对称的分量也没有奇对称分量。

式(2.44)的频谱图见 Example2_04.m。正如预期的那样，式(2.44)表明正弦衰减信号的振幅频谱的最大值出现在 $f=\pm f_0$ 处。将这个结果与指数衰减信号(见例题2.3)的振幅频谱的最大值出现在 $f=0$ 相比较，可以看出 $\sin\omega_0 t$ 因子使得频谱的峰值由 $f=0$ 移动到了 $f=\pm f_0$ 处。

2.2.4　狄拉克(Dirac)δ 函数与单位阶跃函数

定义　狄拉克 δ 函数 $\delta(x)$ 定义为

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x)\delta(x)\,dx = w(0) \tag{2.45}$$

式中，$w(x)$ 为在 $x=0$ 处连续的任意函数。

在这种定义中，变量 x 可以是时间或频率，这取决于应用的场合。$\delta(x)$ 函数的另一种定义为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1 \tag{2.46a}$$

及

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x=0 \\ 0, & x\neq 0 \end{cases} \tag{2.46b}$$

这里，式(2.46a)及式(2.46b)必须同时满足。狄拉克 δ 函数在实际中并不存在，因此它称为奇异函数。$\delta(x)$ 函数还能在更广泛的意义上定义为数学领域内分配理论及广义函数理论分支下的一种函数。

由式(2.45)，可得到 δ 函数的平移性质为

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x)\,\delta(x-x_0)\,dx = w(x_0) \tag{2.47}$$

也就是说，δ 函数将 $w(x_0)$ 的值从积分中筛选了出来。

在有些场合，δ 函数的等效积分式也是有用的，等效积分式为

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm j2\pi xy}\,dy \tag{2.48}$$

式中，根据需要可以使用“+”号或“-”号。这里假设 δ 函数是偶函数，即 $\delta(-x) = \delta(x)$。式(2.48)可以通过求 δ 函数的傅里叶变换得到验证。δ 函数的傅里叶变换为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-2\pi f t} dt = e^0 = 1$$

对上式两边求傅里叶反变换就得到式(2.48)。(δ 函数还有另外一些性质，见附录 A。)

另外一种与狄拉克 δ 函数非常有关的函数是单位阶跃函数。

定义 单位阶跃函数 $u(t)$ 定义为

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \tag{2.49}$$

由于 $\delta(\lambda)$ 除在 $\lambda = 0$ 外全为零，因此狄拉克 δ 函数与单位阶跃函数之间的关系为

$$\int_{-\infty}^{t+\epsilon} \delta(\lambda)\, d\lambda = u(t) \tag{2.50}$$

式中 $\epsilon > 0$ 且 $\epsilon \to 0$，因而有

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t) \tag{2.51}$$

例题 2.5 正弦信号的频谱

求正弦电压波形的频谱。设正弦电压波形的频率为 f_0，峰值为 A V。即

$$v(t) = A \sin \omega_0 t, \text{ 其中 } \omega_0 = 2\pi f_0$$

由式(2.26)，可得电压波形频谱为

$$V(f) = \int_{-\infty}^{\infty} A\left(\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}\right) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \frac{A}{2j}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt - \frac{A}{2j}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(f+f_0)t} dt$$

再由式(2.48)可看出，这些积分和狄拉克 δ 函数是等效的，因此有：

$$V(f) = j\frac{A}{2}[\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)]$$

注意，波形的频谱是虚函数。这可以预期到，因为 $v(t)$ 为实偶信号。此外，虽然这时 $v(t)$ 为无穷能量型信号且不满足绝对可积条件，即 $v(t)$ 不满足式(2.31)及式(2.32)给出的狄利克雷充分条件(不是必要条件)，但对这种信号的傅里叶变换，我们得到了一种有意义的表示方法。

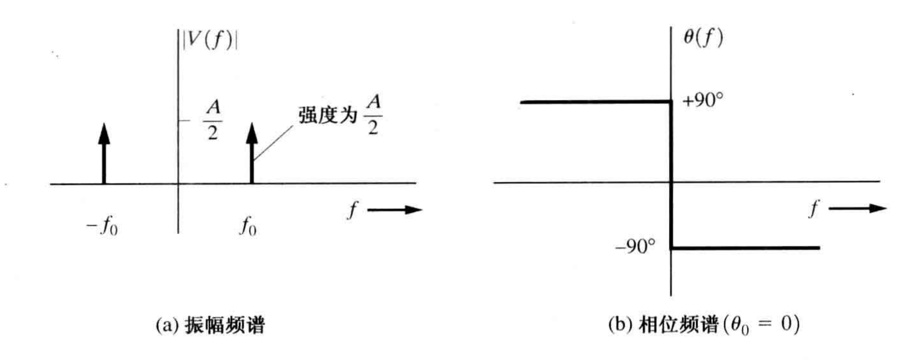
波形的振幅频谱为

$$|V(f)| = \frac{A}{2}\delta(f - f_0) + \frac{A}{2}\delta(f + f_0)$$

式中，A 为一正数。由于只存在两个频率($f = \pm f_0$)，因此只需计算这两个频率点上的 $\theta(f)$ 值，即 $\theta(f_0) = \arctan(-1/0) = -90°$ 及 $\theta(-f_0) = \arctan(1/0) = +90°$。由于除 $f = \pm f_0$ 外，所有频率上的 $|V(f)| = 0$ 且 $V(f) = |V(f)|e^{j\theta(t)}$，因此，对 $f \neq \pm f_0$ 处的 $\theta(f)$ 值可以设置为方便的任意值，因而相位频谱可假定为

$$\theta(f) = \begin{cases} -\pi/2, & f > 0 \\ +\pi/2, & f < 0 \end{cases} \text{弧度} = \begin{cases} -90°, & f > 0 \\ 90°, & f < 0 \end{cases}$$

波形的频谱如图 2.4 所示。由于 δ 函数的值为无穷大，因此无法标出 δ 函数本身，图 2.4(a) 中只标明了 δ 函数的强度。正如式(2.38)及式(2.39)所描述的那样，可以看出波形的振幅频谱为偶函数，相位频谱为奇函数。



(a) 振幅频谱　　(b) 相位频谱($\theta_0 = 0$)

图 2.4　正弦波形的频谱

现在，让我们来看一下具有任意相位值 θ_0 的一般正弦波形。这时，

$$w(t) = A\sin(\omega_0 t + \theta_0) = A\sin[\omega_0(t + \theta_0/\omega_0)]$$

运用时延定理，可得到波形的频谱为

$$W(f) = \mathrm{j}\frac{A}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_0(f/f_0)}[\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)]$$

由上式看出，振幅频谱和前面 $\theta_0 = 0$ 时得到的结果相同。相位频谱为 $\theta_0 = 0$ 时的结果与线性函数 $(\theta_0/f_0)f$ 的叠加。但由于整个频谱除 $f = \pm f_0$ 外，在所有其他的频率上都为零，因而相位频谱的值除 $f = \pm f_0$ 外，在所有其他的频率上可以任意设定。当 $f = f_0$ 时，相位频谱的值为 $(\theta_0 - \pi/2)$ 弧度，当 $f = -f_0$ 时，相位频谱的值为 $-(\theta_0 - \pi/2)$ 弧度。最终图形见 M 文件 Example2_5. m。

从数学的观点看，图 2.4 表明了正弦波形中包含两个频率，一个为 $f = +f_0$，另一个为 $f = -f_0$。这一点也可以从正弦波形的展开式中看出，即

$$v(t) = A\sin\omega_0 t = \frac{A}{\mathrm{j}2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} - \frac{A}{\mathrm{j}2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}$$

上式表明，正弦波形由两个旋转相量组成，一个以 $f = +f_0$ 的频率旋转，另一个以 $f = -f_0$ 的频率旋转。从工程的观点看，正弦波形中只包含一个频率，即 $f = f_0$。因为对任意实际信号(即实信号)来说，式(2.35)表明了任意正频率的存在，因此就会有数学意义上的负频率存在。信号 $v(t)$ 用相量表示为 $c = 0 - \mathrm{j}A = A\angle -90°$。另一个有趣现象是，波形的振幅频谱为线谱(即狄拉克 δ 函数)。式(2.109)中将会表明，线谱是由于 $v(t)$ 为周期函数的结果。如果正弦波形受开关控制，那么波形就不是周期的，这时波形的频谱将如例题 2.10 中所讨论的那样是连续的。由例题 2.4 可知，正弦衰减信号的频谱也是连续谱。

2.2.5　矩形脉冲与三角脉冲

在通信系统中常会遇到以下波形，因此为简便起见，将对它们定义一些特殊的记号。

定义　用记号 $\Pi(\cdot)$ 表示单个矩形脉冲，即

$$\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \triangleq \begin{cases} 1, & |t| \leqslant \dfrac{T}{2} \\ 0, & |t| > \dfrac{T}{2} \end{cases} \tag{2.52}$$

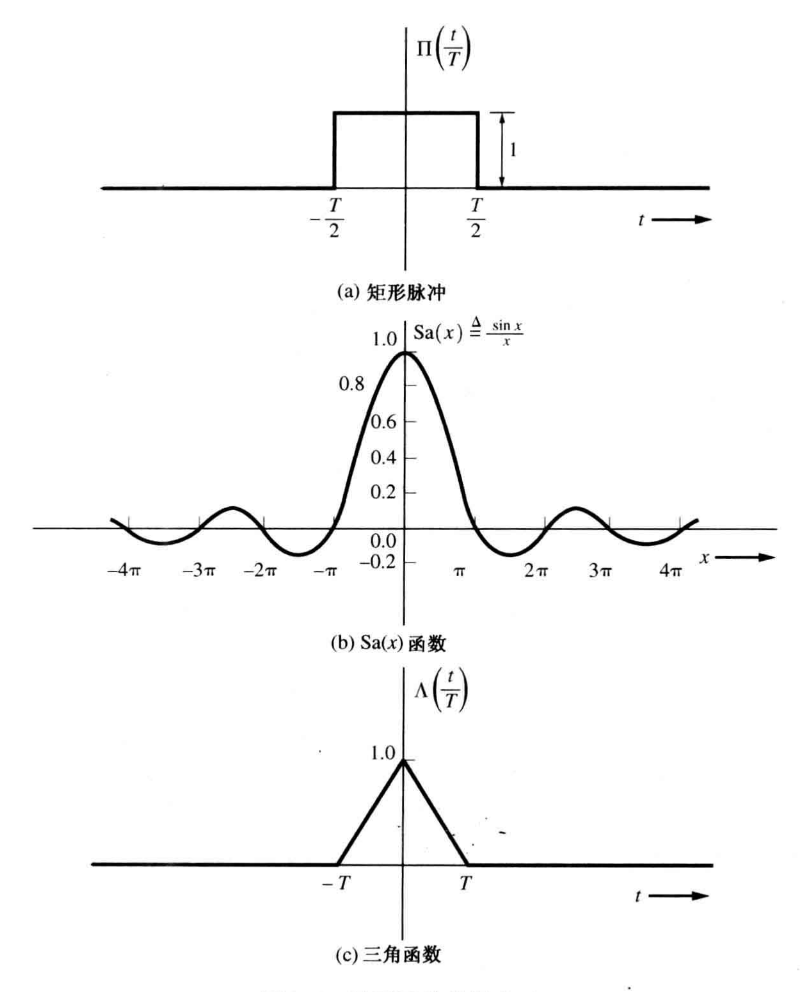
定义 用记号 Sa(·)表示下面的函数①:

$$\mathrm{Sa}(x) = \frac{\sin x}{x} \tag{2.53}$$

定义 用记号 Λ(·) 表示三角函数，即

$$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) \triangleq \begin{cases} 1 - \dfrac{|t|}{T}, & |t| \leqslant T \\ 0, & |t| > T \end{cases} \tag{2.54}$$

这些波形如图 2.5 所示。在 A.9 节中(附录 A)列出了 Sa(x) 函数的数值表。



(a) 矩形脉冲

(b) Sa(x) 函数

(c) 三角函数

图 2.5 波形及其符号表示

例题 2.6 矩形脉冲的频谱

对函数 $w(t) = \Pi(t/T)$，求傅里叶变换得到信号的频谱为

---

① 该函数与 sinc 函数有关，由于 $\mathrm{sinc}(\lambda) \triangleq (\sin\pi\lambda)/\pi\lambda$，因此它们的关系为 $\mathrm{Sa}(x) = \mathrm{sinc}(x/\pi)$。Sa(x) 和 sinc(x) 表示的是相同的概念，但由于刻度不同，它们有时会被混淆。在本书中，为避免混淆将使用 $(\sin x)/x$，这样也不占用太多的印刷空间。

$$W(f) = \int_{-T/2}^{T/2} 1\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T/2} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T/2}}{-\mathrm{j}\omega}$$

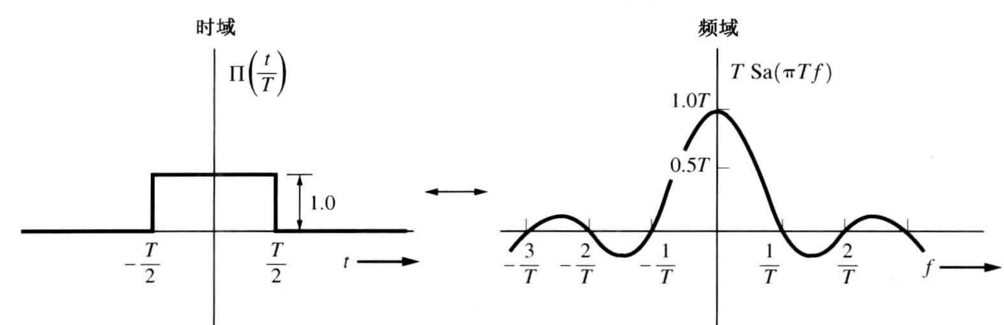
$$= T\,\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} = T\,\mathrm{Sa}(\pi T f)$$

因而，有

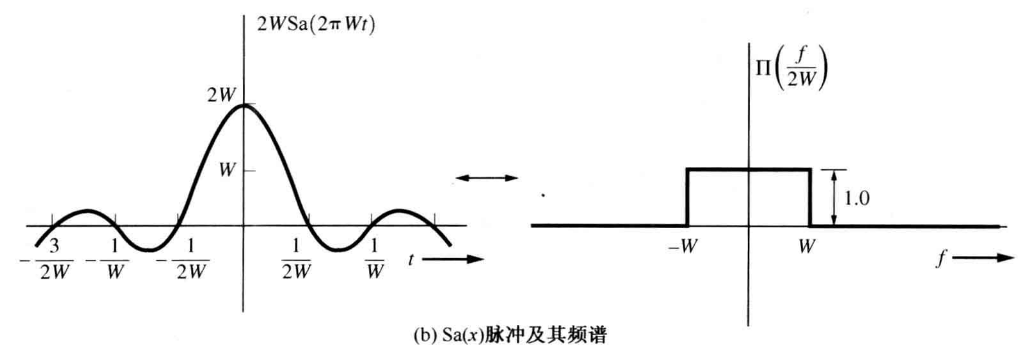
$$\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow T\,\mathrm{Sa}(\pi T f) \tag{2.55}$$

振幅频谱和相位频谱图见 M 文件 Example2_06. m。M 文件 Example2_06FT. m 给出了上面的傅里叶积分的数值结果。矩形脉冲的傅里叶变换对如图 2.6(a)所示。注意：脉冲宽度 T 与频谱中的零点位置 $1/T$ 成反比关系。此外，利用对称定理(表 2.1 中所列)，具有 $(\sin x)/x$ 形状的脉冲信号的频谱为矩形谱。也就是说，由于信号 $\Pi(x)$ 是偶函数，因此对式(2.55)利用对称定理，可以得到：

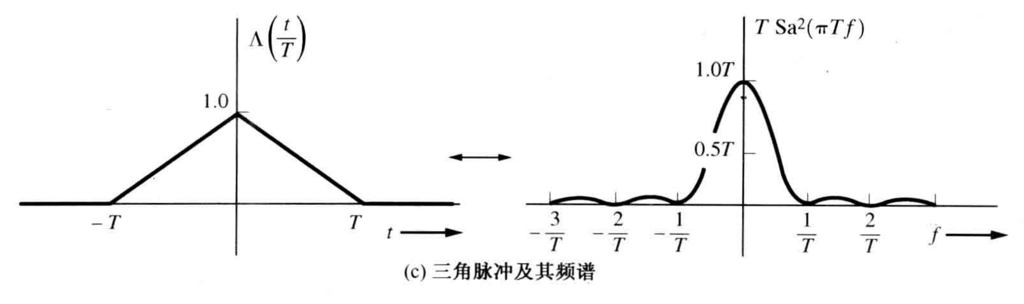
$$T\,\mathrm{Sa}(\pi T t) \leftrightarrow \Pi\left(-\frac{f}{T}\right) = \Pi\left(\frac{f}{T}\right)$$



(a) 矩形脉冲及其频谱



(b) Sa(x)脉冲及其频谱



(c) 三角脉冲及其频谱

图 2.6　矩形脉冲、$(\sin x)/x$ 脉冲及三角脉冲的频谱

上式中用 $2W$ 来代替参数 T，可得到以下的傅里叶变换对：

$$2W\,\mathrm{Sa}(2\pi Wt) \leftrightarrow \Pi\left(\frac{f}{2W}\right) \tag{2.56}$$

式中，W 为绝对带宽，单位是赫兹。图 2.6(b)示出了该傅里叶变换对。

图 2.6 所示的频谱为实函数，这是由于对应的时域脉冲为实偶函数。如果脉冲波形在时间轴上平移一段时间会破坏偶对称性，这时信号的频谱将为复函数。例如，令

$$v(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T \\ 0, & \text{否则} \end{cases} = \Pi\left(\frac{t = T/2}{T}\right)$$

利用时延定理及式(2.55)的结论，可以得到下面的频谱：

$$V(f) = T\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi fT}\,\mathrm{Sa}(\pi Tf) \tag{2.57}$$

式(2.57)中的频谱可用正交形式表示为

$$V(f) = \underbrace{[T\,\mathrm{Sa}(\pi fT)\cos(\pi fT)]}_{X(f)} + \mathrm{j}\underbrace{[-T\,\mathrm{Sa}(\pi fT)\sin(\pi fT)}_{Y(f)} \tag{2.58}$$

考查式(2.57)，可得到信号的振幅频谱为

$$|V(f)| = T\left|\frac{\sin\pi fT}{\pi fT}\right| \tag{2.59}$$

信号的相位频谱为

$$\theta(f) = \angle \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/T} + \angle \mathrm{Sa}(\pi fT) = -\pi fT + \begin{cases} 0, & \dfrac{n}{T} < |f| < \dfrac{n+1}{T}, & n\text{为偶数} \\ \pi, & \dfrac{n}{T} < |f| < \dfrac{n+1}{T}, & n\text{为奇数} \end{cases} \tag{2.60}$$

矩形脉冲是最重要和最常使用的脉冲信号之一，这是因为用矩形脉冲可以方便地表示二进制数据的“1”和“0”。例如，在 TTL 逻辑电路中，用 +5 V 的矩形脉冲表示二进制数据的“1”，用零电平表示二进制数据的“0”，如图 3.15(a)所示，图中 $A = 5$。在图 3.15 中还给出了其他矩形脉冲编码的例子。

矩形脉冲数字信号的零点带宽可由式(2.55)及式(2.59)得到。如果数字信号的脉冲宽度为 T 秒，那么信号的带宽(即频谱幅度较大的那部分的频带宽度)大约为 $1/T$ 赫兹。对信号带宽的详细讨论见 2.9 节。

例题 2.7 三角脉冲的频谱

对三角脉冲频谱函数的计算，可以直接对图 2.6(c)中组成三角脉冲的两段直线方程求傅里叶积分得到。另外一种方法是先求出三角脉冲函数二阶导数的频谱，这种方法能够更快地得到三角脉冲的频谱。我们将采用第二种方法来说明频谱的计算过程。令

$$w(t) = \Lambda(t/T)$$

于是有：

$$\frac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{T}u(t+T) - \frac{2}{T}u(t) + \frac{1}{T}u(t-T)$$

及

$$\frac{\mathrm{d}^2 w(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{T}\delta(t+T) - \frac{2}{T}\delta(t) + \frac{1}{T}\delta(t-T)$$

利用表2.2中傅里叶变换对的关系，可以得到三角脉冲二阶导数的傅里叶变换对为

$$\frac{\mathrm{d}^2 w(t)}{\mathrm{d}t^2} \leftrightarrow \frac{1}{T}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T} - \frac{2}{T} + \frac{1}{T}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}$$

上式可以重新写为

$$\frac{\mathrm{d}^2 w(t)}{\mathrm{d}t^2} \leftrightarrow \frac{1}{T}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T/2})^2 = \frac{-4}{T}(\sin \pi f T)^2$$

对上式，两次应用表2.1中的积分定理，得到原三角脉冲的傅里叶变换对为

$$w(t) \leftrightarrow \frac{-4}{T}\frac{(\sin \pi f T)^2}{(\mathrm{j}2\pi f)^2}$$

因此有

$$w(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow T\,\mathrm{Sa}^2(\pi f T) \tag{2.61}$$

参见M文件Example2_07.m。以上关系如图2.6(c)所示。

2.2.6　卷积

表2.1所列的卷积运算非常有用。在2.6节中将说明如何应用卷积运算计算线性系统的输出波形。

定义　在波形 $w_1(t)$ 与波形 $w_2(t)$ 之间进行卷积运算，得到第三个波形 $w_3(t)$ 为

$$w_3(t) = w_1(t) * w_2(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} w_1(\lambda)\, w_2(t-\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \tag{2.62a}$$

其中，$w_1(t) * w_2(t)$ 为卷积积分运算的简化记法，$*$ 号读作“与…卷积”。

由卷积定义式可以看出，t 为参数，λ 为积分变量。

如果卷积函数为不连续波形，那么用下面的等效积分式来计算卷积积分通常会更容易些：

$$w_3(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w_1(\lambda)\, w_2(-(\lambda - t))\,\mathrm{d}\lambda \tag{2.62b}$$

这样，式(2.62b)中的被积函数可用下面的运算步骤得到：

1. 将波形 w_2 进行时间反折得到 $w_2(-\lambda)$。
2. 将 w_2 沿时间轴平移 t 秒得到 $w_2(-(\lambda - t))$。
3. 将 $w_2(-(\lambda - t))$ 与 w_1 相乘得到被积函数 $w_1(\lambda)w_2(-(\lambda - t))$。

下面通过例题来说明上述运算过程。

例题2.8　矩形脉冲与指数信号的卷积

令

$$w_1(t) = \Pi\left(\frac{t - \frac{1}{2}T}{T}\right) \quad 和 \quad w_2(t) = \mathrm{e}^{-t/T}u(t)$$

如图2.7所示。按上述三个步骤进行运算并借助图示帮助，可得：当 $t < 0$ 时，$w_1(t)$ 与 $w_2(t)$ 的卷积为零，因为这时 $w_1(\lambda)w_2(-(\lambda - t))$ 对所有的 λ 值都为零。当 $0 < t < T$ 时，式(2.62b)为

$$w_3(t) = \int_0^t 1\,\mathrm{e}^{+(\lambda-t)/T}\mathrm{d}\lambda = T(1-\mathrm{e}^{-t/T})$$

当 $t > T$ 时，式(2.62b)为

$$w_3(t) = \int_0^T 1\,\mathrm{e}^{+(\lambda-t)/T}\mathrm{d}\lambda = T(\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^{-t/T}$$

于是有：

$$w_3(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ T(1-\mathrm{e}^{-t/T}), & 0 < t < T \\ T(\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^{-t/T}, & t < T \end{cases}$$

参见 M 文件 Example2_08. m。上式结果如图 2.7 所示。

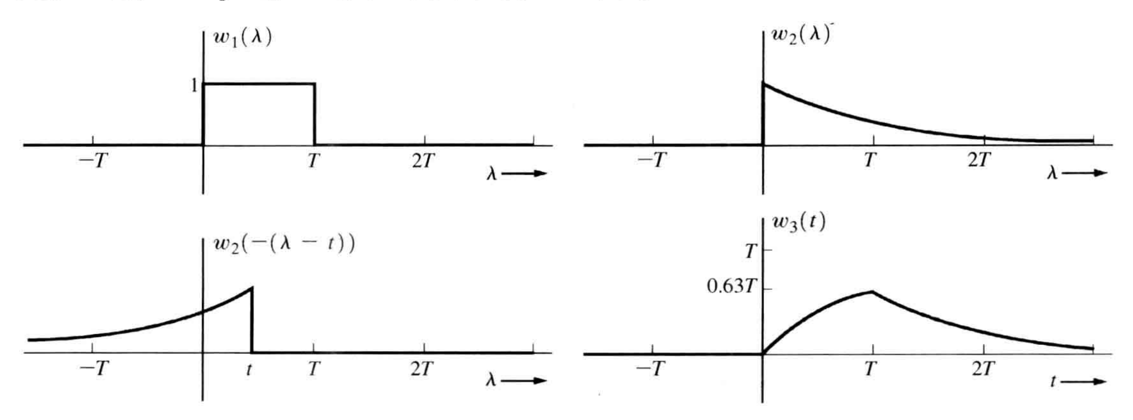


图 2.7 矩形脉冲与指数信号的卷积

例题 2.9 用卷积的方法求三角脉冲的频谱

在例题 2.7 中，三角脉冲的频谱是用积分定理求出的。利用表 2.1 中的卷积定理能够得到相同的结果。如果图 2.6(a) 中的矩形脉冲和它自己进行卷积运算后再乘以常数 $1/T$，得到的卷积时间波形就是图 2.6(c) 中的三角脉冲。应用卷积定理，三角脉冲的频谱为矩形脉冲的频谱(见图 2.6(a))和它自己相乘后再乘以常数 $1/T$。结果正像预期的那样，为图 2.6(c)所示的频谱。

例题 2.10 开关型正弦信号的频谱

在例题 2.5 中看到，连续正弦信号具有线状频谱，线谱位于 $f = \pm f_0$ 处。在本例中，我们将看到当正弦信号接通后又断开时，信号的频谱会发生什么变化。这种开关型正弦信号如图 2.8(a) 所示，并能够用下式来表示：

$$w(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right)A\sin\omega_0 t = \Pi\left(\frac{t}{T}\right)A\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

利用表 2.2 中矩形脉冲的傅里叶变换结果及表 2.1 中的实信号频移定理，我们得到这种开关型正弦信号的频谱为

$$W(f) = \mathrm{j}\frac{A}{2}T[\mathrm{Sa}(\pi T(f+f_0)) - \mathrm{Sa}(\pi T(f-f_0))] \tag{2.63}$$

上式中的频谱图参见 M 文件 Example2_10. m，该频谱为连续的虚函数。信号的振幅频谱如图 2.8 所示。比较图 2.8 中的连续谱与图 2.4(a) 中连续正弦波形的离散谱可以看出，如果开关型正弦信号的持续时间 T 变得非常大(即 $T \to \infty$)，那么图 2.8 中的连续频谱将会变成图 2.4(a) 中的离散频谱，即在 f_0 及 $-f_0$ 处出现两个 δ 函数。

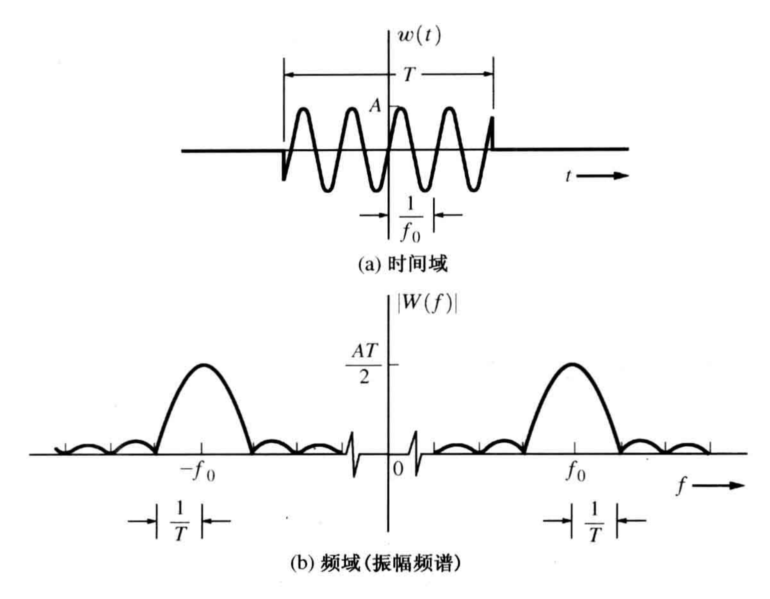


图2.8 开关型正弦信号的波形与频谱

开关型正弦信号的频谱也可以通过卷积的方法得到。应用表2.1中的相乘定理，其中 $w_1(t) = \Pi(t/T)$，$w_2(t) = A\sin\omega_0 t$。这样，根据相乘定理，开关型正弦信号的频谱为波形 $w_1(t)$ 和波形 $w_2(t)$ 对应的频谱在频域中的卷积积分，即

$$W(f) = W_1(f) * W_2(f) = \int_{-\infty}^{\infty} W_1(\lambda) W_2(f-\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$$

上式的结果容易得到，因为波形 $w_2(t)$ 的频谱是由两个 δ 函数组成的。用这种方法求解的详细过程留给读者作为课后习题来完成。

表2.2中给出了一些基本的傅里叶变换对。在2.8节中还将对利用离散傅里叶变换的数值技术进行讨论。

表2.2 基本傅里叶变换对

函　数	时域波形 $w(t)$	频谱 $W(f)$
矩形函数	$\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$	$T[\mathrm{Sa}(\pi f T)]$
三角函数	$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$	$T[\mathrm{Sa}(\pi f T)]^2$
单位阶跃函数	$u(t) \triangleq \begin{cases} +1, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$	$\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{\mathrm{j}2\pi f}$
符号函数	$\mathrm{sgn}(t) \triangleq \begin{cases} +1, & t>0 \\ -1, & t<0 \end{cases}$	$\frac{1}{\mathrm{j}\pi f}$
常数	1	$\delta(f)$
$t = t_0$ 处冲激函数	$\delta(t-t_0)$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t_0}$
sinc 函数	$\mathrm{Sa}(2\pi W t)$	$\frac{1}{2W}\Pi\left(\frac{f}{2W}\right)$
相量函数	$\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_0 t+\varphi)}$	$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\delta(f-f_0)$
正弦函数	$\cos(\omega_c t+\varphi)$	$\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\delta(f-f_c) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}\delta(f+f_c)$
高斯函数	$\mathrm{e}^{-\pi(t/t_0)^2}$	$t_0\,\mathrm{e}^{-\pi(f t_0)^2}$

(续表)

函数	时域波形 $w(t)$	频谱 $W(f)$
单边指数函数	$\begin{cases} e^{-t/T}, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$	$\dfrac{2T}{1+j2\pi fT}$
双边指数函数	$e^{-\lvert t\rvert/T}$	$\dfrac{2T}{1+(2\pi fT)^2}$
冲激序列函数	$\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\delta(t-kT)$	$f_0\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\delta(f-nf_0)$, 其中 $f_0=1/T$

2.3 功率谱密度与自相关函数

2.3.1 功率谱密度

现在，我们要利用一种称为功率谱密度(PSD)的函数，把波形的归一化功率与频谱函数联系起来。PSD在描述信号与噪声的功率受到通信系统中的滤波器及其他器件的影响时非常有用。在式(2.42)中，能量谱密度(ESD)定义为波形振幅频谱的平方。功率谱密度将用类似的方法来定义。由于通信系统中遇到的信号更多的是功率型信号，因此功率谱密度函数比能量谱密度函数更有用。

首先，定义截断型波形为

$$w_T(t)=\begin{cases} w(t), & -T/2<t<T/2 \\ 0, & \text{否则} \end{cases} = w(t)\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \tag{2.64}$$

利用式(2.13)，可以得到归一化的平均功率为

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} w^2(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} w_T^2(t)\,\mathrm{d}t$$

应用式(2.41)给出的帕塞瓦尔定理，上式中的平均功率变为

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}|W_T(f)|^2\,\mathrm{d}f=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\lim_{T\to\infty}\frac{|W_T(f)|^2}{T}\right)\mathrm{d}f \tag{2.65}$$

式中，$W_T(f)=\mathscr{F}[w_T(t)]$。右手边积分式中的被积函数具有W/Hz的量纲(或$V^2$/Hz或$A^2$/Hz)，因而可以定义为功率谱密度。

定义 对一个确定的功率波形，其功率谱密度(PSD)定义为①

$$\mathcal{P}_w(f)\triangleq\lim_{T\to\infty}\left(\frac{|W_T(f)|^2}{T}\right) \tag{2.66}$$

其中，$w_T(t)\leftrightarrow W_T(f)$，$\mathcal{P}_w(f)$的单位为W/Hz。

注意，PSD总是非负的实频率函数。此外，PSD对波形$w(t)$的相位频谱并不敏感，因为相

① 式(2.66)和式(2.67)分别给出了波形归一化(在单位电阻上的)的PSD和平均功率。对非归一化(即实际的)的值，$\mathcal{P}_w(f)$可用以下适当的形式来代替：如果$w(t)$是阻值为$R\ \Omega$的电阻性负载两端的电压波形，这时非归一化的PSD为$\mathcal{P}_w(f)/R$瓦特/赫兹(W/Hz)，其中$\mathcal{P}_w(f)$的单位为V^2/Hz。类似地，如果$w(t)$是阻值为$R\ \Omega$的电阻性负载中的电流波形，这时非归一化的PSD为$\mathcal{P}_w(f)R$ W/Hz，其中$\mathcal{P}_w(f)$的单位为A^2/Hz。

位信息在式(2.66)中进行频谱绝对值运算时丢失了。如果 PSD 以 dB 为单位作图，则与振幅频谱以 dB 为单位作图相似，这是由于 dB 的定义由式(2.15)和式(2.18)给出之故。相似的振幅频谱和 PSD 的图形由 M 文件 Example2_17.m 给出。

由式(2.65)可得波形的归一化平均功率为[①]

$$P = \langle w^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} P_w(f)\,\mathrm{d}f \tag{2.67}$$

即 PSD 函数的积分面积为波形的归一化平均功率。

2.3.2　自相关函数

下面定义一个与功率谱密度有关的函数，称为自相关函数 $R(\tau)$。[②]

定义　实波形(实际波形)的自相关函数为[③]

$$R_w(\tau) \triangleq \langle w(t)w(t+\tau) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} w(t)w(t+\tau)\,\mathrm{d}t \tag{2.68}$$

而且，能够证明波形的功率谱密度与自相关函数的关系为傅里叶变换对，即

$$R_w(\tau) \leftrightarrow \mathcal{P}_w(f) \tag{2.69}$$

其中 $\mathcal{P}_w(f)=\mathcal{F}[R_w(\tau)]$。以上关系称为维纳-欣钦(Wiener-Khintchine)定理。在第 6 章中将对该定理及 $R(\tau)$ 和 $\mathcal{P}_w(f)$ 的性质进行推导。

总之，PSD 能够用下面两种方法中的任意一种得到：

1. 直接法，利用式(2.66)的定义式求出[④]。
2. 间接法，首先求出波形的自相关函数，然后求对应的傅里叶变换：$\mathcal{P}_w(f)=\mathcal{F}[R_w(\tau)]$。

此外，对波形 $w(t)$ 总平均归一化功率的计算，可以用下面公式中表示的四种方法的任意一种来进行：

$$P = \langle w^2(t) \rangle = W_{rms}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} P_w(f)\,\mathrm{d}f = R_w(0) \tag{2.70}$$

例题 2.11　正弦信号的 PSD

令

$$w(t) = A\sin\omega_0 t$$

用间接法来计算波形的 PSD。波形的自相关函数为

---

① 式(2.66)和式(2.67)分别给出了波形归一化(在单位电阻上的)的 PSD 和平均功率。对非归一化(即实际的)的值，$\mathcal{P}_w(f)$ 可用以下适当的形式来代替：如果 $w(t)$ 是阻值为 $R\ \Omega$ 的电阻性负载两端的电压波形，这时非归一化的 PSD 为 $\mathcal{P}_w(f)/R$ 瓦特/赫兹(W/Hz)，其中 $\mathcal{P}_w(f)$ 的单位为 V^2/Hz。类似地，如果 $w(t)$ 是阻值为 $R\ \Omega$ 的电阻性负载中的电流波形，这时非归一化的 PSD 为 $\mathcal{P}_w(f)R$ W/Hz，其中 $\mathcal{P}_w(f)$ 的单位为 A^2/Hz。

② 这里用时间平均来定义自相关函数。在第 6 章，将用集平均(统计平均)来定义自相关函数 $R(\tau)$，并且证明：当 $w(t)$ 满足各态历经性时，这两种定义式是等效的。

③ 复数波形的自相关函数为 $R_w(\tau)\triangleq\langle w^*(t)w(t+\tau)\rangle$。

④ 用直接法计算 PSD 通常比用间接法计算更困难些。

$$R_w(\tau) = \langle w(t)w(t+\tau)\rangle$$
$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A^2 \sin\omega_0 t \sin\omega_0(t+\tau)\,dt$$

利用附录 A 中的三角恒公式，可得到：

$$R_w(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}dt - \frac{A^2}{2}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\cos(2\omega_0 t+\omega_0\tau)\,dt$$

上式可简化为

$$R_w(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau \tag{2.71}$$

因此，波形的 PSD 为

$$\mathcal{P}_w(f) = \mathcal{F}\left[\frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau\right] = \frac{A^2}{4}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)] \tag{2.72}$$

如图 2.9 所示。运行 M 文件 Example2_11. m 得到式(2.72)的 PSD 波形。读者可以比较一下 PSD 与例题 2.5 中正弦电压波形(图 2.4 所示的频谱图)的异同点。

应用式(2.67)可得到波形的平均归一化功率为

$$P = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{A^2}{4}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]\,df = \frac{A^2}{2} \tag{2.73}$$

上式中的结果 $A^2/2$ 与所知的正弦信号归一化功率值是一致的：

$$P = \langle w^2(t)\rangle = W_{\rm rms}^2 = (A/\sqrt{2})^2 = A^2/2 \tag{2.74}$$

此外还可以看出，由于 PSD 中不包含相位信息，因此波形 $A\sin\omega_0 t$ 和波形 $A\cos\omega_0 t$ 的 PSD 是相同的(自相关函数也相同)。这一点可以用与计算波形 $A\sin\omega_0 t$ 的 PSD 相同的方法计算出波形 $A\cos\omega_0 t$ 的 PSD 得到验证。

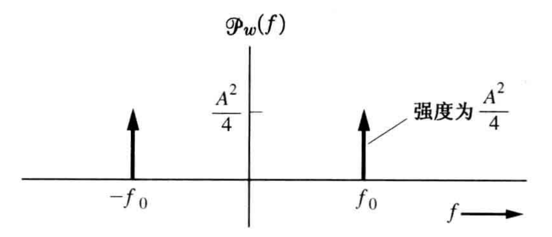


图 2.9 正弦信号的功率谱

到现在为止，我们已经研究了信号与噪声的一些性质，如频谱、平均功率、均方根值等，但是如何去表示信号波形或噪声波形本身呢？直接的方法是写出一个闭合的数学公式来表示信号或噪声波形。另外也常能找出其他一些有用的等效方法。其中一种就是读者在微积分学中已经学习过的方法，用泰勒级数(即幂级数)在 a 点的展开式来表示波形，即

$$w(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^{(n)}(a)}{n!}(t-a)^n \tag{2.75}$$

其中，

$$w^{(n)}(a) = \left|\frac{d^n w(t)}{dt^n}\right|_{t=a} \tag{2.76}$$

如果式(2.76)中的导数在 $t=a$ 时的值存在，那么式(2.75)就可以用来重构波形 $w(t)$。在通信系统中，另外一种特别有用的级数表示方法是正交级数展开，相关内容将在下一节中讨论。

2.4 信号与噪声的正交级数表示

在解决通信系统中遇到的许多问题时，信号与噪声的正交级数表示法得到了非常好的应用，例如在傅里叶级数、抽样函数级数及数字信号的表示上都用到了正交级数表示法。由于这些应用非常重要，因此在以下各节中将对它们进行详细的讨论。

2.4.1 正交函数

在讨论正交级数之前，我们先定义正交函数。

定义　函数 $\varphi_n(t)$ 与 $\varphi_m(t)$ 称为在区间 $a < t < b$ 内是互相正交的，如果它们满足以下条件：

$$\int_a^b \varphi_n(t)\varphi_m^*(t)\,\mathrm{d}t = 0, \qquad n \neq m \tag{2.77}$$

此外，如果函数集 $\{\varphi_n(t)\}$ 中的函数是互相正交的，那么它们也满足以下关系：

$$\int_a^b \varphi_n(t)\varphi_m^*(t)\,\mathrm{d}t = \begin{Bmatrix} 0, & n \neq m \\ K_n, & n = m \end{Bmatrix} = K_n\delta_{nm} \tag{2.78}$$

式中，

$$\delta_{nm} \triangleq \begin{Bmatrix} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{Bmatrix} \tag{2.79}$$

其中，δ_{nm} 称为 Kronecker δ 函数。如果 K_n 的值都为 1，那么 $\varphi_n(t)$ 就称为标准正交函数①。

式(2.77)用来检验函数对之间是否正交。如果两个函数的乘积在区间 $a < t < b$ 内的积分为零，那么这两个函数在该区间上就是正交的。积分为零意味着两个函数之间是“独立的”或“不相关的”。如果积分结果不为零，则两个函数就不是正交的，这意味着这两个函数之间有某些“相关性”或互相之间有些“相像”。

例题 2.12　正交复指数函数

证明复指数函数集 $\{e^{jn\omega_0 t}\}$ 在区间 $a < t < b$ 内是正交的。这里 $b = a + T_0$，$T_0 = 1/f_0$，$\omega_0 = 2\pi f_0$，且 n 为整数。

证明　将 $\varphi_n(t) = e^{jn\omega_0 t}$ 及 $\varphi_m(t) = e^{jm\omega_0 t}$ 代入式(2.77)中，得到：

$$\int_a^b \varphi_n(t)\varphi_m^*(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{a+T_0} e^{jn\omega_0 t}e^{-jn\omega_0 t}\,\mathrm{d}t = \int_a^{a+T_0} e^{j(n-m)\omega_0 t}\,\mathrm{d}t \tag{2.80}$$

当 $n \neq m$ 时，式(2.80)变为

$$\int_a^{a+T_0} e^{j(n-m)\omega_0 t}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{j(n-m)\omega_0 a}\left[e^{j(n-m)2\pi} - 1\right]}{j(n-m)\omega_0} = 0 \tag{2.81}$$

由于 $e^{j(n-m)2\pi} = \cos[2\pi(n-m)] + j\sin[2\pi(n-m)] = 1$，因此式(2.77)是满足的。因而，复指数函数在区间 $a < t < a + T_0$ 内是互相正交的，这里 a 为任意实常数。不过，这些复指数函数在其他的区间(如在 $a < t < a + 0.5T_0$ 内)是不正交的。

此外，当 $n = m$ 时，式(2.80)变为

---

① 将旧函数集中的每个函数 $\varphi_n(t)$ 除以$\sqrt{K_n}$得到新函数 $\varphi_n(t)$ 后，可产生标准化的正交函数集。

$$\int_{a}^{a+T_0} \varphi_n(t)\varphi_n^*(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a}^{a+T_0} 1\,\mathrm{d}t = T_0 \tag{2.82}$$

将式(2.82)代入式(2.78)，发现对所有的 n 值(整数)，都有 $K_n = T_0$。由于 $K_n \neq 1$，因此这些函数 $\varphi_n(t)$ 并不是标准正交集(但它们是正交的)。指数函数的标准正交集可以通过将旧集中的函数尺度变换后得到，这样新集中的函数为：

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T_0}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$$

2.4.2 正交级数

假设用 $w(t)$ 代表某种实际的波形(信号、噪声或信号与噪声的混合物)，我们想在区间 $a < t < b$ 内来表示它。利用下面的定理可以得到等效的正交级数表示法。

定理 $w(t)$ 可以在区间 $a < t < b$ 内用以下级数来表示：

$$w(t) = \sum_n a_n \varphi_n(t) \tag{2.83}$$

式中，正交系数由下式给出：

$$a_n = \frac{1}{K_n}\int_a^b w(t)\varphi_n^*(t)\,\mathrm{d}t \tag{2.84}$$

以上的 n 在整数范围内取值，这些整数值对应完备正交集中正交函数的下标值。

为了使式(2.83)中的级数表示对任意实际信号(即能量受限信号)都有效，正交函数集必须是完备的。这意味着函数集 $\{\varphi_n(t)\}$ 可以以任意小的误差来表示任意的函数[Wylie, 1960]。实际中，通常难以证明给定的函数集是完备的，但能够证明复指数函数集及2.5节中用于傅里叶级数的谐波正弦函数集是完备的[Courant 和 Hilbert, 1953]。还有许多其他的有用函数集也是完备的，如贝塞尔(Bessel)函数集、Legendre 多项式及 $(\sin x)/x$ 型函数集[式(2.161)中描述]。

定理证明 假设用函数集 $\{\varphi_n(t)\}$ 来表示波形是充分的。这样为保证式(2.83)是正确的，只需证明正交系数是可求的。为此对式(2.83)两边进行如下的积分运算：

$$\int_a^b [\cdot]\varphi_m^*(t)\,\mathrm{d}t \tag{2.85}$$

得到下式：

$$\begin{aligned}\int_a^b [w(t)]\varphi_m^*(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^b \left[\sum_n a_n\varphi_n(t)\right]\varphi_m^*(t)\mathrm{d}t \\ &= \sum_n a_n \int_a^b \varphi_n(t)\varphi_m^*(t)\mathrm{d}t = \sum_n a_n K_n \delta_{nm} \\ &= a_m K_m\end{aligned} \tag{2.86}$$

于是，式(2.84)得证。

用正交级数来表示信号、噪声或信号与噪声的混合物非常有用。正交函数 $\varphi_j(t)$ 是确定信号。此外，如果波形 $w(t)$ 为确定信号，那么系数 $\{a_j\}$ 也为确定值，并可以用式(2.84)计算得到。在第6章中将会看到，如果 $w(t)$ 为随机信号(如噪声)，那么系数 $\{a_j\}$ 将为随机变量的集合，由它们确定该随机过程 $w(t)$。

信号 $w(t)$ 也能够由函数 $\varphi_j(t)$ 及系数 a_j 利用式(2.83)产生。这时，信号 $w(t)$ 可以用适当数量的 $\varphi_j(t)$ 函数来逼近。如图 2.10 所示，在 a_j 为实值及 $\varphi_j(t)$ 为实函数的情况下，信号 $w(t)$ 可以通过对函数 $\varphi_j(t)$ 的加权相加得到，这里，加权因子由 $\{a_j\}$ 给定。相加、放大及加权过程可以用具有多输入端的运算放大器方便地实现。

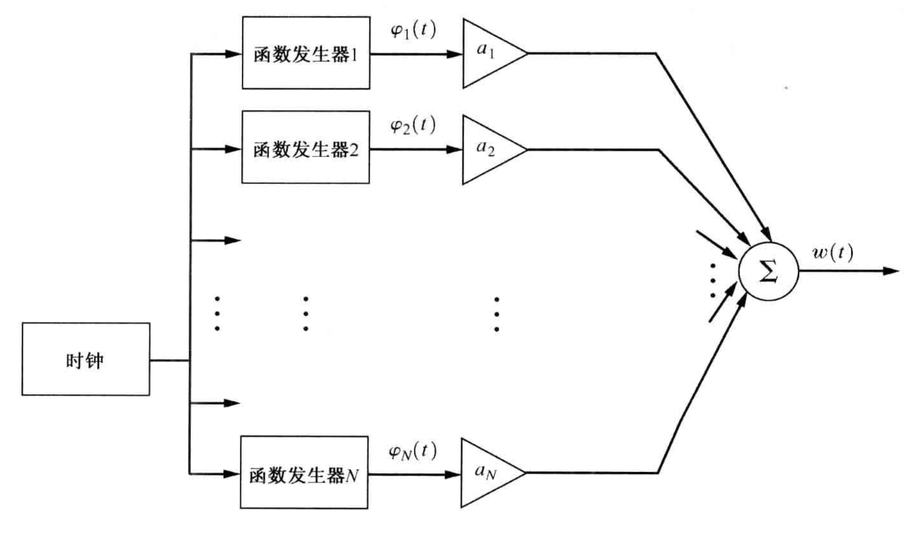


图 2.10　利用正交函数合成波形

2.5　傅里叶级数

傅里叶级数是一种特殊的正交级数，它在解决工程中遇到的问题，特别是通信系统中遇到的问题时非常有用。工程中用到的正交函数为正弦函数或等效的复指数函数。①

2.5.1　复数形式的傅里叶级数

复数形式的傅里叶级数利用了以下的正交指数函数：

$$\varphi_n(t) = e^{jn\omega_0 t} \tag{2.87}$$

式中，n 的取值范围是所有可能的整数，包括负值、正值及零；$\omega_0 = 2\pi/T_0$，其中 $T_0 = (b-a)$ 为级数，即式(2.83)的有效区间长度。在例题 2.12 中，$K_n = T_0$。由式(2.83)得到下面的傅里叶级数定理。

定理　对实际波形(即能量受限波形)来说，可以在区间 $a < t < a + T_0$ 内用复指数傅里叶级数来表示它，即

$$w(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \tag{2.88}$$

其中傅里叶的复系数(相量)为

$$c_n = \frac{1}{T_0}\int_a^{a+T_0} w(t) e^{-jn\omega_0 t}\, dt \tag{2.89}$$

式中，$\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T_0$。

① 数学家们通常把任意正交级数称为傅里叶级数。

当波形 $w(t)$ 是周期为 T_0 的周期信号时，这种傅里叶级数的表示方法在所有的时间域内(即在区间 $-\infty < t < +\infty$ 内)都有效，因为这时 $w(t)$ 和 $\varphi_n(t)$ 都是周期为 T_0 的周期信号。在波形为周期信号的情况下，参数 a 的值可以任意选择。为了计算方便，通常选 $a = 0$ 或 $a = -T_0/2$。频率 $f_0 = 1/T_0$ 称为基波频率，当 $n > 1$ 时，频率 nf_0 称为 n 次谐波频率。傅里叶系数 c_0 的值与波形 $w(t)$ 的直流分量相同，这是因为，当 $n = 0$ 时，式(2.89)与式(2.4)是相同的。

一般来说，c_n 为复数。而且，c_n 是相量，因为它是 $e^{jn\omega t}$ 型函数的系数。因而，式(2.88)称为复数傅里叶级数或相量傅里叶级数。

复数傅里叶级数具有下面一些性质。

1. 如果 $w(t)$ 是实信号，则有：

$$c_n = c_{-n}^* \tag{2.90}$$

2. 如果 $w(t)$ 是实偶信号[即 $w(t) = w(-t)$]，则有：

$$\text{Im}[c_n] = 0 \tag{2.91}$$

3. 如果 $w(t)$ 是实奇信号[即 $w(t) = -w(-t)$]，则有：

$$\text{Re}[c_n] = 0$$

4. 帕塞瓦尔定理为：

$$\frac{1}{T_0}\int_a^{a+T_0} |w(t)|^2 \mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} |c_n|^2 \tag{2.92}$$

定理的证明见式(2.125)。

5. 实信号的傅里叶级数的复系数与正交傅里叶级数的系数之间的关系如下：

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n - \mathrm{j}\frac{1}{2}b_n, & n > 0 \\ a_0, & n = 0 \\ \frac{1}{2}a_{-n} + \mathrm{j}\frac{1}{2}b_{-n}, & n < 0 \end{cases} \tag{2.93}$$

见式(2.96)、式(2.97)及式(2.98)。

6. 实信号的傅里叶级数的复系数与极坐标傅里叶级数的系数之间的关系如下：

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}D \angle\varphi_n, & n > 0 \\ D_0, & n = 0 \\ \frac{1}{2}D_{-n} \angle\varphi_{-n}, & n < 0 \end{cases} \tag{2.94}$$

见式(2.106)和式(2.107)。

注意，傅里叶级数复系数的这些性质与2.2节中讨论的傅里叶变换的性质是类似的。

2.5.2 正交傅里叶级数

在区间 $a < t < a + T_0$ 内表示任意实际波形的傅里叶级数的正交形式为：

$$w(t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \sin n\omega_0 t \tag{2.95}$$

这里的正交函数是 $\cos n\omega_0 t$ 和 $\sin n\omega_0 t$。利用式(2.77)，可得到傅里叶级数的系数为：

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{T_0}\int_a^{a+T_0} w(t)\,\mathrm{d}t, & n = 0 \\ \frac{2}{T_0}\int_a^{a+T_0} w(t)\cos n\omega_0 t\,\mathrm{d}t, & n \geqslant 1 \end{cases} \tag{2.96}$$

及

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_a^{a+T_0} w(t)\sin n\omega_0 t\ \mathrm{d}t,\quad n > 0 \tag{2.97}$$

和前面讨论的情况一样，由于正弦型的正交信号是周期性的，因此正交傅里叶级数也是周期为 T_0 的周期信号。当波形 $w(t)$ 是周期为 T_0 的周期信号时，这种级数表示方法在所有的时间域内（即在区间 $-\infty < t < +\infty$ 内）都有效。

傅里叶级数的复数形式［见式(2.88)］和正交形式［见式(2.95)］是等效的。这一点通过把傅里叶级数的复系数 c_n 表示为互为共轭的两部分 x_n 和 y_n 后就能够说明。即利用式(2.89)可以得到：

$$\begin{aligned} c_n &= x_n + \mathrm{j}y_n \\ &= \left[\frac{1}{T_0}\int_a^{a+T_0} w(t)\cos n\omega_0 t\ \mathrm{d}t\right] + \mathrm{j}\left[\frac{-1}{T_0}\int_a^{a+T_0} w(t)\sin n\omega_0 t\ \mathrm{d}t\right] \end{aligned} \tag{2.98}$$

上式对所有的 n 都成立。于是可得：

$$x_n = \frac{1}{T_0}\int_a^{a+T_0} w(t)\cos n\omega_0 t\ \mathrm{d}t \tag{2.99}$$

和

$$y_n = \frac{-1}{T_0}\int_a^{a+T_0} w(t)\sin n\omega_0 t\ \mathrm{d}t \tag{2.100}$$

利用式(2.96)和式(2.97)，得到以下等式：

$$a_n = \begin{cases} c_0, & n = 0 \\ 2x_n, & n \geqslant 1 \end{cases} = \begin{cases} c_0, & n = 0 \\ 2\,\mathrm{Re}\{c_n\}, & n \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.101}$$

和

$$b_n = -2y_n = -2\,\mathrm{Im}\{c_n\}, n \geqslant 1 \tag{2.102}$$

这里，$\mathrm{Re}\{\cdot\}$ 表示对 $\{\cdot\}$ 求实部，$\mathrm{Im}\{\cdot\}$ 表示对 $\{\cdot\}$ 求虚部。

2.5.3　极坐标傅里叶级数

傅里叶级数的正交形式，即式(2.95)，可以用极坐标（振幅-相位）的形式重新写出

$$w(t) = D_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} D_n\cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \tag{2.103}$$

式中，$w(t)$ 为实信号，并且有：

$$a_n = \begin{cases} D_0, & n = 0 \\ D_n\cos\varphi_n, & n \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.104}$$

$$b_n = -D_n\sin\varphi_n,\quad n \geqslant 1 \tag{2.105}$$

将上面两个公式倒转，得到：

$$D_n = \begin{cases} a_0, & n = 0 \\ \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, & n \geqslant 1 \end{cases} = \begin{cases} c_0, & n = 0 \\ 2|c_n|, & n \geqslant 1 \end{cases} \tag{2.106}$$

和

$$\varphi_n = -\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) = \angle c_n, \ n \geqslant 1 \tag{2.107}$$

这里，用下式定义角度运算：

$$\angle[\cdot] = \arctan\left(\frac{\text{Im}[\cdot]}{\text{Re}[\cdot]}\right) \tag{2.108}$$

应该从上下文中搞清楚符号“$\angle__$”是表示角度运算还是角度本身。例如，$\angle 90°$ 表示 90° 角度，而 $\angle[1+\text{j}2]$ 则表示角度运算，它的计算结果是 63.4°。

各种形式的傅里叶级数的系数是等效的，它们之间的关系如图 2.11 所示。通常，当用傅里叶级数来表示实际的波形 $w(t)$（实信号）时，系数 c_n 为复数，它由实部 x_n 和虚部 y_n 组成（x_n 和 y_n 都是实数），因而，a_n、b_n、D_n 及 φ_n 都是实数。另外，当 $n \geqslant 1$ 时，D_n 为非负数。而且，所有这些系数描述的都是信号中包含的 nf_0 赫兹频率分量的大小。

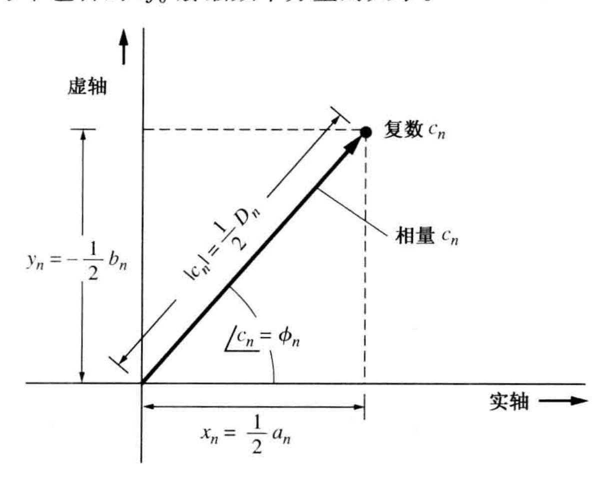


图 2.11　$n \geqslant 1$ 时傅里叶级数的系数

在实际中，傅里叶级数(FS)常被截断为有限项。例如，对方波信号来说，可能用 5 次或 10 次谐波分量来逼近其傅里叶级数。于是，就有一个重要的问题要问：对有限项的傅里叶级数来说，系数的最佳值与无穷级数中对应项的系数是否相同？或者说为了得到最佳的近似效果，有限项傅里叶级数的系数是否应该调整为另一个新的值？这个问题的答案是：截断的有限项傅里叶级数的系数与未截断的无穷级数对应项的系数是相同的①。

正如我们已经看到的那样，傅里叶级数的复数形式、正交形式及极数形式都是等效的。

那么现在的问题是，使用哪种形式最好？答案是，这取决于要解决的具体问题。如果要用解析方法来解决问题，那么用复系数更容易计算。另一方面，如果是在实验室里测量波形，那么用极坐标形式会更方便些。因为测量仪器，如电压表、示波器、矢量电压表及波形分析仪等测出的一般是波形的振幅和相位。利用测量结果，工程师们通常会画出 $f = nf_0, n \geqslant 0$（即只有正频率）时的 D_n 值，得到单边频谱图。当然，也可以利用式(2.94)由 D_n 得到 c_n 的值，并根据 c_n 的值画出双边频谱图。我们要理解，波形的双边谱定义为 $w(t)$ 的傅里叶变换。图 2.4 中说明了这一点，这里要用到式(2.109)给出的定理。

① 对这句话的证明见[Couch, 1995]。

2.5.4 周期波形的线谱

对周期波形来说，在所有的时间域内（即 $-\infty < t < +\infty$），傅里叶级数的表达式都是有效的。因此，波形的（双边）频谱（它取决于 $t=-\infty$ 到 $t=+\infty$ 区间内波形的形状）可以通过计算傅里叶系数得到。

定理 如果波形 $w(t)$ 是周期信号，周期为 T_0，则波形的频谱 $W(f)$ 为：

$$W(f)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n\,\delta(f-nf_0) \tag{2.109}$$

式中，$f_0=1/T_0$，c_n 为式(2.89)中给出的波形的傅里叶系数相量。

证明

$$w(t)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$$

对上式两边求傅里叶变换，得到：

$$\begin{aligned}W(f)&=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\\&=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi(f-nf_0)t}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n\,\delta(f-nf_0)\end{aligned}$$

这里，用到了式(2.48)中关于 δ 函数积分的表达式。

该定理指出，周期函数的频谱中总包含有线谱（δ 函数）分量，线谱位于 $f=nf_0$ 处，线谱的幅度值为 c_n。例题 2.5 中表明了函数的这种性质，其中 $c_1=-\mathrm{j}A/2$，$c_{-1}=\mathrm{j}A/2$，其他的 c_n 值为零。由于在 $f=0$ 处没有线谱（即 $c_0=0$），因此，信号中明显地没有直流分量。反过来说，如果函数中不包含周期分量，那么函数的频谱将是连续的（没有线谱），除非函数中有直流分量时在 $f=0$ 处存在线谱。

也可以通过对脉冲函数的傅里叶变换进行抽样来计算傅里叶系数，该脉冲函数是 $w(t)$ 在一个周期内的信号。这将在下面的定理中得到证明。

定理 如果 $w(t)$ 为周期函数，周期为 T_0，并用下式来表示：

$$w(t)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} h(t-nT_0)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t} \tag{2.110}$$

其中，

$$h(t)=\begin{cases}w(t), & |t|<\dfrac{T_0}{2}\\ 0, & \text{否则}\end{cases} \tag{2.111}$$

那么，$w(t)$ 的傅里叶系数将由下式给出：

$$c_n=f_0H(nf_0) \tag{2.112}$$

式中，$H(f)=\mathscr{F}[h(t)]$，$f_0=1/T_0$。

证明

$$w(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t-nT_0)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t)*\delta(t-nT_0) \tag{2.113}$$

式中，*号表示卷积运算。于是有：

$$w(t) = h(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) \tag{2.114}$$

这里的冲激序列本身可以用傅里叶级数来表示①，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \tag{2.115}$$

式中的傅里叶系数都为 $c_n = f_0$。将式(2.115)代入式(2.114)，得到：

$$w(t) = h(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0 e^{jn\omega_0 t} \tag{2.116}$$

对式(2.116)两边求傅里叶变换，有

$$\begin{aligned} W(f) &= H(f) \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0 \delta(f - nf_0) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [f_0 H(nf_0)] \delta(f - nf_0) \end{aligned} \tag{2.117}$$

比较式(2.117)与式(2.109)，可以看出，式(2.112)成立。

当周期波形 $w(t)$ 的基本脉冲信号 $h(t)$ 的傅里叶变换已知或由傅里叶变换表(见表2.2)能够容易地得到时，用该定理来计算周期波形的傅里叶系数是有用的。

例题 2.13 周期矩形波的傅里叶系数

试求图2.12(a)所示的周期矩形波的傅里叶系数，其中 T 为脉冲宽度，$T_0 = 2T$ 为周期。由式(2.89)，可得到波形的傅里叶复系数为：

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} A e^{-jn\omega_0 t} dt = j \frac{A}{2\pi n} (e^{-jn\pi} - 1) \tag{2.118}$$

上式可简化为(当 $n = 0$ 时，应用洛必达法准则来计算未定元)：

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{A}{2}, & n = 0 \\ -j\dfrac{A}{n\pi}, & n = \text{奇数} \\ 0, & \text{否则} \end{cases} \tag{2.119}$$

这些傅里叶系数的计算过程和结果图见 M 文件 Example2_13.m。

式(2.119)可用式(2.112)及例题2.6的结果来验证。把 $T_0 = 2T$ 的关系代入，可得：

$$c_n = \frac{A}{T_0} V(nf_0) = \frac{A}{2} e^{-jn\pi/2} \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi/2} \tag{2.120}$$

上式与式(2.119)是等效的。可以看出波形的直流分量为 $c_0 = A/2$，这可用式(2.4)得到的结果来验证。

例题 2.14 比较矩形脉冲和方波②的频谱

注意：这里是对非周期波形和周期波形的频谱进行比较。非周期波形的频谱是连续的，而周期波形的频谱是分离的(即 δ 函数)。

---

① 这称为泊松求和公式。

② 周期矩形波。——译者注

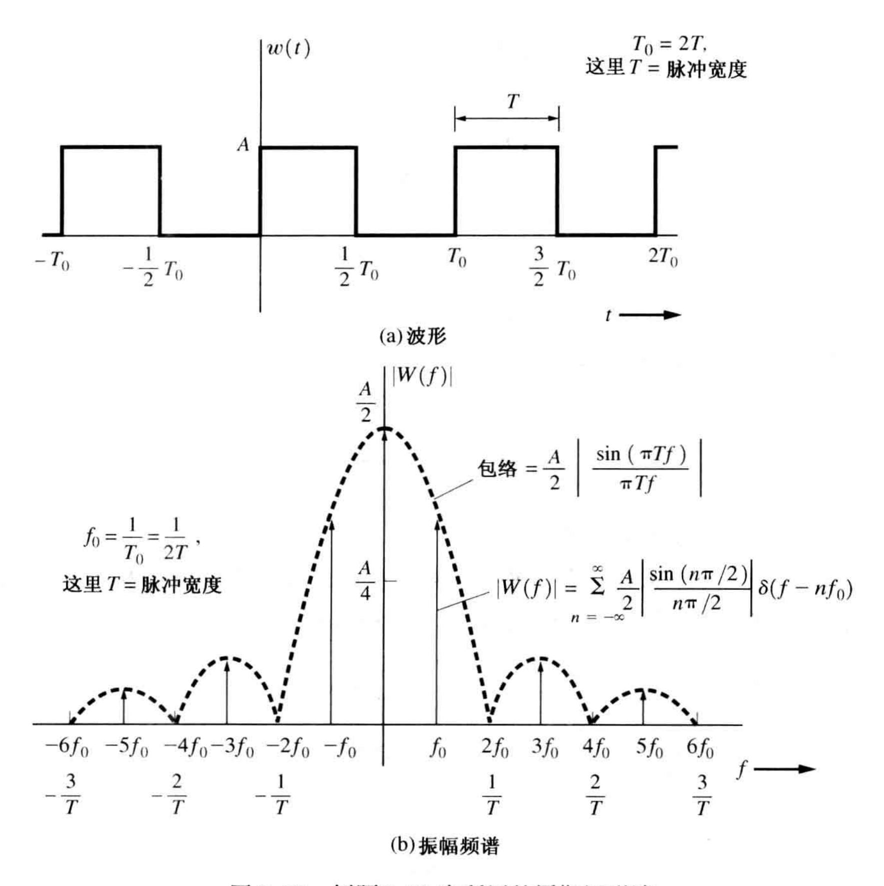


图 2.12　例题 2.13 中所用的周期矩形波

由式(2.109)可容易地得到方波的频谱。其中振幅频谱如图 2.12(b)中的实线所示。由于 δ 函数的值为无穷大，因此无法直接画出，但 δ 函数的强度可以用图 2.12(b)所示的虚线方式标出。计算过程见 M 文件 Example2_14. m。

现在比较该周期矩形波的频谱[图 2.12(b)中的实线]与矩形脉冲的频谱[见图 2.6(a)]。我们注意到，周期矩形波的频谱为线谱，而矩形脉冲的频谱为连续谱，并且两种情况下的频谱包络具有相同的 $|(\sin x)/x|$（其中，$x = \pi Tf$）形状。因此，两种情况下的零点带宽(对包络而言)都为 $1/T$，其中 T 为脉冲的宽度。这是矩形脉冲波形数字传输时的基本性质，即零点带宽为脉冲宽度的倒数。

其他形式的傅里叶系数也可以得到。利用式(2.101)及式(2.102)，可得到正交傅里叶系数为：

$$a_n = \begin{cases} \frac{A}{2}, & n = 0 \\ 0, & n > 0 \end{cases} \tag{2.121a}$$

$$b_n = \begin{cases} \frac{2A}{\pi n}, & n = \text{奇数} \\ 0, & n = \text{偶数} \end{cases} \tag{2.121b}$$

这里，除 $n = 0$ 外，所有的 $a_n = 0$。这是因为如果没有直流分量的话，波形就成为对原点的奇函数了。利用式(2.106)及式(2.107)，还可得到极坐标形式的傅里叶系数为：

$$D_n = \begin{cases} \dfrac{A}{2}, & n = 0 \\ \dfrac{2A}{n\pi}, & n = 1, 3, 5, \cdots \\ 0, & \text{否则} \end{cases} \tag{2.122}$$

和

$$\varphi_n = -90^\circ \qquad n \geqslant 1 \tag{2.123}$$

在解决通信系统中遇到的问题时，常需要用到归一化的平均功率。对周期波形来说，归一化的平均功率能够利用傅里叶系数来计算。

定理 对周期波形 $w(t)$ 来说，其归一化功率由下式给出：

$$P_w = \langle w^2(t) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} |c_n|^2 \tag{2.124}$$

其中，$\{c_n\}$ 为波形 $w(t)$ 的傅里叶复系数。

证明 对周期波形 $w(t)$ 来说，其傅里叶级数的表达式在所有的时间域内都有效。将波形的傅里叶级数表达式代入式(2.12)，计算出波形的归一化(即 $R = 1\ \Omega$)功率为：

$$P_w = \left\langle \left(\sum_n c_n e^{jn\omega_0 t} \right)^2 \right\rangle = \left\langle \sum_n \sum_m c_n c_m^* e^{jn\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t} \right\rangle$$

$$= \sum_n \sum_m c_n c_m^* \langle e^{j(n-m)\omega_0 t} \rangle = \sum_n \sum_m c_n c_m^* \delta_{nm} = \sum_n c_n c_n^*$$

或

$$P_w = \sum_n |c_n|^2 \tag{2.125}$$

式(2.124)是式(2.40)的帕塞瓦尔定理在波形为功率信号时的特殊情况。

例题 2.15 方波的平均功率

利用式(2.125)，计算方波的近似平均功率。将该近似功率值和准确值进行比较。计算过程及结果见 M 文件 Example2_15.m。

2.5.5 周期波形的功率谱密度

定理 对周期波形来说，功率谱密度(PSD)为：

$$\mathcal{P}(f) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} |c_n|^2 \delta(f - nf_0) \tag{2.126}$$

其中，$T_0 = 1/f_0$ 为波形的周期，$\{c_n\}$ 为波形的傅里叶复系数。

证明 令 $w(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$，则波形 $w(t)$ 的自相关函数为：

$$R(\tau) = \langle w^*(t) w(t + \tau) \rangle$$

$$= \left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* e^{-jn\omega_0 t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{jm\omega_0 (t+\tau)} \right\rangle$$

或

$$R(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_n^* c_m e^{jm\omega_0 \tau} \langle e^{j\omega_0 (m-n) t} \rangle$$

由于，$\langle e^{j\omega_0(n-m)t}\rangle = \delta_{nm}$，故上式可简化为：

$$R(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 e^{jn\omega_0\tau} \tag{2.127}$$

于是，波形的 PSD 为：

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(f) &= \mathcal{F}[R(\tau)] = \mathcal{F}\left[\sum_{-\infty}^{\infty}|c_n|^2 e^{jn\omega_0\tau}\right] \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty}|c_n|^2\mathcal{F}[e^{jn\omega_0\tau}] = \sum_{-\infty}^{\infty}|c_n|^2\delta(f - nf_0)\end{aligned} \tag{2.128}$$

式(2.126)不仅给出了计算周期波形 PSD 的方法，而且可以用来计算波形的带宽。例如，可以求出包含 90% 波形功率的频率间隔。

例题 2.16　方波信号的 PSD

可以求出图 2.12(a)所示的周期方波的 PSD。由于波形是周期的，因此能够用式(2.126)来计算波形的 PSD。这样，就变成了求解傅里叶系数的问题了。式(2.120)给出了波形的傅里叶系数，于是有：

$$\mathcal{P}(f) = \sum_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{A}{2}\right)^2\left(\frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi/2}\right)^2\delta(f - nf_0) \tag{2.129}$$

波形的 PSD 如图 2.13 中的实线所示，图中的 δ 函数(它的振幅值为无穷大)用高度等于 δ 函数强度(即面积)的垂直线来表示。PSD 的图形见 M 文件 Example2_16. m 的运行结果。

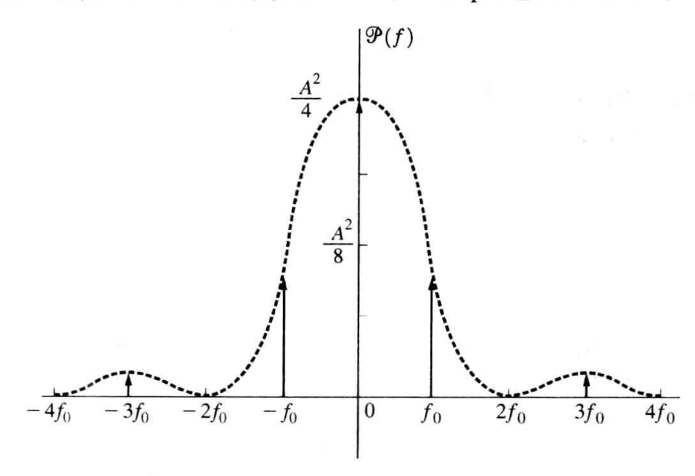


图 2.13　例题 2.16 中方波信号的 PSD

2.6　线性系统回顾

2.6.1　线性时不变系统

如果滤波器或系统满足叠加性质，就称它们为线性滤波器或线性系统。即有下式成立：

$$y(t) = \mathcal{L}[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)] = a_1\mathcal{L}[x_1(t)] + a_2\mathcal{L}[x_2(t)] \tag{2.130}$$

其中，$y(t)$ 为系统的输出，$x(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$ 为系统的输入，如图 2.14 所示。符号 $\mathcal{L}[\cdot]$ 表示线性系统(用微分方程描述)对 $[\cdot]$ 做线性运算。如果系统的输入延迟一定的时间，为 $x(t-t_0)$，

系统的输出也延迟相同的时间，为 $y(t-t_0)$，那么该系统就称为时不变的。也就是说，系统的时不变性是指无论输入信号何时加入，系统的响应波形都是相同的。

对线性系统的理论与实践的详细讨论超出了本书范围，这需要专门的教材[Irwin，1995，2011]。不过，我们这里将回顾一下与通信系统特别有关的一些基本概念。

2.6.2 冲激响应

对没有延迟单元的线性时不变系统而言，可以用线性常系数微分方程来描述，也可以用系统的冲激响应 $h(t)$ 来描述。冲激响应是当激励为狄拉克 δ 函数时微分方程的解。即当 $x(t)=\delta(t)$ 时，$y(t)=h(t)$。在实际的网络中，冲激响应是因果信号。也就是说，当 $t<0$ 时，$h(t)=0$①。当输入信号不是冲激函数时，可以用冲激响应来得到系统的输出。这种情况下，一般的输入波形可以用下式来近似②：

$$x(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}x(n\,\Delta t)[\delta(t-n\,\Delta t]\,\Delta t \tag{2.131}$$

上式表明，输入信号以 Δt 秒的时间间隔进行抽样。于是，利用系统的时不变及叠加性质，可以得到系统的输出近似为：

$$y(t)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n\,\Delta t)[h(t-n\,\Delta t)]\,\Delta t \tag{2.132}$$

当 Δt 为零时，上式变为精确结果。令 $n\Delta t=\lambda$，得到下式：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\lambda)h(t-\lambda)\,d\lambda\equiv x(t)*h(t) \tag{2.133}$$

正如在 2.2 节中由式(2.62)首先描述的那样，这种类型的积分称为卷积运算。也就是说，线性时不变系统的输出波形可由输入波形与冲激响应的卷积得到。因此，冲激响应可以在时域内用来表征系统的响应，如图 2.14 所示。

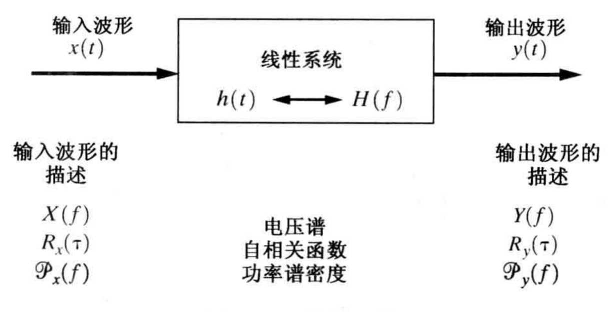


图 2.14 线性系统

2.6.3 传输函数

对式(2.133)两边求傅里叶变换得到系统输出信号的频谱。利用表 2.1 中的卷积定理，我们得到：

---

① Paley-Wiener 准则给出了对应时域因果条件的频域等效条件。它要求 $H(f)$ 必须满足下面的关系：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\ln|H(f)||}{1+f^2}\,df<\infty$$

② Δt 对应式(2.47)中的 dx。

$$Y(f) = X(f)H(f) \tag{2.134}$$

或

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} \tag{2.135}$$

式中，$H(f) = \mathscr{F}[h(t)]$ 称为网络的传输函数或频率响应，即冲激响应与频率响应之间是傅里叶变换对：

$$h(t) \leftrightarrow H(f)$$

当然，传输函数一般为复函数，并能够用极坐标形式表示为：

$$H(f) = |H(f)| e^{j\angle H(f)} \tag{2.136}$$

其中，$|H(f)|$ 为幅度（或振幅）响应，而

$$\theta(f) = \angle H(f) = \arctan\left[\frac{\text{Im}\{H(f)\}}{\text{Re}\{H(f)\}}\right] \tag{2.137}$$

为网络的相位响应。此外，由于 $h(t)$ 为实时间函数（对实际网络），因此，由式(2.38)及式(2.39)可知，$|H(f)|$ 为频率的偶函数，$\angle H(f)$ 为频率的奇函数。

线性时不变网络的传输函数能够用正弦测试信号测量得到。测量时，让测试信号的频率值在我们关心的频带范围内扫描变化。例如，如果：

$$x(t) = A\cos\omega_0 t$$

那么，网络的输出将为：

$$y(t) = A|H(f_0)|\cos[\omega_0 t + \angle H(f_0)] \tag{2.138}$$

这里，传输函数的振幅和相位可以在示波器上观察到或用矢量电压表测得。

如果网络的输入为周期信号，其频谱由下式给出：

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n \delta(f - nf_0) \tag{2.139}$$

其中，$\{c_n\}$ 为输入信号的傅里叶复系数，那么，由式(2.134)可以得到输出的周期信号的频谱为：

$$Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n H(nf_0)\delta(f - nf_0) \tag{2.140}$$

我们也能够得到线性时不变网络输入信号的功率谱密度 $\mathscr{P}_x(f)$ 与输出信号的功率谱密度 $\mathscr{P}_y(f)$ 之间的关系①。由式(2.66)可知：

$$\mathscr{P}_y(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}|Y_T(f)|^2 \tag{2.141}$$

利用式(2.134)，得到：

$$\mathscr{P}_y(f) = |H(f)|^2 \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}|X_T(f)|^2$$

或

$$\mathscr{P}_y(f) = |H(f)|^2 \mathscr{P}_x(f) \tag{2.142}$$

因此，网络的功率传输函数为：

---

① 网络的输入信号与输出信号的自相关函数 $R_x(\tau)$ 与 $R_y(\tau)$ 之间的关系也能够得到，参见式(6.82)。

$$G_h(f) = \frac{\mathcal{P}_y(f)}{\mathcal{P}_x(f)} = |H(f)|^2 \tag{2.143}$$

第6章对该定理进行了严格证明。

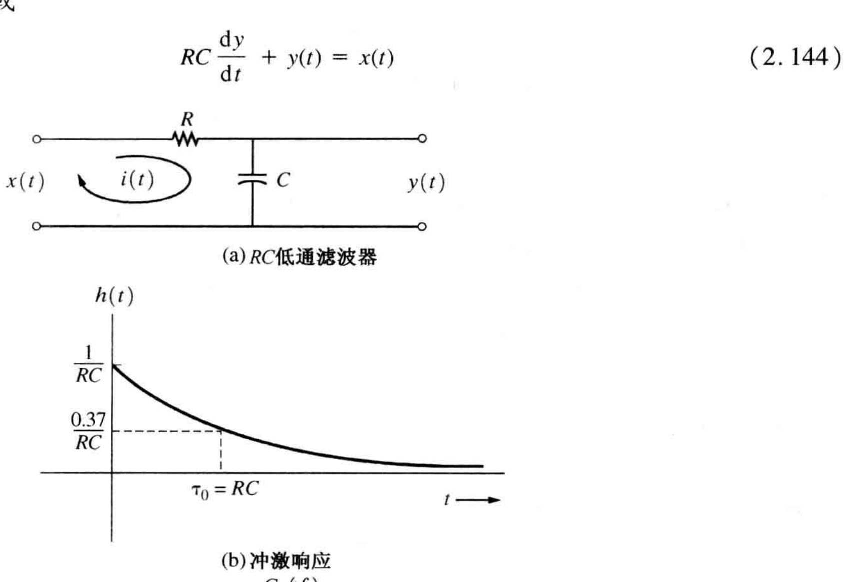
例题 2.17　*RC* 低通滤波器

图 2.15 所示为一 *RC* 低通滤波器，其中 $x(t)$ 与 $y(t)$ 分别为输入和输出电压波形。对电路应用基尔霍夫(Kirchhoff)电压定理，得到：

$$x(t) = Ri(t) + y(t)$$

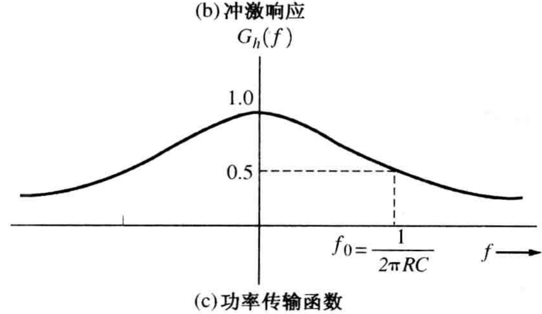
其中，$i(t) = C\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$，或

$$RC\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y(t) = x(t) \tag{2.144}$$



(a) *RC*低通滤波器

(b) 冲激响应



(c) 功率传输函数

图 2.15　*RC* 低通滤波器特性

由表 2.1，我们得到上式微分方程的傅里叶变换为：

$$RC(\mathrm{j}2\pi f)y(f) + Y(f) = X(f)$$

于是，网络的传输函数为：

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}(2\pi RC)f} \tag{2.145}$$

利用表 2.2 中的傅里叶变换关系，我们得到网络的冲激响应为：

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau_0}\mathrm{e}^{-t/\tau_0}, & t \geqslant 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \tag{2.146}$$

式中，$\tau_0 = RC$ 为时间常数。把式(2.143)与式(2.145)结合起来，我们得到网络的功率传输函数为：

$$G_h(f) = |H(f)|^2 = \frac{1}{1+(f/f_0)^2} \tag{2.147}$$

式中，$f_0 = 1/(2\pi RC)$。

冲激响应与功率传输函数如图 2.15 所示。详图见 M 文件 Example2_17.m 的运行结果。注意，在 $f = f_0$（称为 3 dB 频率）处，功率增益的值为 $G_h(f_0) = \frac{1}{2}$。也就是说，输出波形在 $f = f_0$ 处的频率分量与在 $f = 0$ 处的频率分量相比衰减了 3 dB。因此，$f = f_0$ 称为滤波器的 3 dB 带宽。有关带宽的话题将在 2.9 节中详细讨论。

2.6.4　无失真传输

在通信系统中，常希望信道是无失真的。这意味着信道的输出信号与输入信号的延迟形式成正比，即

$$y(t) = Ax(t - T_d) \tag{2.148}$$

其中，A 为信道增益（它可以小于 1），T_d 为信道时延。

对式(2.148)两边求傅里叶变换，得到相应的频域内无失真传输条件为：

$$Y(f) = AX(f)e^{-j2\pi fT_d}$$

于是，对无失真传输的信道来说，要求信道的传输函数为：

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = Ae^{-j2\pi fT_d} \tag{2.149}$$

这意味着，线性时不变系统为了得到无失真的输出，必须满足两个条件：

1. 幅度响应为平坦的，即

$$H(f)| = 常数 = A \tag{2.150a}$$

2. 相位响应为频率的线性函数，即

$$\theta(f) = \angle H(f) = -2\pi fT_d \tag{2.150b}$$

当第一个条件满足时，振幅不失真；当第二个条件满足时，相位不失真。对无失真传输系统来说，这两个条件必须同时满足。

对第二个条件常用时延的方法来等效地描述。我们定义系统的时延为：

$$T_d(f) = -\frac{1}{2\pi f}\theta(f) = -\frac{1}{2\pi f}\angle H(f) \tag{2.151}$$

由式(2.149)可得，无失真传输时，要求

$$T_d(f) = 常数 \tag{2.152}$$

如果 $T_d(f)$ 不为常数，那么就有相位失真，因为这时相位响应 $\theta(f)$ 不是频率的线性函数。

例题 2.18　由滤波器引起的失真

让我们分析一下例题 2.17 中的 RC 低通滤波器对信号造成失真的情况。由式(2.145)，得到滤波器的振幅响应为：

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1+(f/f_0)^2}} \tag{2.153}$$

相位响应为：

$$\theta(f) = \underline{/H(f)} = -\arctan(f/f_0) \tag{2.154}$$

相应的时延函数为：

$$T_d(f) = \frac{1}{2\pi f}\arctan(f/f_0) \tag{2.155}$$

这些结果如图2.16中的实线所示。详图见M文件Example2_18.m的运行结果。由于不满足式(2.150a)及式(2.150b)，因此该滤波器将会引起信号的失真。图中的虚线所示为无失真滤波器的等效结果。由图可以观察到以下几点：首先，如果信号的频谱分量在$0.5f_0$以内，那么滤波器几乎不产生失真。因为这时振幅响应误差(与无失真条件下相比)小于0.5 dB，相位误差小于2.1°(8%)。对$f < f_0$的频率分量来说，振幅响应误差小于3 dB，相位误差小于12.3°(27%)。在实际工程中，这种类型的误差通常认为是可容忍的。对频谱分量小于$0.5f_0$的波形来说，大约延时$1/(2\pi f_0)$，如图2.16(c)所示。即如果滤波器的截止频率为$f_0 = 1$ kHz，时延将为0.2 ms。对宽带信号来说，高端频率分量的时延比低端频率分量的时延要小。

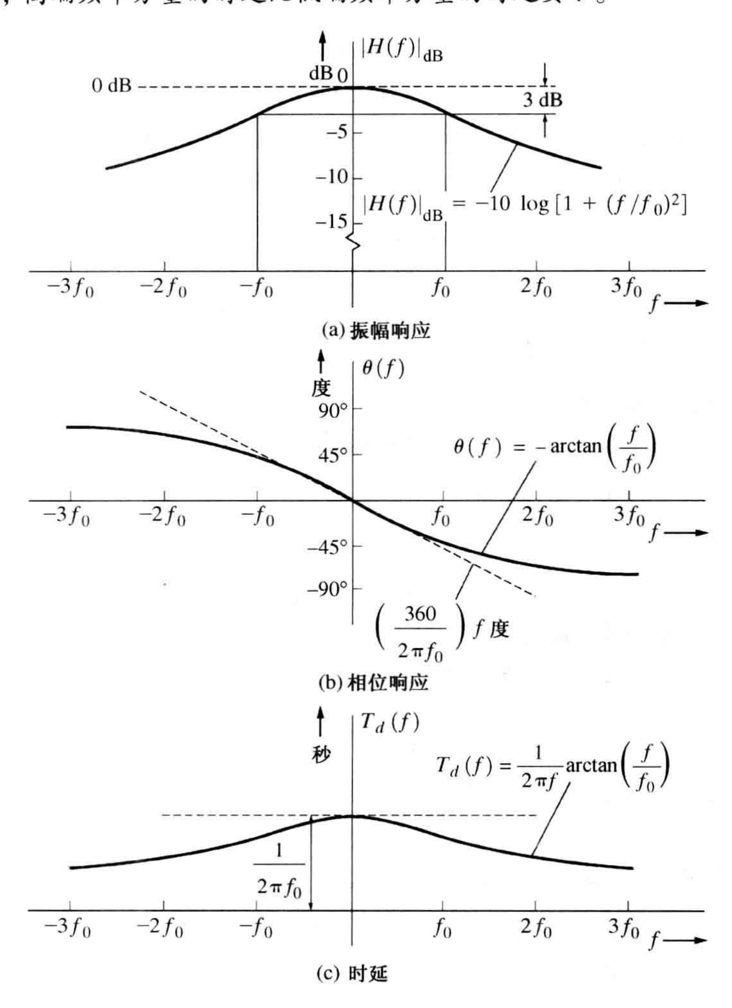


图2.16 *RC*低通滤波器引起的失真

2.6.5　音频、视频及数据信号的失真

如果线性时不变系统的振幅响应不平坦，就会产生振幅失真；如果相位响应不为频率的线性函数，就会产生相位失真(即时延不均匀)。

在音频系统中，人耳对音频信号的幅度失真比较敏感，而对相位失真并不敏感。这是因为对音频滤波器来说，15°的相位误差在频率为 15 kHz 时产生的时延误差大约是 3 μs。这个由于滤波器的相位响应不理想引起的时延误差数值，与时长为 0.01 ~0.1 s 的语音音节相比可以忽略不计。但是，人耳对音频信号 3 dB 的幅度误差肯定能够听出来。因此，在高保真音频放大器线性失真量的技术要求中，人们最关心的是非平坦振幅频率响应特性，而并不太在意相位响应特性。

在模拟视频系统中，情况和在音频系统中的恰好相反。即相位响应是人们关心的重点。这是因为人的眼睛对引起物体图像边缘模糊的时延误差，比对引起强度变化的振幅误差更敏感。

对数据信号来说，线性滤波器能够引起一个时隙中的数字脉冲影响相邻时隙的脉冲信号，从而造成码间串扰(ISI)。在本书的 3.6 节中将讨论减小码间串扰的滤波器的设计方法。

如果系统是非线性的或时变的，那么将会产生其他类型的失真。其结果是在系统的输出端产生了输入端没有的新的频率分量。但在有些通信应用场合，希望得到这些新的频率分量，因此，这时就不能称为失真。对这种情况，读者可阅读 4.3 节中的相关内容。在本书的 4.5 节中讨论了带通滤波器的时延特性，并导出了群时延和相位时延的计算公式。

2.7　带限信号与噪声

带限波形只在特定的频率范围内有非零的频谱分量。在这种情况下，我们可以用一些非常有用的定理，特别是抽样定理来处理这种波形。正如第 3 章中讨论的那样，这些方法特别适合于解决数字通信系统中遇到的问题。

下面首先分析带限信号的一些性质，然后研究抽样定理和维数定理。

2.7.1　带限波形

定义　如果波形 $w(t)$ 满足下面的条件，就称 $w(t)$ 是带限在 B 赫兹的(绝对地)带限波形。

$$W(f) = F[w(t)] = 0, \qquad |f| \geq B \tag{2.156}$$

定义　如果波形 $w(t)$ 满足下面的条件，就称 $w(t)$ 是(绝对地)时限波形。

$$w(t) = 0, \qquad |t| > T \tag{2.157}$$

定理　绝对带限波形不可能是绝对时限波形，反之亦然。

例题 2.6 中的矩形脉冲波形的频谱说明了该定理。利用否定法能够比较简单地证明该定理[Wozencraft 和 Jacobs，1965]。

上面的定理提出了工程上的一个反论。我们知道，带限波形不可能是时限波形。但是，我们认为实际的波形是时限的。因为产生波形的仪器是在过去某个时刻制造出来的，在将来的某个时刻它将会被损坏，因而仪器产生的波形是时限的。可以这样来解释这个反论，我们用数学模型来模拟实际波形时，尽管认为模型中的假设条件是满足的，然而或许它们并不满足。也就是说，由于测量仪器的不精确性，实际的时间波形及其频谱看起来有些不确定，特别是在时域

及频域内的极值位置上。在 David Slepian[1976]的一篇有趣的论文中，对实际波形与数学模型之间的这种关系进行了讨论。尽管波形可能不是绝对的带限信号，但对实际的系统来说，可以认为它是带限的，因为在超出某个频率值以后，波形的振幅频谱的值很小，可以忽略。

另外一个有趣的定理是说，如果 $w(t)$ 为绝对带限波形，那么它应该是解析函数。所谓解析函数是指对任意有限的 t 值来说，其导数为有限值的函数。这个定理可以用泰勒级数的展开式来证明[Wozencraft 和 Jacobs，1965]。

2.7.2 抽样定理

抽样定理适用于数字通信系统，是最有用的定理之一。抽样定理是正交级数展开式的另一种应用。

抽样定理 在区间 $-\infty < t < \infty$ 内，任意的实际波形可以用下式来表示：

$$w(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} a_n \frac{\sin\{\pi f_s[t-(n/f_s)]\}}{\pi f_s[t-(n/f_s)]} \tag{2.158}$$

其中

$$a_n = f_s \int_{-\infty}^{\infty} w(t) \frac{\sin\{\pi f_s[t-(n/f_s)]\}}{\pi f_s[t-(n/f_s)]} \mathrm{d}t \tag{2.159}$$

这里f_s 为指定了某一适当值的大于零的参数。此外，如果 $w(t)$ 是带限在 B 赫兹的带限信号，且参数 $f_s \geq 2B$，那么式(2.158)就变成了抽样函数的表示式，其中：

$$a_n = w(n/f_s) \tag{2.160}$$

也就是说，当$f_s \geq 2B$ 时，正交级数的系数简单地变成了波形以 $1/f_s$ 秒的抽样间隔抽样时得到的波形值。

由式(2.158)及式(2.160)给出的级数有时称为基本级数。数学家们至少从 1915 年[Whittaker，1915]起就知道了这种级数。自从香农所做的开创性工作以来，工程师们认识到这种级数。香农将这种级数与信息论[Shannon，1949]联系了起来。IEEE 会刊(Proceedings of the IEEE)[Jerri，1977]对此论题发表了一篇优秀的指导论文。

例题 2.19 对矩形脉冲的抽样定理

利用式(2.158)，计算由根据抽样定理抽取的矩形脉冲的样本而产生的波形。计算过程见 M 文件 Example2_19.m 的运行结果。

抽样定理的证明

我们需要证明：

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin\{\pi f_s[t-(n/f_s)]\}}{\pi f_s[t-(n/f_s)]} \tag{2.161}$$

组成了一个正交函数集。于是，由式(2.77)必须证明式(2.161)满足下式：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t)\varphi_m^*(t)\mathrm{d}t = K_n \delta_{nm} \tag{2.162}$$

利用式(2.40)中的帕塞瓦尔定理，可以看出上式的左边为：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t)\varphi_m^*(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(f)\Phi_m^*(f)\,\mathrm{d}f \tag{2.163}$$

其中

$$\Phi_n(f) = \mathscr{F}[\varphi_n(t)] = \frac{1}{f_s}\Pi\left(\frac{f}{f_s}\right)e^{-j2\pi(nf/f_s)} \tag{2.164}$$

于是，我们有：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n(t)\varphi_m^*(t)\,dt = \frac{1}{(f_s)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\Pi\left(\frac{f}{f_s}\right)\right]^2 e^{-j2\pi(n-m)f/f_s}\,df$$

$$= \frac{1}{(f_s)^2}\int_{-f_s/2}^{f_s/2} e^{-j2m(n-m)(f/f_s)}df = \frac{1}{f_s}\delta_{nm} \tag{2.165}$$

因此，式(2.161)中给出的 $\varphi_n(t)$ 是 $K_n = 1/f_s$ 的正交函数。由式(2.84)看出式(2.159)成立。此外，我们将证明当 $w(t)$ 是 B 赫兹的绝对带限波形且参数 $f_s \geqslant 2B$ 时，式(2.160)成立。利用式(2.84)及式(2.40)中的帕塞瓦尔定理，得到：

$$\begin{aligned} a_n &= f_s\int_{-\infty}^{\infty} w(t)\varphi_n^*(t)\,dt \\ &= f_s\int_{-\infty}^{\infty} W(f)\Phi_n^*(f)\,dt \end{aligned} \tag{2.166}$$

将式(2.164)代入上式得到：

$$a_n = \int_{-f_s/2}^{f_s/2} W(f)e^{+j2\pi f(n/f_s)}\,df \tag{2.167}$$

但是，由于当 $|f| > B$ 时 $W(f)$ 为零，这里 $B \leqslant f_s/2$，因此，上式右边的积分区间可以扩展到 $(-\infty, \infty)$，而不会改变积分结果。这样，上式中的积分正好是 $W(f)$ 在 $t = n/f_s$ 时的傅里叶反变换。因而有 $a_n = w(n/f_n)$，即式(2.160)。

由式(2.167)可以明显地看出，允许无误地重建带限波形的最小抽样速率为：

$$(f_s)\min = 2B \tag{2.168}$$

该频率称为奈奎斯特(Nyquist)频率。

现在，我们研究利用 N 个抽样值来重建带限波形的问题。假设我们只关心 T_0 秒时间段内的带限波形的重建问题，如图 2.17(a)所示。于是，我们可以截断式(2.158)中的抽样函数级数，使得在 T_0 时间段内的具有峰值的 $\varphi_n(t)$ 函数的数量仅为 N 个。也就是说，波形能够用 N 个抽样值来近似重建。这时有公式：

$$w(t) \approx \sum_{n=n_1}^{n=n_1+N} a_n\varphi_n(t) \tag{2.169}$$

其中，$\{\varphi_n(t)\}$ 由式(2.161)来描述。图 2.17(b)中示出了重建的波形(实线)，它由延时的 $(\sin x)/x$ 波形(虚线)加权相加得到。这里加权值为波形的抽样值 $a_n = w(n/f_s)$，在图中用圆点标出。重建的波形带限在 B 赫兹内，抽样频率 $f_s \geqslant 2B$。波形的抽样值可以储存起来，例如，储存在数字计算机的存储器中，这样可以在晚些时候重建波形。或者可以把抽样值由通信系统传输到接收端来重建波形。不管是哪种情况，波形都可以利用式(2.169)由抽样值重建得到。也就是说，每一个抽样值乘以适当的 $(\sin x)/x$ 函数，再把这些加权后的 $(\sin x)/x$ 函数相加就得到原始的波形信号。图 2.17(b)示出了这一过程。重建波形所需要的最小抽样值的数量为：

$$N = \frac{T_0}{1/f_s} = f_s T_0 \geqslant 2BT_0 \tag{2.170}$$

在重建波形的过程中用到了 N 个正交函数。我们可以说 N 是重建 T_0 秒的近似波形所需要的维数。

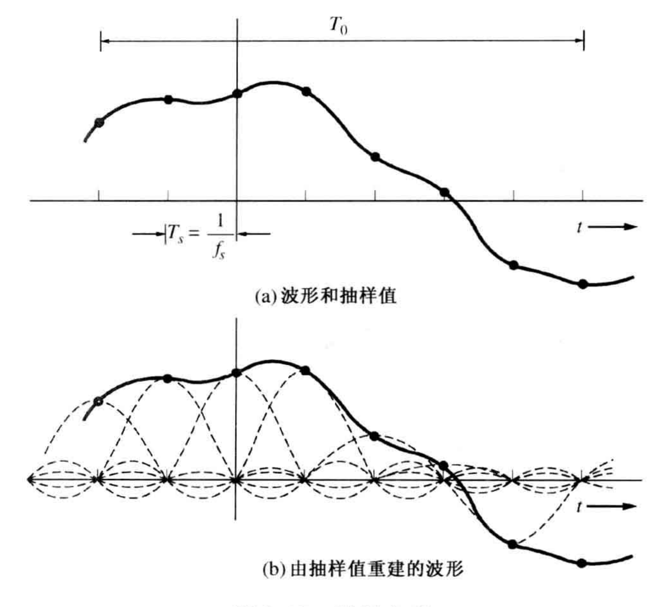


图 2.17 抽样定理

2.7.3 脉冲抽样与数字信号处理(DSP)

另外一种有用的正交级数是脉冲抽样级数。当把抽样定理中的 $(\sin x)/x$ 正交函数用正交的 δ 函数(冲激函数)集来代替时，就得到脉冲抽样级数。脉冲抽样级数与脉冲抽样波形 $w_s(t)$ 也是等效的，它们都能够用未抽样波形与单位强度的冲激脉冲序列相乘得到，如下式：

$$\begin{aligned} w_s(t) &= w(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} w(nT_s)\,\delta(t-nT_s) \end{aligned} \tag{2.171}$$

式中，$T_s = 1/f_s$，如图 2.18 所示①。图中每个冲激脉冲的强度(面积) $w(nT_s)$ 用脉冲的高度来表示。

将(周期)脉冲序列的傅里叶级数代入式(2.171)，得到：

$$w_s(t) = w(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T_s}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_s t} \tag{2.172}$$

对上式两边求傅里叶变换，能够计算出脉冲抽样波形 $w_s(t)$ 的频谱为：

$$\begin{aligned} W_s(f) &= \frac{1}{T_s}W(f) * \mathscr{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_s t}\right] = \frac{1}{T_s}W(f) * \sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathscr{F}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_s t}] \\ &= \frac{1}{T_s}W(f) * \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f-nf_s) \end{aligned}$$

---

① 为表示方便，我们假设 $W(f)$ 是实函数。

或

$$W_s(f) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} W(f - nf_s) \tag{2.173}$$

如图 2.18(b)所示，脉冲抽样信号的频谱是未抽样信号的频谱按每 f_s 赫兹重复出现一次的结果，其中 f_s 为抽样频率(样值数/秒)①。这个非常重要的结论是数字信号处理(DSP)的基本原理之一。

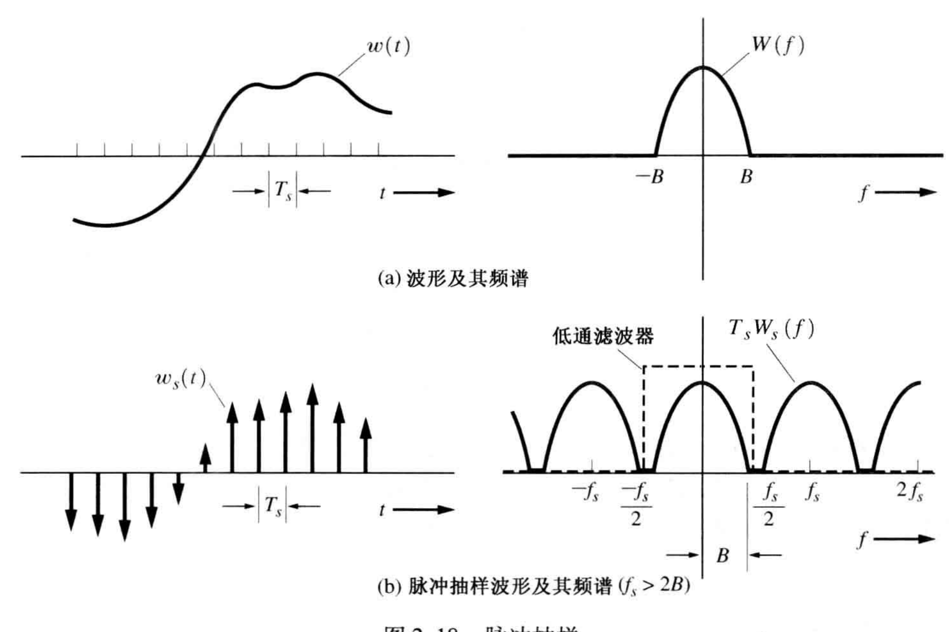


图 2.18　脉冲抽样

注意，脉冲抽样这种技术还可用来把信号的频谱搬移到中心频率为抽样频率的某次谐波的频带位置上。能够把信号的频谱搬移到需要的频带位置上去的电路称为混频器。混频器将在 4.11 节中讨论。

如图 2.18 所示，如果 $f_s \geqslant 2B$，那么重复出现的频谱之间没有重叠，这时将 $W_s(f)$ 高于 $f_s/2$ 以上的部分截去，就可以得到原始信号的频谱。因此，将 $w_s(t)$ 简单地通过一个理想的低通滤波器就能够重新得到 $w_s(t)$，低通滤波器的截止频率为 $f_c = f_s/2$，其中 $f_s \geqslant 2B$。

如果 $f_s < 2B$（即波形为欠抽样），这时抽样波形 $w_s(t)$ 的频谱将由重叠的 $w(t)$ 的频谱组成，如图 2.19 所示②。频谱重叠称为混叠或频谱折叠③。在这种情况下，$w_s(t)$ 通过低通滤波器后的输出不是真正的 $w(t)$ 信号。由于混叠使得恢复后的信号产生了失真。这种失真可以通过对原始信号 $w(t)$ 在抽样之前预先滤波，使滤波后的 $w(t)$ 信号在 $|f| = f_s/2$ 以上没有频率分量来消除。由于预先滤波时截去了原始信号 $w(t)$ 在 $f = f_s/2$ 以上的频谱分量，因此预先滤波法仍然会使恢复后的信号产生失真。但是，由图 2.19 可以看出，如果采用预先滤波法，由低通滤波器恢复出的信号误差能量将为不采用该方法时恢复出的信号误差能量的一半。

---

① 第 3 章将这个结论推广到了瞬时抽样中，抽样脉冲序列由有限宽度及任意形状(不为冲激)的脉冲组成。这称为瞬时抽样型的脉冲振幅调制(PAM)。

② 为表示方便，我们假设 $W(f)$ 为实函数。

③ $f_s/2$ 为折叠频率，其中 f_s 为抽样频率。如果不发生混叠现象，必须要求 $f_s > 2B$，其中 $2B$ 为奈奎斯特频率。

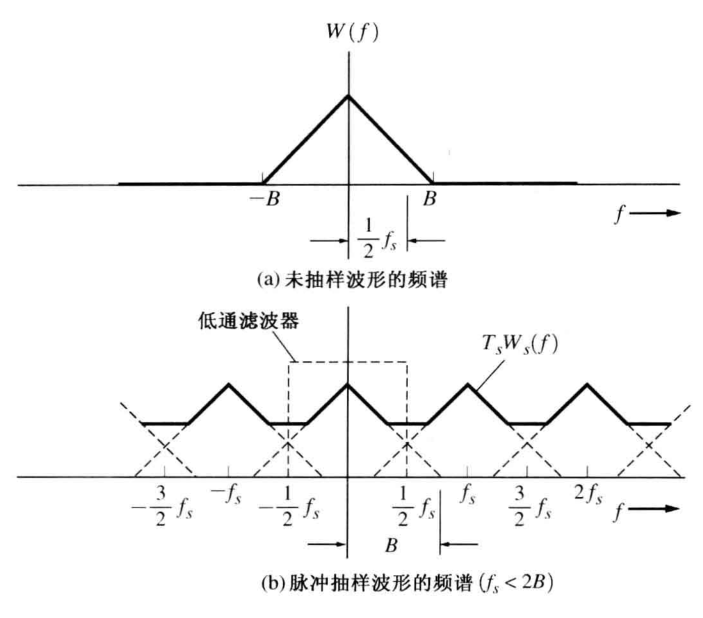


图 2.19 欠抽样及混叠现象

实际波形 $w(t)$ 的能量是有限的。由式(2.42)及式(2.43)可知，当 $|f| > B$ 时，波形的振幅频谱 $|W(f)|$ 的值可以忽略，这里 B 为适当选择的正数。因而，从实用的观点看，实际的波形本质上都是 B 赫兹内的带限信号，其中 B 的值可以选择足够大，以使误差的能量小于某个设定的值。

2.7.4 维数定理

对抽样定理，我们可以用一种更一般的方法来叙述，这种方法称为维数定理(如图 2.17 所示)。

定理 当 BT_0 的值足够大时，一个实函数在 T_0 区间内的波形可由 N 个具有独立信息成分的量来完全描述。N 的值由下式确定：

$$N = 2BT_0 \tag{2.174}$$

式中，N 称为描述波形所需要的维数，B 为波形的绝对带宽[Shannon, 1949; Wozencraft 和 Jacobs, 1965; Wyner 和 Shamai(Shitz), 1998]。

维数定理中式(2.174)的内容简单地说就是，由带限的波形携带的或由带限的通信系统传输的信息与系统的带宽和传输这些信息所允许的时间的乘积成正比。维数定理对各种类型的通信系统的设计及性能评价都有非常重要的指导意义。例如，在雷达系统中，大家都知道，系统的性能要好就必须要求接收到的信号的时间与带宽的乘积要大。

维数定理能够应用在两种性质截然不同的场合。第一种，如果对给定的任意带限波形，我们想要在一张表中(或在计算机的存储器)存储一些数据，这些数据可以用来在 T_0 区间内重建该波形，那么至少要存储 N 个数据。此外，平均抽样速率至少为奈奎斯特速率。即①

① 如果被抽样波形的频谱在 $f = \pm B$ 处具有线谱，那么该线谱分量是否包含在带宽 B 内就不明确。令 $f_s > 2B$ (即去掉公式中的等号)就可把该线谱包含在带宽 B 内。

$$f_s \geqslant 2B \tag{2.175}$$

因此，在第一种类型的应用中，维数定理是用来计算表示波形所需要的存储单元数量(存储量)的。

第二种应用解决与第一种应用场合性质相反的问题。这里维数定理用来估算波形的带宽。在 3.4 节中将对这种应用进行详细讨论，那里维数定理用来确定数字信号的最小带宽。

2.8　离散傅里叶变换①

借助方便的个人计算机及现成的数字信号处理(DSP)集成电路，用离散傅里叶变换(DFT)的方法，可以容易地估算波形的频谱。这里我们将说明如何用 DFT 来计算式(2.26)中连续傅里叶变换(CFT)的样值及式(2.94)中傅里叶级数的复系数的值。

定义　离散傅里叶变换(DFT)用下式定义：

$$X(n) = \sum_{k=0}^{k=N-1} x(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/N)nk} \tag{2.176}$$

式中，$n = 0, 1, 2, \cdots, N-1$。离散傅里叶反变换(IDFT)用下式定义：

$$x(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{n=N-1} X(n)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi/N)nk} \tag{2.177}$$

式中，$k = 0, 1, 2, \cdots, N-1$。

这里并不直接出现时间和频率，是因为式(2.176)及式(2.177)中的定义分别为数字计算机计算出的离散傅里叶变换及离散傅里叶反变换的 N 个值。读者应注意到，有些其他的作者会使用不同的定义(同样有效)。例如，如果式(2.177)中的 $1/N$ 因子用 $1/\sqrt{N}$ 来代替的话，那么式(2.176)的右边就有 $1/\sqrt{N}$ 因子出现。这会在 DFT 与 CFT 互相转换时，产生一个不同的比例因子。此外，式(2.176)及式(2.177)中的指数符号可以互换，这样得到的是沿频率轴反转的频谱样值。快速傅里叶变换(FFT)是计算 DFT 的快速算法[Ziemer，Tranter 和 Fannin，1998]。

MATLAB 使用的是式(2.176)及式(2.177)中给出的 DFT 及 IDFT 定义，只不过矢量中元素的标号是从 1 到 N，而不是从 0 到 $N-1$。因此，MATLAB 中 FFT 算法与式(2.176)及式(2.177)的关系可由下式联系：

$$\mathbf{X} = fft(\mathbf{x}) \tag{2.178}$$

和

$$\mathbf{x} = ifft(\mathbf{x}) \tag{2.179}$$

式中，$\mathbf{x}$ 为具有 N 个元素的矢量，它对应波形的 N 个抽样值。$\mathbf{X}$ 为具有 N 个元素的 DFT 矢量。N 的值选择为 2 的幂次方(即 $N = 2^m$，其中 m 为正整数)。如果使用其他的 FFT 软件的话，使用者应清楚所用的定义，以便能正确地解释所得结果。

下面我们将研究 DFT 两种重要的应用情况。第一种是用 DFT 来估算波形的频谱 $W(f)$，即

① 快速傅里叶变换(FFT)算法是计算 DFT 的快速方法。DFT 中需进行 N^2 次复数乘法运算，而在 FFT(N 的值选择为 2 的幂次方)中只需 $(N/2)\log_2 N$ 次复数乘法运算。因此，FFT 与 DFT 相比，运算速度提高了 $2N/\log_2 N$ 倍，对 $N=512$ 的 FFT 来说，该值为 113.8。

用 DFT 来估算波形 $w(t)$ 的连续傅里叶变换。式(2.184)中给出了这种估算的方法，具体的估算过程见例题2.20。第二种是采用 DFT 来计算傅里叶变换的复系数 c_n，式(2.187)给出了计算结果，具体的计算过程见例题2.21。

2.8.1 用 DFT 计算连续的傅里叶变换

现在我们研究由式(2.176)定义的 DFT 与 CFT 之间的关系。它涉及到三个概念：窗口、抽样及周期抽样的产生，如图2.20所示。图中左边为信号的时域波形，右边为对应的频谱。假设要用 DFT 来计算波形 $w(t)$ 的 CFT。那么，首先要将时域波形在区间 $(0, T)$ 内加窗(截断)，这样就只需要有限的 N 个抽样值。加窗后的波形用下标 w 来表示，为：

$$w_w(t) = \begin{Bmatrix} w(t), & 0 \leqslant t \leqslant T \\ 0, & \text{否则} \end{Bmatrix} = w(t)\,\Pi\left(\frac{t-(T/2)}{T}\right) \tag{2.180}$$

加窗后的波形的傅里叶变换为：

$$W_w(f) = \int_{-\infty}^{\infty} w_w(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ft}\,\mathrm{d}t = \int_0^T w(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ft}\,\mathrm{d}t \tag{2.181}$$

现在，我们用有限长的级数来表示上式中的积分，得到 CFT 的近似值。其中，$t = k\Delta t$，$f = n/T$，$\mathrm{d}t = \Delta t$，而 $\Delta t = T/N$，于是有：

$$W_w(f)|_{f=n/T} \approx \sum_{k=0}^{N-1} w(k\,\Delta t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/N)nk}\Delta t \tag{2.182}$$

将上式结果与式(2.176)进行比较，我们得到 CFT 与 DFT 之间的关系为：

$$W_w(f)|_{f=n/T} \approx \Delta t\, X(n) \tag{2.183}$$

式中，$f = n/T$，$\Delta t = T/N$。在计算 DFT 时用到的抽样值为 $x(k) = w(k\Delta t)$，如图2.20(c)左边所示。此外，由于式(2.176)中的 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/N)nk}$ 是 n 的周期函数，换句话说，当 $n = N, N+1, \cdots$ 时，$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/N)nk}$ 的取值与 $n = 0, 1, \cdots, N-1$ 时是相同的，因此，$X(n)$ 也是周期函数(虽然计算机程序只计算前 N 个值，但后面的值是重复出现的)。另一种看出 DFT(及 IDFT)为周期函数的方法是，考虑到在进行变换时，由于使用了抽样值，因此离散变换是一种脉冲抽样，故其频谱必是周期函数，周期为抽样频率 $f_s = 1/\Delta t = N/T$(如图2.18、图2.20(c)及图2.20(d)所示)。此外，由于计算机给出的是 n 为 $0, 1, \cdots, N-1$ 正值时的 $X(n)$，如果想得到负频率轴上的频谱，那么式(2.183)必须进行修正以得到 $-f_s/2 < f < f_s/2$ 整个基频范围内的频谱值。于是，对正频率值，我们用下式近似：

$$W_w(f)|_{f=n/T} \approx \Delta t\, X(n), \quad 0 \leqslant n < \frac{N}{2} \tag{2.184a}$$

对负频率值，我们用下式近似：

$$W_w(f)|_{f=(n-N)/T} \approx \Delta t\, X(n), \quad \frac{N}{2} < n < N \tag{2.184b}$$

用类似的方法，可以得到 CFT 反变换及 DFT 反变换之间的关系，式(2.207)描述了这种关系。

图2.20表明了这样的事实，就是当用 DFT 来近似 CFT 时，如果不小心的话，可能会产生重大的误差。产生误差的因素有许多，这些因素可以归结为三种基本的效应：泄漏效应、混叠效应及桩栅效应。

第一种效应是由时域加窗引起的。在频域中，加窗对应于未加窗波形的频谱与窗函数的频谱(傅里叶变换)的卷积积分。这样扩展了波形 $w(t)$ 的频谱，从而使频谱分量“泄漏”到了相邻

的频率位置上，如图2.20(b)所示。当把DFT与CFT进行比较时，可以看出这种泄漏会产生误差。增加窗口宽度 T，或等效地对给定的 Δt 增加 N 的值，能够减小泄漏效应引起的误差。此外，还可以选择矩形以外的窗口形状以减小窗口函数频谱中的旁瓣[Harris，1978；Ziemer，Tranter 和 Fannin，1998]。波形 $w(t)$ 中的周期分量越大，产生的泄漏越多。因此，如果我们已知波形 $w(t)$ 中存在周期分量的话，那么可以在计算DFT之前分离出这些分量以减小泄漏。

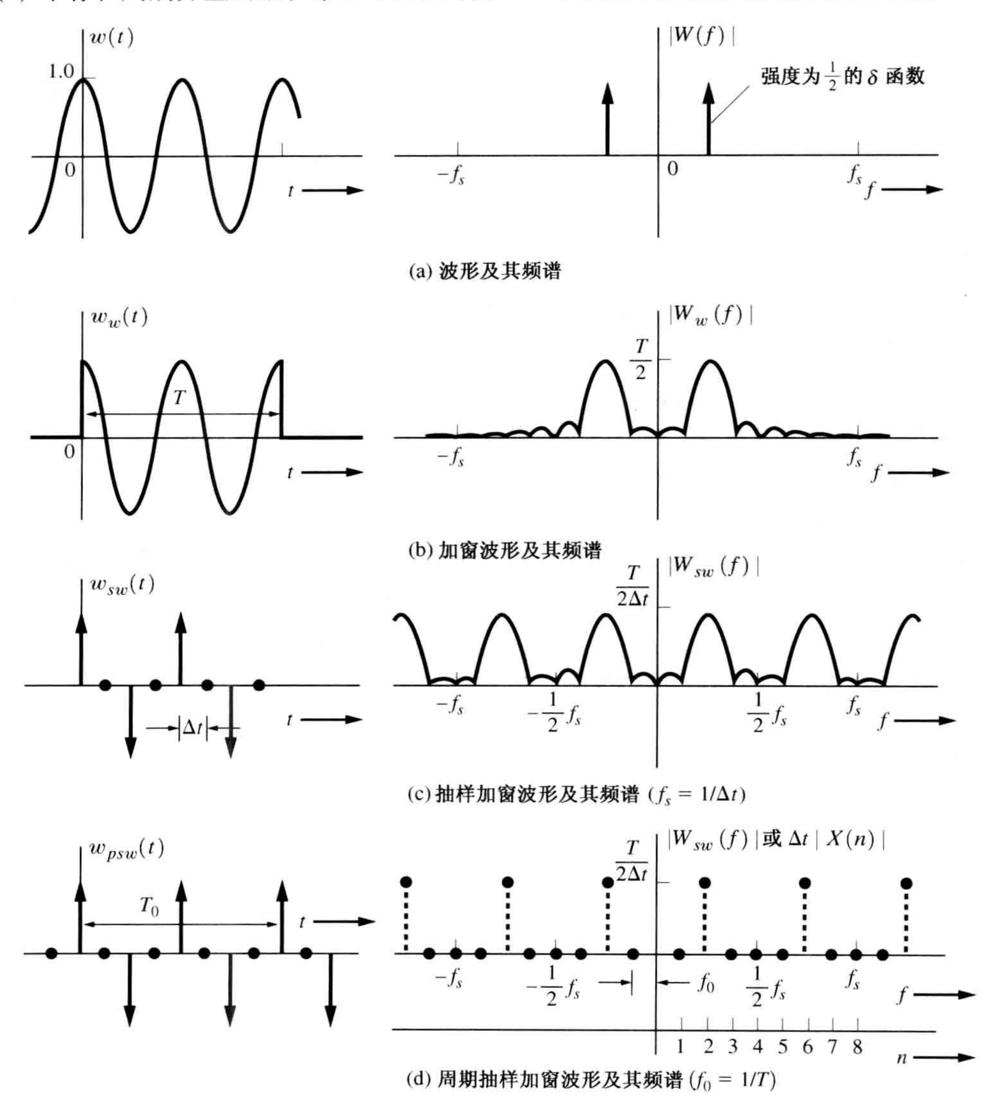


图2.20 CFT与DFT频谱的比较

由前面对抽样的研究可知，抽样波形的频谱是未抽样波形的频谱在抽样频率的谐波位置上重复出现的结果。如果 $f_s < 2B$，其中 $f_s = 1/\Delta t$，B 为未抽样波形的最大有效频谱宽度，那么就会产生第二种效应，即发生混叠误差。通过提高抽样频率或对波形进行预滤波能够减小混叠误差。注意，用 N 个点的DFT能够计算出的最高频率分量为 $f = f_s/2 = N/(2T)$。

第三种类型的误差由栅栏效应产生。它的产生是由于 N 点的DFT不能分辨出间隔小于 $\Delta f = 1/T$ 的频谱分量。增加 T 值可以减小 Δf。如果数据宽度限定为 T_0 秒，其中 $T_0 \leqslant T$，那么可以通过对抽样点补零来延长 T 值。这称为零值填充，它将减小 Δf 值，从而得到更好的频谱分辨率。

由于计算机不能计算无穷大的值，因此在进行离散傅里叶变换(DFT)时，将用有限幅度的脉冲信号来近似狄拉克 δ 函数。但是，在用 DFT 计算傅里叶级数的系数时，可以精确地计算出 δ 函数的强度。例题 2.21 将说明这一点。

总之，当利用 DFT 来计算 CFT 时，应用了几个基本的概念。第一，由于波形在区间(0, T)内加窗，因而抽样值的数量是有限的。第二，DFT 和 IDFT 是周期函数，周期分别为 $f_s = 1/\Delta t$ 和 T。选取参数 Δt、T 及 N 时，需考虑以下几个因素：

- Δt 的选择应满足奈奎斯特抽样条件，即 $f_s = 1/\Delta t > 2B$，其中 B 为波形的最高截止频率。Δt 为抽样值之间的时间间隔，也称为时间分辨率，且有 $t = k\Delta t$。
- T 的选择应满足频率分辨率的要求，频率分辨率为 $\Delta f = 1/T$，并且 $f = n/T$。
- N 为数据的点数，它由 $N = T/\Delta t$ 确定。

N 取决于 Δt 和 T 的值，计算时间随着 N 的增加而增加①。N 个点的 DFT 在频率范围$(0, f_s)$内，得到 N 个频率点上的频谱值，其中，$f_s = 1/\Delta t = N/T$。如式(2.184)所描述的那样，以上频率范围中的一半表示正频率，另一半表示负频率。下面的例题说明了这一点。

例题 2.20 利用 FFT 计算频谱

利用式(2.178)的 FFT 算法，计算一个矩形脉冲的振幅频谱和相位频谱。计算过程见 M 文件 Example2_20. m 的运行结果。表 2.3 列出的是该 MATLAB 程序。计算结果如图 2.21 所示。注意，FFT 的结果与频谱(即 CFT)之间的关系用到了式(2.178)及式(2.183)的内容。适当地选择参数 M、tend 及 T，让计算出的振幅频谱和相位频谱与例题 2.6 中由式(2.59)及式(2.60)给出的矩形脉冲信号的实际频谱相匹配。(例题 2.6 中的 T 与表 2.3 中的 tend 等效。)

表 2.3 利用 FFT 计算矩形脉冲频谱的 MATLAB 程序列表

```
File: Example2_20.m for Example 2-20
clear;
% Using the DFT, calculate the spectrum for a rectangular pulse.
% Let tend be the end of the step.
M = 7;
N = 2^M;
n = 0:1:N-1;
tend = 1;
T = 10;
dt = T/N;
t = n*dt;
% Creating time waveform
w = zeros(length(t),1);
for (i = 1:1:length(w))
  if (t(i) < = tend)
    w(i) = 1;
  end;
end;
% Calculating FFT
W = dt*fft(w);
f = n/T;
```

① 快速傅里叶变换(FFT)算法是计算 DFT 的快速方法。DFT 中需要进行 N^2 次复数乘法运算，而在 FFT(N 的值选择为 2 的幂次方)中只需$(N/2)\log_2 N$ 次复数乘法运算。因此，FFT 与 DFT 相比，运算速度提高了 $2N/(\log_2 N)$倍，对 $N = 512$ 的 FFT 来说，该值为 113.8。

（续表）

```
% Calculating position of 4th NULL
pos = INDEX(f,4/tend);
subplot(411)
plot(t,w);
axis([0 T 0 1.5]);
xlabel('t (sec) ->');
ylabel('w(t)');
title('Time Waveform');
subplot(412);
plot(f(1:pos),abs(W(1:pos)));
xlabel('f (Hz) ->');
ylabel('W(f)');
titl--e('Magnitude Spectrum out to 4th Null');
subplot(413);
plot(f(1:pos),180/pi*angle(W(1:pos)));
xlabel('f (Hz) ->');
ylabel('theta(f) (degrees)');
title('Phase Spectrum out to 4th Null');
grid;
subplot(414);
plot(f,abs(W));
xlabel('f (Hz) ->');
ylabel('W(f)');
title('Magnitude Spectrum over whole FFT frequency range');
```

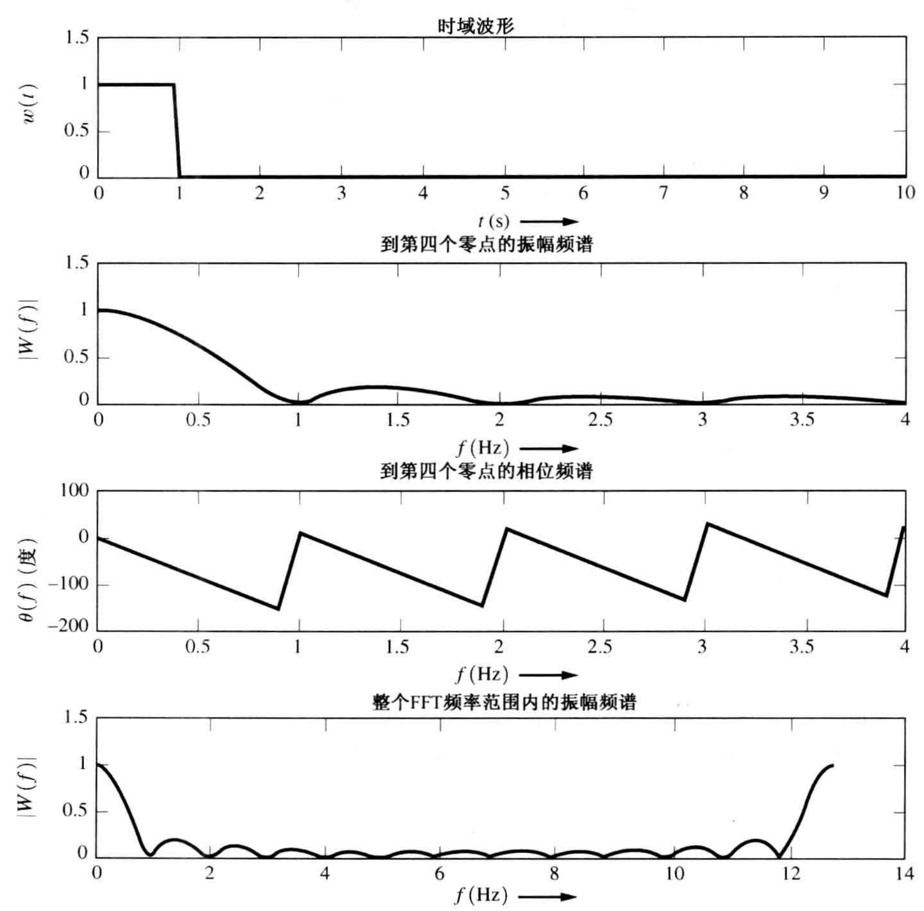


图 2.21　利用 MATLAB FFT 得到的矩形脉冲频谱（MATLAB 文件见 Example2_20.m）

矩形脉冲不是绝对带限的。但是，对宽度 tend = 1 的脉冲信号来说，当 5/tend = 5 Hz = B 时，振幅频谱变得相对小了。于是，我们需要以 $2B = 10$ Hz 或更高的速率对波形进行抽样。当 $T = 10$ 和 $N = 128$ 时，$\Delta t = 0.08$ 或 $f_s = 1/\Delta t = 12.8$ Hz。因而，所选择的 T 及 N 的值满足 $f_s > 2B$ 的奈奎斯特速率。频率分辨率为 $\Delta f = 1/T = 0.1$ Hz。所以，利用 FFT 可以较好地表示频谱。

图 2.21 底部的振幅频谱曲线中给出的是 FFT 矢量在整个 $0 < f < f_s$ 频率范围内的值，其中 $f_s = 12.8$ Hz。由于在 MATLAB 程序中没有用到式(2.184b)中的内容，因此图中 $0 < f < 6.8$($f_s/2 = 6.8$ Hz) 对应的是 CFT 正频率部分的振幅频谱，$6.4 < f < 12.8$ 对应的是 CFT 负频率部分的振幅频谱。读者应该尝试一下其他的 M、tend 及 T 的值，看看如果这些参数选择得不当的话，泄漏误差、混叠误差及桩栅误差是如何变大的。此外，我们注意到，当 tend = T 时，会产生很大的误差。读者可以考虑一下这是为什么。

2.8.2 利用 DFT 计算傅里叶级数

DFT 也可以用来计算复数形式的傅里叶级数的系数。由式(2.89)有：

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T w(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n f_0 t}\,\mathrm{d}t$$

我们用一有限项的级数来近似上式中的积分，其中 $t = k\Delta t$, $f_0 = 1/T$, $\mathrm{d}t = \Delta t$, 且 $\Delta t = T/N$。于是有：

$$c_n \approx \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{N-1} w(k\,\Delta t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/N)nk}\,\Delta t \tag{2.185}$$

利用式(2.176)，我们发现傅里叶级数的系数与 DFT 的关系为：

$$c_n \approx \frac{1}{N}X(n) \tag{2.186}$$

由于 DFT 产生的是 $n = 0, 1, \cdots, N-1$ 时的 $X(n)$ 值，因此要得到 n 为负值时的 c_n 值，必须对式(2.186)进行修正。对正的 n 值，我们用下式计算 c_n：

$$c_n = \frac{1}{N}X(n), \quad 0 \leqslant n < \frac{N}{2} \tag{2.187a}$$

对负的 n 值，我们用下式计算 c_n：

$$c_n = \frac{1}{N}X(N+n), \quad -\frac{N}{2} < n < 0 \tag{2.187b}$$

例题 2.21 利用 FFT 计算正弦信号的频谱

令

$$w(t) = 3\sin(\omega_0 t + 20°) \tag{2.188}$$

式中，$\omega_0 = 2\pi f_0$，且 $f_0 = 10$ Hz。

由于 $w(t)$ 为周期信号，因此可用式(2.109)得到以下频谱：

$$W(f) = \Sigma c_n \delta(f - nf_0)$$

其中，$\{c_n\}$ 为波形 $w(t)$ 复数形式的傅里叶级数的系数。此外，由于有以下关系：

$$3\sin(\omega_0 t + 20°) = \left(\frac{3}{2\mathrm{j}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}20}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} + \left(\frac{-3}{2\mathrm{j}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}20}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}$$

因此，可以知道傅里叶级数的系数为：

$$c_1 = \left(\frac{3}{2\mathrm{j}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}20}\right) = 1.5\underline{/-70^\circ} \tag{2.189a}$$

$$c_1 = \left(\frac{-3}{2\mathrm{j}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}20}\right) = 1.5\underline{/+70^\circ} \tag{2.189b}$$

其他的 c_n 值为零。现在来看这些已知的正确答案能否利用 DFT 计算出来。计算过程见 M 文件 Example2_21. m 的运行结果。参考图 2.22，我们看到由 MATLAB 计算出的 FFT 的值和画出的频谱图，所得结论和已知的分析结果是一致的。

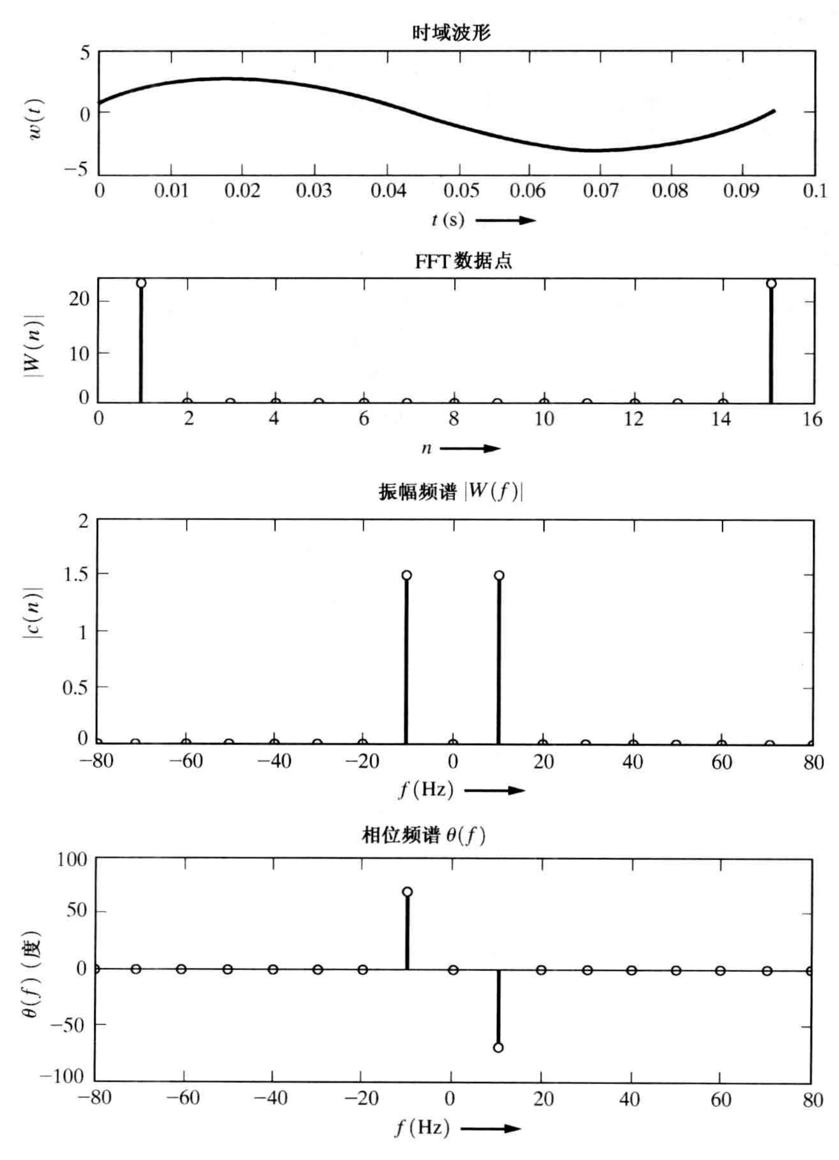


图 2.22　利用 MATLAB FFT 得到的正弦信号频谱
（MATLAB 文件见 Example 2 _ 2 1 . m）

注意，由于 $\delta(0) = \infty$，因此无法画出 δ 函数，而只用 δ 函数的强度来代替，以表示振幅频谱。此外在 $|W(f)| = 0$ 的频率上，$\theta(f)$ 可以为任意值，因为此时 $W(f) = |W(f)|\underline{/\theta(f)} = 0$。

也能够把以上这些结论与例题2.5中所得的结果进行比较。在例题2.5中，直接用傅里叶变换积分的方法计算出了正弦信号的频谱。

2.9 信号带宽

通信系统中，信号与噪声的带宽是非常重要的概念。之所以这样说，主要有两个原因。第一，在越来越拥挤的射频(RF)波段内，要容纳的用户越来越多，因此，必须仔细地考虑每个用户所需要的频谱宽度。第二，从通信设备的设计观点看，频谱宽度是重要的概念。因为设计出的电路，既要有足够的带宽让信号通过，又要能够抑制噪声。那么，现在的问题就出来了，什么是带宽？正如我们将会看到的那样，对带宽有许多种不同的定义。

当讨论若干个信号和噪声时，只要采用相同的带宽定义，就能够比较这些信号和噪声频谱宽度的大小。如果改变带宽的定义，那么在比较不同的定义得到的频谱带宽时，必须用到“转换因子”。遗憾的是，转换因子常常与所讨论的频谱形状有关[即与 $(\sin x)/x$ 型或矩形频谱有关]。

在工程定义中，认为带宽是正频率部分的宽度(我们描述的是实信号的带宽或具有实冲激响应的实际滤波器的带宽，因而这些波形的振幅频谱是以 $f=0$ 轴为对称的偶函数)，换句话说，带宽为 f_2-f_1，其中 $f_2>f_1\geqslant 0$。f_2 和 f_1 的值由选用的带宽定义来确定。对基带波形或网络来说，由于频谱向下扩展到了直流分量($f=0$)，因此 f_1 的值通常认为是零。对带通型的信号来说，$f_1>0$，带宽 f_2-f_1 中包含信号的载波频率 f_c。回想一下，当提高信号的传输速率时(即减小 T 值)，信号的频谱将会变宽(见图2.6)。因此，对带宽的工程定义来说，我们要求带宽是随 $1/T$ 变化的。

我们将给出带宽常用的六种工程定义和一种法律定义：

1. 绝对带宽为 f_2-f_1。这里，在正频率轴上 $f_1<f<f_2$ 的频率范围以外，频谱为零。
2. 3 dB 带宽（或半功率带宽）为 f_2-f_1。这里，在频率 $f_1<f<f_2$ 的范围内，振幅频谱 $|H(f)|$ 的值大于 $|H(f)|$ 最大值的 $1/\sqrt{2}$ 倍，且 $|H(f)|$ 的最大值出现在 $f_1<f<f_2$ 频率范围内。
3. 等效噪声带宽为假想的矩形频谱宽度。该等效矩形频谱宽度内的功率与实际频谱在正频率范围内的功率相等。由式(2.142)可知，PSD 与振幅频谱的平方成正比。令 f_0 是振幅频谱取最大值的频率点，于是等效矩形频谱宽度内的功率为：

$$\text{等效功率} = B_{\text{eq}}|H(f_0)|^2 \tag{2.190}$$

式中，B_{eq} 为将要确定的等效带宽。正频率部分的实际功率为：

$$\text{实际功率} = \int_0^{\infty}|H(f)|^2\mathrm{d}f \tag{2.191}$$

令式(2.190)与式(2.191)相等，得到计算等效噪声带宽的公式为：

$$B_{\text{eq}} = \frac{1}{|H(f_0)|^2}\int_0^{\infty}|H(f)|^2\mathrm{d}f \tag{2.192}$$

4. 零点带宽(或过零点带宽)为 f_2-f_1。这里，f_2 为振幅频谱的包络中高于 f_0 的第一个零点。对带通系统来说，f_1 为振幅频谱的包络中低于 f_0 的第一个零点。其中，f_0 为振幅频谱取最大值的频率点①。对基带系统来说，f_1 通常为零。

---

① 如果振幅频谱中没有明确的零点出现，那么就不适合采用这种定义。

5. 限定频谱带宽为f_2-f_1。在频带范围$f_1<f<f_2$之外，与波形$|H(f)|^2$成正比的 PSD 值必须比功率谱密度的最大值至少低某一确定值，如 50 dB。
6. 功率带宽为f_2-f_1。这里$f_1<f<f_2$为包含有99%总功率的频率范围。这与 FCC 定义的占据带宽类似，该定义表明高于上边带边缘f_2的功率为1/2%，低于下边带边缘f_1的功率为1/2%，总功率的99%留在了占据的带宽之内(见 FCC 标准与规则的2.202节，Internet 搜索：47 CFR 2.202)。
7. FCC 带宽是一种在指定通信系统允许采用的频谱中，由 FCC 分配的授权带宽参数。把 FCC 带宽参数代入 FCC 的公式中，得到在带宽边缘允许的 4 kHz 频带内相对于总的平均信号功率的最小衰减值。在 FCC 标准与规则的21.106节(Internet 搜索：47 CFR 21.106)中指出："对低于 15 GHz 的工作频率来说，在任意4 kHz 频带内，其中心频率偏离指配的频率50%以上和包括授权带宽的250%范围内，最小衰减值由下面的公式指定，但在任何情况下，该值不小于50 dB"：

$$A = 35 + 0.8(P - 50) + 10\log_{10}(B) \tag{2.193}$$

(衰减值不需要大于 80 dB。)上式中，A为低于平均输出功率电平的衰减值(单位为 dB)，P为偏离载波频率的百分比，B为授权的带宽，单位为兆赫兹(MHz)。

FCC 关于带宽的定义(以及许多其他法律章程与规则)有点难以理解。例题 2.22 中将对此进行解释。它实际上定义了一种频谱特征。也就是说，信号的频谱必须在所有的频率点上小于或等于频谱特征给定的值。FCC 定义的带宽参数B与上述所列的其他定义不一致，感觉到带宽与对应的信号的"传输速度"$1/T$不成正比[Amoroso, 1980]。因而，FCC 的带宽参数B是一个法律定义而不是一个工程定义。在第 6 章中将给出"均方根带宽"的定义，均方根带宽在对解析问题进行分析时非常有用。

例题 2.22 BPSK 信号的带宽

下面将通过对二进制相移键控(BPSK)信号的分析，看看如何用以上给出的不同定义来计算信号的带宽。

BPSK 信号由下式描述：

$$s(t) = m(t)\cos\omega_c t \tag{2.194}$$

式中，$\omega_c=2\pi f_c$，f_c为载波频率(赫兹)，$m(t)$为二进制序列(取值为±1)调制波形，如图 2.23(a)所示。它由某个数字信源(如数字计算机)产生。让我们计算最坏情况(带宽最宽)下$s(t)$的频谱。

最坏情况(带宽最宽)发生在数字调制波形有最快的转换速度时。这时的$m(t)$为方波信号，如图 2.23(a)所示。图中，+1 V 代表二进制符号 1，-1 V 代表二进制符号 0，信号的速率为$R=1/T_b$ bps。利用傅里叶级数的分析方法能够计算方波调制信号的功率谱。由式(2.126)及式(2.120)得到下式：

$$\mathcal{P}_m(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2\,\delta(f-nf_0) = \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\left[\frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi/2}\right]^2\delta\left(f-n\frac{R}{2}\right) \tag{2.195}$$

式中，$f_0=1/(2T_b)=R/2$。$s(t)$的 PSD 能够通过计算$s(t)$的自相关函数用$m(t)$的 PSD 表示出来，即

$$\begin{aligned}R_s(\tau) &= \langle s(t)s(t+\tau)\rangle\\ &= \langle m(t)m(t+\tau)\cos\omega_c t\cos\omega_c(t+\tau)\rangle\\ &= \tfrac{1}{2}\langle m(t)m(t+\tau)\rangle\cos\omega_c\tau + \tfrac{1}{2}\langle m(t)m(t+\tau)\cos(2\omega_c t+\omega_c\tau)\rangle\end{aligned}$$

或

$$R_s(\tau) = \frac{1}{2}R_m(\tau)\cos\omega_c\tau + \frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} m(t)m(t+\tau)\cos(2\omega_c t + \omega_c\tau)\,\mathrm{d}t \tag{2.196}$$

由于在小的时间区间内，$m(t)m(t+\tau)$为常数，而对$\cos(2\omega_c t+\omega_c\tau)$来说，因为$f_c \gg R$，因此在该时间区间内有许多振荡周期，故总的积分结果可以忽略①。当用 T 除以由积分得到的任意小的面积且 $T\to\infty$ 时，其结果将为零。于是有：

$$R_s(\tau) = \frac{1}{2}R_m(\tau)\cos\omega_c\tau \tag{2.197}$$

对式(2.197)两边进行傅里叶变换得到 BPSK 信号的 PSD。利用实信号的频移定理(见表 2.1)，我们有：

$$\mathcal{P}_s(f) = \frac{1}{4}[\mathcal{P}_m(f-f_c) + \mathcal{P}_m(f+f_c)] \tag{2.198}$$

将式(2.195)代入式(2.198)，得到 BPSK 信号的 PSD：

$$\mathcal{P}_s(f) = \frac{1}{4}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq\infty}}^{\infty}\left[\frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi/2}\right]^2 \times\{\delta[f-f_c-n(R/2)] + \delta[f+f_c-n(R/2)]\} \tag{2.199}$$

式中的功率谱如图 2.23(b)所示，见 M 文件 Example2_22.m 的运行结果。

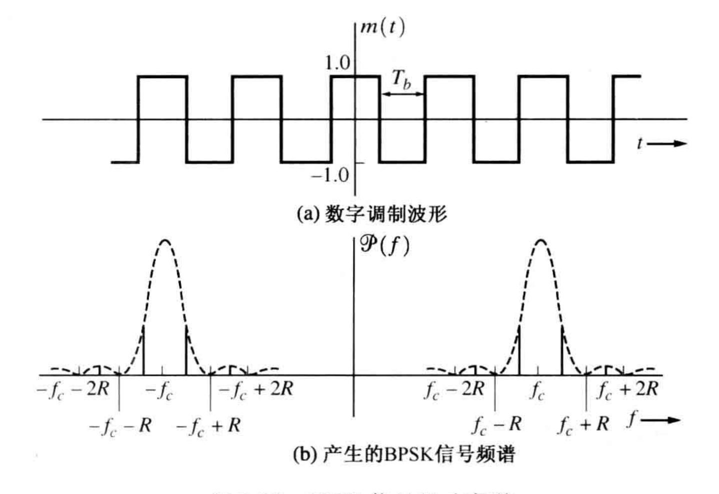


图 2-23　BPSK 信号的功率谱

实际上，利用这种最坏情况下的确定调制信号得到的功率谱的形状和用随机数据作为调制信号得到的功率谱的形状是相同的。但是，在随机数据条件下得到的功率谱是连续的。第 3 章中的式(3.41)给出了随机数据信号的功率谱 $\mathcal{P}_m(f)$ 的表达式，借助此式可得到数据速率为 $R=1/T_b$bps 时，随机数据 BPSK 信号的功率谱为：

$$\mathcal{P}(f) = \frac{1}{4}T_b\left[\frac{\sin\pi T_b(f-f_c)}{\pi T_b(f-f_c)}\right]^2 + \frac{1}{4}T_b\left[\frac{\sin\pi T_b(f+f_c)}{\pi T_b(f+f_c)}\right]^2 \tag{2.200}$$

信号的功率谱如图 2.23(b)中虚线所示。

前面的推论表明，我们通常能够用(确定的)方波测试信号来帮助分析数字通信系统，而不用更复杂的随机数据模型。

---

① 这是微积分学中 Riemann-Lebesque 引理的结果[Olmsted, 1961]。

现在将用前面给出的各种带宽定义来计算 BPSK 信号的带宽。为此，必须知道正频率部分的 PSD 形状。由式(2.200)得到：

$$\mathcal{P}(f) = \left[\frac{\sin \pi T_b(f - f_c)}{\pi T_b(f - f_c)}\right]^2 \quad (2.201)$$

将式(2.201)代入以上给出的各种带宽定义中，可得到 BPSK 信号的各种带宽，如表 2.4 所列(表中没有包括 FCC 带宽)。

表 2.4　比特速率为 $R=1/T_b$ bps 时的 BPSK 信号带宽

所用定义	带　宽	带宽(kHz) $R=9600$ bps
1. 绝对带宽	∞	∞
2. 3 dB 带宽	$0.88R$	8.45
3. 等效噪声带宽	$1.00R$	9.60
4. 零点带宽	$2.00R$	19.20
5. 限定频谱带宽(50 dB)	$201.04R$	1930.00
6. 功率带宽	$20.56R$	197.4

功率谱与 FCC 带宽参数之间的关系有点复杂。为了找出这种关系，必须计算由下式定义的分贝衰减值：

$$A(f) = -10 \log_{10}\left[\frac{P_{4\mathrm{kHz}}(f)}{P_{\mathrm{total}}}\right] \quad (2.202)$$

式中，$P_{4\,\mathrm{kHz}}(f)$ 是以 f 为中心频率的 4 kHz 带宽内的功率，而 $P_{\mathrm{total}}(f)$ 为信号的总功率。4 kHz 带宽内的功率(假定 4 kHz 带宽内的 PSD 近似为常数)为：

$$P_{4\mathrm{kHz}}(f) = 4000\mathcal{P}(f) \quad (2.203)$$

利用等效带宽的定义，我们得到信号的总功率为：

$$P_{\mathrm{total}} = B_{\mathrm{eq}}P(f_c) \quad (2.204)$$

其中功率谱在 $f=f_c$ 处有最大值。利用以上两个公式后，式(2.202)变为：

$$A(f) = -10 \log_{10}\left[\frac{4000\mathcal{P}(f)}{B_{\mathrm{eq}}\mathcal{P}(f_c)}\right] \quad (2.205)$$

式中，$A(f)$是中心频率位于 f 的 4 kHz 带宽内测量到的功率与信号总的平均功率之比的分贝衰减。对 BPSK 信号来说，利用式(2.201)，我们得到分贝衰减值为：

$$A(f) = -10 \log_{10}\left\{\frac{4000}{R}\left[\frac{\sin \pi T_b(f - f_c)}{\pi T_b(f - f_c)}\right]^2\right\} \quad (2.206)$$

式中，$R=1/T_b$ 为数据速率。如果我们试图求出某一个 R 的值，以使 $A(f)$ 位于图 2.24($B=30$ MHz)中 FCC 规定的谱包络之下，那么将会发现 R 的值很小，以至于在期望的 -50 MHz $<(f-f_c)<50$ MHz 频率范围内，式(2.206)中的$(\sin x)/x$ 函数将为许多零点。这样就难以画出 $A(f)$的曲线。因此，我们把式(2.206)中的 $\sin\pi T(f-f_c)$ 用它的最大值(为 1)代替后，改为画出 $A(f)$的包络曲线。BPSK 信号的分贝衰减包络曲线如图 2.24 所示，其中 $R=0.0171$ Mbps。

显然，为了满足 FCC $B=30$ MHz 的规定，BPSK 信号允许的数据传输速率低得可笑，这是因为 FCC 带宽参数规定的几乎是一个绝对带限频谱。对一个具有合理数据速率的信号来说，发射信号中用到的脉冲必须修正为从矩形(此时产生 BPSK 信号)到滚降脉冲形状，以使发射信号的带宽几乎为绝对带限的。回想一下前面学过的抽样定理，我们认识到$(\sin x)/x$ 是最好的脉冲形状，因为这种脉冲具有绝对的带限频谱。但$(\sin x)/x$ 脉冲不是绝对时限的，因此，这种理想的

脉冲并不能使用。Frank Amoroso 及其他学者对此问题进行了研究，并提出了一种准带限的 $(\sin x)/x$ 脉冲形状[Amoroso, 1980]。这种类型的信号的分贝衰减曲线如图 2.24 所示，从图中看出，该曲线在 $R=25$ Mbps 的条件下，恰好位于 FCC 规定的谱包络曲线的下方。25 Mbps 的允许数据速率与 BPSK 信号条件下允许的 $R=0.0171$ Mbps 数据速率相比有了极大的提高。有趣的是，我们注意到在以上的分析中用的是模拟脉冲形状[$(\sin x)/x$ 型]，而不是数字(矩形)脉冲形状。这从另一个方面也说明，对一个数字通信工程师来说，既能分析和设计数字系统也能分析和设计模拟系统是非常重要的。

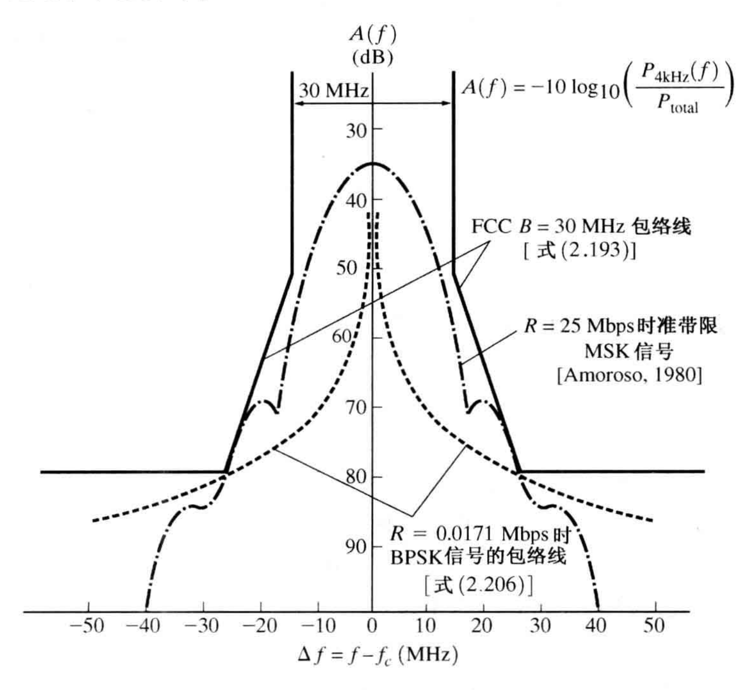


图 2.24 FCC 允许的 $B=30$ MHz 包络线

2.10 小结

- 信号与噪声可以是确定波形(它们的波形是已知的)，其中信号为想要的那部分，噪声为不想要的那部分。信号与噪声也可以是随机波形(它们的波形是未知的，但波形的统计特性是已知的)。信号与噪声的特性包括频谱、直流分量、均方根值以及相关的功率。
- 我们详细地研究了波形的傅里叶变换(FT)与频谱特性。FT 用来得到波形的频谱。频谱给出了波形中包含的正弦分量的频率。我们定义并讨论了 PSD 与自相关函数。
- 信号与噪声可以用正交级数展开来表示。傅里叶级数与抽样函数级数特别有用。
- 复习了线性系统的基本概念。找到了线性系统无失真传输的条件。
- 讨论了带限信号与噪声的特性，由此导出了抽样定理和维数定理。以 MATLAB 为工具对 DFT 进行了研究。
- 讨论了带宽的概念，并给出了七种常见的带宽定义。
- 宽度为 T 的矩形脉冲的零点带宽为 $1/T$，这是数字通信系统中用到的一个基本概念。

2.11　助学例题

SA2.1　指数信号的 DC 分量及 RMS 值　假设 $v(t)$ 是周期电压波形，如图 2.25 所示。在 $0<t<1$ 的时间间隔内，$v(t)$ 用 e^t 来描述。试求该电压波形的直流分量及均方根值。

解： 对周期波形，其直流分量为：

$$V_{\mathrm{dc}} = \langle v(t)\rangle = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{e}^t\mathrm{d}t = \mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^0$$

或

$$V_{\mathrm{dc}} = \mathrm{e} - 1 = 1.72\ \mathrm{V}$$

类似地，有：

$$V_{\mathrm{rms}}^2 = \langle v^2(t)\rangle = \int_0^1 (\mathrm{e}^t)^2\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^0) = 3.19$$

于是，均方根值为：

$$V_{\mathrm{rms}} = \sqrt{3.19} = 1.79\,\mathrm{V}$$

SA2.2　指数信号的功率与 dBm 值　在 600 Ω 的电阻负载两端加上图 2.25 所示的周期电压波形。试计算负载上消耗的功率及对应的 dBm 值。

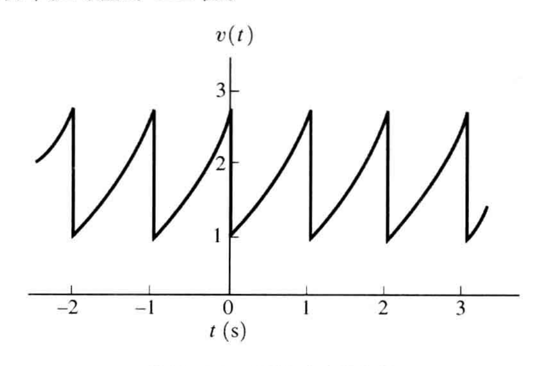


图 2.25　周期电压波形

解： 负载上消耗的功率为：

$$P = V_{\mathrm{rms}}^2/R = (1.79)^2/600 = 5.32\ \mathrm{mW}$$

相应的 dBm 值为：

$$10\log\left(\frac{P}{10^{-3}}\right) = 10\log\left(\frac{5.32\times10^{-3}}{10^{-3}}\right) = 7.26\ \mathrm{dBm}$$

注意，瞬时峰值功率为：

$$\max[p(t)] = \max[v(t)i(t)] = \max[v^2(t)/R]$$

$$= \frac{(\mathrm{e})^2}{600} = 12.32\ \mathrm{mW}$$

SA2.3　利用叠加原理计算频谱　试求以下波形的频谱：

$$w(t) = \Pi\left(\frac{t-5}{10}\right) + 8\sin(6\pi t)$$

解： $w(t)$ 的频谱是矩形脉冲频谱与正弦波形频谱的叠加。利用表 2.1 和表 2.2 可得：

$$\mathscr{F}\left[\Pi\left(\frac{t-5}{10}\right)\right] = 10\frac{\sin(10\pi f)}{10\pi f}e^{-j2\pi f5}$$

再利用例题2.5中的结果可得:

$$\mathscr{F}[8\sin(6\pi t)] = j\frac{8}{2}[\delta(f+3)-\delta(f-3)]$$

因此,

$$W(f) = 10\frac{\sin(10\pi f)}{10\pi f}e^{-j10\pi f} + j4[\delta(f+3)-\delta(f-3)]$$

SA2.4 通过积分计算频谱 试求 $w(t)=5-5e^{-2t}u(t)$ 的频谱。

解:

$$W(f) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} 5e^{-j2\pi ft}dt - 5\int_{0}^{\infty} e^{-2t}e^{-j\omega t}dt$$

$$= 5\delta(f) - 5\left|\frac{e^{-2(1+j\pi f)t}}{-2(1+j\pi f)}\right|_0^{\infty}$$

或

$$w(f) = 5\delta(f) - \frac{5}{2+j2\pi f}$$

SA2.5 利用叠加原理求 FT 假设波形 $w(t)$ 如图2.26所示,试求 $w(t)$ 的傅里叶变换。

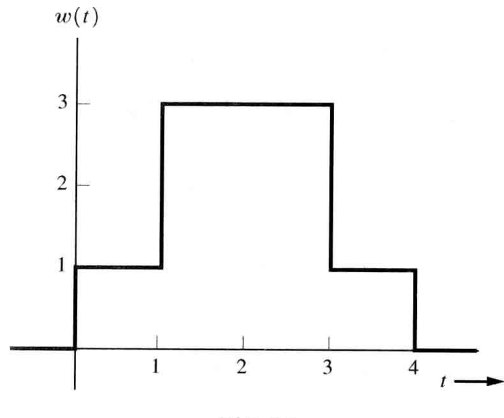


图2.26

解: 参考图2.26,可以把 $w(t)$ 表示为两个矩形脉冲的叠加(即求和),即

$$w(t) = \Pi\left(\frac{t-2}{4}\right) + 2\Pi\left(\frac{t-2}{2}\right)$$

利用表2.2和表2.1,我们得到波形的FT为:

$$W(f) = 4Sa(\pi f4)e^{-j\omega 2} + 2(2)Sa(\pi f2)e^{-j\omega 2}$$

或

$$W(f) = 4[Sa(4\pi f) + Sa(2\pi f)e^{-j4\pi f}$$

SA2.6 正交函数 证明 $\varphi_1(t)=\Pi(t)$ 与 $\varphi_2(t)=\sin 2\pi t$ 为 $-0.5<t<0.5$ 区间内的正交函数。

证明:

$$\int_a^b \varphi_1(t)\varphi_2(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-0.5}^{0.5} 1\sin 2\pi t\,\mathrm{d}t = -\left|\frac{\cos 2\pi t}{2\pi}\right|_{-0.5}^{0.5}$$

$$= \frac{-1}{2\pi}[\cos\pi - \cos(-\pi)] = 0$$

由于上式积分为零，满足式(2.77)的要求，因此在 $-0.5<t<0.5$ 区间内，$\Pi(t)$ 与 $\sin 2\pi t$ 为正交函数。[注意：在 $0<t<1$ 的区间内，$\Pi(t)$ 与 $\sin 2\pi t$ 不是正交的，因为当 $t>0.5$ 时，$\Pi(t)$ 为零，这时的积分为 $1/\pi$（不为零）。]

SA2.7　利用 FS 计算 PSD　试求图 2.25 所示波形的傅里叶级数及 PSD。在 $0<t<1$ 的时间间隔内，$v(t)$ 用 e^t 来描述。

解：利用式(2.88)和式(2.89)，其中 $T_0=1$，$\omega_0=2\pi/T_0=2\pi$，得到：

$$c_n = \int_0^1 \mathrm{e}^t \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n2\pi t}\,\mathrm{d}t = \left|\frac{\mathrm{e}^{(1-\mathrm{j}2\pi n)t}}{1-\mathrm{j}2\pi n}\right|_0^1$$

$$= \frac{\mathrm{e}-1}{1-\mathrm{j}2\pi n} = 1.72\frac{1}{1-\mathrm{j}6.28n}$$

于是，有：

$$v(t) = 1.72\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{1-\mathrm{j}6.28n}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi nt}$$

由于 $v(t)$ 是周期信号，因此，由式(2.126)可知，信号的 PSD 是由冲激函数组成的，其中 $f_0=1/T_0=1$。即 PSD 为：

$$\mathcal{P}(f) = \sum_{-\infty}^{\infty}|c_n|^2\delta(f-nf_0)$$

或

$$\mathcal{P}(f) = \sum_{-\infty}^{\infty}\frac{2.95}{1+(39.48)n^2}\delta(f-n)$$

SA2.8　FS 的性质　令 $w(t)$ 为周期函数，周期为 T_0。假设 $w(t)$ 是旋转对称的，即满足 $w(t)=-w(t\pm T_0/2)$。试证明，偶数谐波分量的 $c_n=0$。

证明：由式(2.89)及 $w(t)=-w(t-T_0/2)$，可以得到：

$$c_n = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} w(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{T_0}\int_{T_0/2}^{T} w(t-T_0/2)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\,\mathrm{d}t$$

现在，我们对上式进行变量代换。令第一个积分式中 $t_1=t$，第二个积分式中 $t_1=t-T_0/2$，于是有：

$$c_n = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} w(t_1)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\,\mathrm{d}t_1 - \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} w(t_1)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0(t_1+T_0/2)}\,\mathrm{d}t_1$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} w(t_1)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t_1}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\pi})\,\mathrm{d}t_1$$

由于 $n=\cdots-2, 0, 2, \cdots$ 时，$(1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\pi})$ 为零，因此，如果 n 为偶数且满足 $w(t)=-w(t-T_0/2)$，则 $c_n=0$。类似地，能够证明，如果 n 为偶数且满足 $w(t)=-w(t+T_0/2)$，则 $c_n=0$。

SA2.9　利用 FFT 反变换计算 FT 反变换　式(2.184)描述了如何用快速傅里叶变换(FFT)向量中的元素近似计算连续傅里叶变换(CFT)。

(a)用类似的方法，导出一个用离散傅里叶反变换(IDFT)向量中的元素近似计算连续傅里叶反变换(ICFT)的公式。

(b)给出 RC 低通滤波器的传输函数为：

$$H(f) = \frac{1}{1 + \mathrm{j}(f/f_0)}$$

式中，$f_0 = 1$ Hz，利用 MATLAB 的快速傅里叶反变换(IFFT)算法计算冲激响应 $h(t)$。

解：(a)由式(2.30)，可知 ICFT 为：

$$w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} W(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi ft}\,\mathrm{d}f$$

参考式(2.184)的导出过程，得到 ICFT 可用下式近似：

$$w(k\Delta t) \approx \Sigma W(n\Delta f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi n\Delta fk\Delta t}\Delta f$$

由于 $\Delta t = T/N$，$\Delta f = 1/T$ 及 $f_s = 1/\Delta t$，故上式为：

$$w(k\Delta t) \approx N\left[\frac{1}{N}\Sigma W(n\Delta f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi/N)nk}\right]\Delta f$$

利用式(2.177)给出的 IDFT 的定义，得到 ICFT 与 IDFT 的关系为：

$$w(k\Delta t) \approx f_s x(k) \tag{2.207}$$

式中，$x(k)$ 为具有 N 个元素的 IDFT 向量中的第 k 个元素。正如在导出式(2.184)时讨论的那样，**X** 向量中前 $N/2$ 个元素应选择为 $W(f)$ 正频率分量的抽样值(其中 $f = n\Delta f$)，后 $N/2$ 个元素应选择为 $W(f)$ 负频率分量的抽样值。

(b)运行 M 文件 SA 2_9. m，得到利用 IFFT 及式(2.207)计算出的 $h(t)$ 图形。对用 IFFT 计算出的 $h(t)$ 与图 2.15(b)所示的 $h(t)$ 的解析式进行比较，图中 $\tau_0 = RC = 1/(2\pi f_0)$。

习题

★ 2.1 对峰值为 A、频率为 f_0 的正弦波形，试利用时间平均运算因子证明该波形的均方根值为 $A/\sqrt{2}$。

2.2 设函数发生器产生的周期电压波形如图 P2.2 所示。

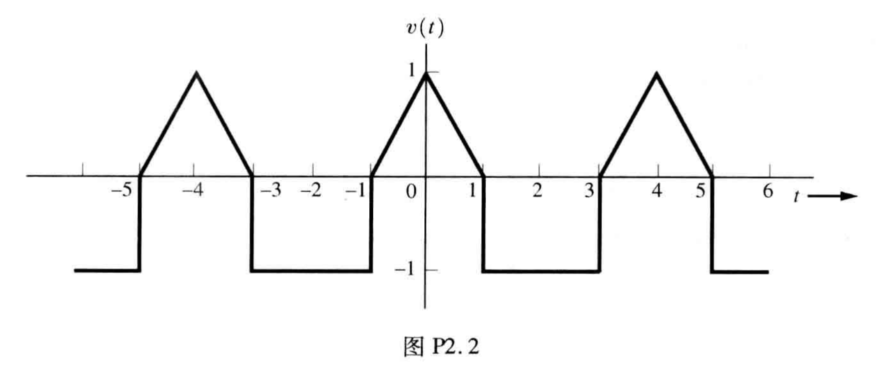


图 P2.2

(a)求波形的直流电压值。

(b)求波形的均方根值。

(c)如果在 1000 Ω 的负载两端加上该电压波形，问负载上消耗的功率为多大？

2.3 设一个负载两端的电压为 $v(t) = A_0\cos\omega_0 t$，负载中流过的电流为方波信号，如下式：

$$i(t) = I_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\Pi\left(\frac{t - nT_0}{T_0/2}\right) - \Pi\left(\frac{t - nT_0 - (T_0/2)}{T_0/2}\right)\right]$$

式中，$\omega_0 = 2\pi/T_0$，$T_0 = 1$ s，$A_0 = 10$ V，$I_0 = 5$ mA。

(a)写出瞬时功率的表达式，并画出波形。

(b)求平均功率值。

★ 2.4 设加在一个 50 Ω 的电阻负载上的电压为余弦波形的正值部分，即

$$v(t) = \begin{cases} 10\cos\omega_0 t, & |t - nT_0| < T_0/4 \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

式中的 n 为任意整数。

(a)画出电压和电流波形。

(b)计算电压和电流波形中的直流分量。

(c)求电压和电流波形的均方根值。

(d)求负载上消耗的总的平均功率值。

2.5 在习题 2.4 中，如果 $T_0 = 1$ s，试计算负载在 1 小时内消耗的能量。

2.6 确定下面的信号是能量信号还是功率信号，并计算相应的归一化能量或功率。

(a) $w(t) = \Pi(t/T_0)$。

(b) $w(t) = \Pi(t/T_0)\cos\omega_0 t$。

(c) $w(t) = \cos^2\omega_0 t$。

2.7 将平均读数的功率计与发射机的输出电路相连。发射机的输出端接有 75 Ω 的电阻性负载，这时功率计的读数为 25 W。试问：

(a)功率为多少 dBm?

(b)功率为多少 dBk?

(c)以 dBmV 为单位时的功率值为多少?

2.8 某有线电视公司通过一根 75 Ω 的同轴电缆与一个住所的电缆调制解调器相连，提供频率为 843 MHz，幅度为 0 dBmV 的信号。该调制解调器通过以太网连接，使用这个下行信号为互联网用户的电脑下载数据。(由调制解调器发送的上行信号频率为 33.5 MHz)如果把该调制解调器看作是下行信号的一个 75 Ω 的电阻负载，那么频率为 843 MHz 的下行信号的功率是多大?

2.9 假设加在 1000 Ω 负载两端的电压波形的均方根值 V_{rms} 是已知的，试导出由 V_{rms} 值计算 dBm 值的公式。

★ 2.10 如图 P2.10 所示，放大器与 50 Ω 的负载相连并由正弦电流源激励。设放大器的输出阻抗为 10 Ω，输入阻抗为 2000 Ω。试计算该电路的实际分贝增益。

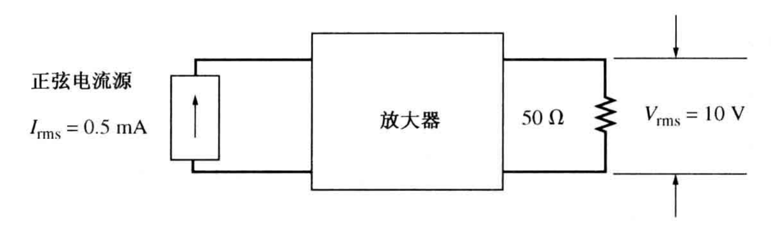


图 P2.10

★ 2.11 设调频(FM)接收机 300 Ω 天线上的输入电压(均方根值)为 3.5 μV。

(a)求输入功率(W)。

(b)计算输入功率低于 1 mW 的分贝(dBm)值。

(c)如果天线的输入阻抗为 75 Ω 而不是 300 Ω，问在相同的输入功率条件下，天线上的输入电压为多少(毫伏)?

2.12 频率为 103.5 MHz 的 FM 信号从天线通过同轴电缆连接到 FM 接收机上。该 FM 信号在接收机 75 Ω 天线的输入端的功率电平为 -100 dBm。问这个 FM 信号在天线输入端的均方根电压值是多少?

2.13 设电压波形 $v(t) = 15\sin(\omega_0 t - 30°)$，其中 $\omega_0 = 2000\pi$。试问与此波形相对应的向量的值是多少?

2.14 设信号为 $w(t) = 6\sin(100\pi t - 40°) + 4\cos(100\pi t)$，试求其对应的向量。

★ 2.15 试计算由下式给出的波形的傅里叶变换：

$$w(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t \geq 1 \\ 0, & t < 1 \end{cases}$$

2.16 试求波形 $w(t) = e^{-\pi(t/T)^2}$ 以 T 为参数的频谱。当 T 增加时，看看 $w(t)$ 及 $W(f)$ 的宽度有什么变化?

2.17 利用卷积性质，求下面波形的频谱：

$$w(t) = \sin 2\pi f_1 t \cos 2\pi f_2 t$$

★ 2.18 求下面以 A 和 T_0 为参数的三角波形的频谱(傅里叶变换)：

$$s(t) = \begin{cases} At, & 0 < t < T_0 \\ 0, & 否则 \end{cases}$$

2.19 求图 P2.19 所示波形的频谱。

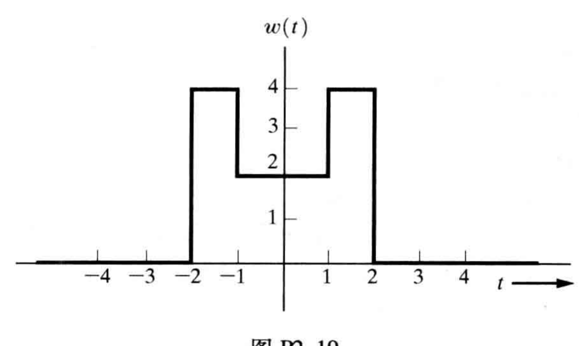


图 P2.19

2.20 如果 $w(t)$ 的频谱为：

$$W(f) = \frac{j2\pi f}{1 + j2\pi f}$$

试求下列波形的频谱 $X(f)$：

(a) $x(t) = w(2t+2)$。

(b) $x(t) = e^{-jt} w(t-1)$。

(c) $x(t) = 2\dfrac{dw(t)}{dt}$。

(d) $x(t) = w(1-t)$。

2.21 由式(2.30)，求 $W(f) = A\Pi(f/2B)$ 对应的 $w(t)$，并用对偶性质验证所得的结果。

2.22 求以下衰减正弦波形的正交频谱函数 $X(f)$ 和 $Y(f)$：

$$w(t) = u(t)e^{-at} \sin \omega_0 t$$

式中的 $u(t)$ 为单位阶跃函数，$a > 0$，且 $W(f) = X(f) + jY(f)$。

2.23 求 $w(t) = e^{-|t|/T}$ 的频谱。

★ 2.24 求下列波形的傅里叶变换。画出波形及振幅频谱图[提示：利用式(2.184)]。

(a) $\Pi\left(\dfrac{t-3}{4}\right)$。

(b) 2。

(c) $\Lambda\left(\dfrac{t-5}{5}\right)$。

2.25 利用式(2.184)，求下面波形的近似傅里叶变换：

$$x(t) = \begin{cases} \sin(2\pi t/512) + \sin(70\pi t/512), & 5 < t < 75 \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

2.26　计算图 P2.26 所示的梯形脉冲的频谱。

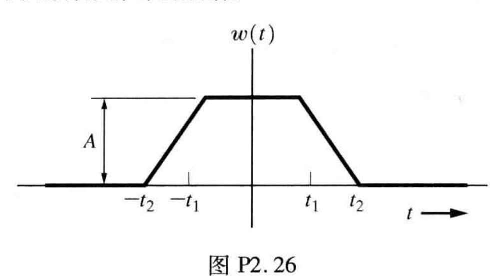


图 P2.26

2.27　证明下式成立：

$$\mathscr{F}^{-1}\{\mathscr{F}[w(t)]\} = w(t)$$

[提示：利用式(2.33)。]

2.28　利用傅里叶反变换的定义，证明 $w(t)$ 在 $t=0$ 时的值等于 $W(f)$ 的积分面积，即证明下式成立：

$$w(0) = \int_{-\infty}^{\infty} W(f)\,\mathrm{d}f$$

2.29　证明：

(a) 如果 $w(t)$ 为 t 的实偶函数，那么 $W(f)$ 是实函数。

(b) 如果 $w(t)$ 为 t 的实奇函数，那么 $W(f)$ 是虚函数。

2.30　假设波形的频谱如下式，频谱是以赫兹为单位的频率的函数：

$$W(f) = \frac{1}{2}\delta(f-10) + \frac{1}{2}\delta(f+10) + \frac{\mathrm{j}\pi f}{2+\mathrm{j}2\pi f}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi f}$$

试求对应的角频率频谱函数 $W(\omega)$。

2.31　单位冲激函数也能够用下式来定义：

$$\delta(t) = \lim_{\omega\to\infty}\left[Ka\left(\frac{\sin at}{at}\right)\right]$$

求上式中所需要的 K 值，并证明该定义与课本中给出的单位冲激函数的定义是一致的。试给出另外一种一般的函数，使得函数中的某个参数取极限时该函数变为狄拉克(Dirac) δ 函数。

★ 2.32　当 $a\to\infty$ 时，用 $v(t) = a\mathrm{e}^{-at}$，$a>0$，近似 $\delta(t)$。

(a) 画出 $a = 0.1$、1 及 10 时的 $v(t)$ 波形。

(b) 画出 $a = 0.1$、1 及 10 时的 $V(f)$ 波形。

2.33　证明下式成立：

$$\operatorname{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{1}{\mathrm{j}\pi f}$$

[提示：利用式(2.30)及附录 A 中的结果 $\int_0^\infty (\sin x)/x\mathrm{d}x = \pi/2$。]

2.34　证明下式成立：

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{\mathrm{j}2\pi f}$$

[提示：利用线性(叠加原理)定理及习题 2.33 中的结果。]

2.35　证明式(2.47)中 δ 函数的平移性质可以推广到 δ 函数的导数的积分运算中，即证明下式成立：

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x)\delta^{(n)}(x - x_0)\mathrm{d}f = (-1)^n w^{(n)}(x_0)$$

式中的上标(n)表示δ函数的n阶导数。[提示:利用分部积分法。]

2.36 令$x(t) = \Pi\left(\frac{t-0.05}{0.1}\right)$。借助式(2.59)及式(2.60),利用 MATLAB 画出$x(t)$的频谱图。利用 FFT 及式(2.184)检验所得结果。

★ 2.37 如果$w(t) = w_1(t)w_2(t)$,证明下式成立:

$$W(f) = \int_{-\infty}^{\infty} W_1(\lambda)W_2(f-\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

式中,$W(f) = \mathscr{F}[w(t)]$。

2.38 证明下列等式成立:

(a) $\int_{-\infty}^{t} w(\lambda)\mathrm{d}\lambda = w(t) * u(t)$。

(b) $\int_{-\infty}^{t} w(\lambda)\mathrm{d}\lambda \leftrightarrow (\mathrm{j}2\pi f)^{-1}W(f) + \frac{1}{2}W(0)\delta(f)$。

(c) $w(t) * \delta(t-a) = w(t-a)$。

2.39 证明下式成立:

$$\frac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t} \leftrightarrow (\mathrm{j}2\pi f)W(f)$$

[提示:利用式(2.26)及分部积分法。假设$w(t)$为绝对可积的。]

2.40 正如例题 2.9 中讨论过的那样,证明下式成立:

$$\frac{1}{T}\Pi\left(\frac{t}{T}\right) * \Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$$

2.41 给定波形$w(t) = A\Pi(t/T)\sin\omega_0 t$,利用例题 2.10 中讨论过的相乘定理求$w(t)$的频谱。

★ 2.42 计算下列积分:

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 4\lambda}{4\lambda}\delta(t-\lambda)\mathrm{d}\lambda$。

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} (\lambda^3 - 1)\delta(2-\lambda)\mathrm{d}\lambda$。

2.43 证明下式成立:

$$M(f) * \delta(f - f_0) = M(f - f_0)$$

2.44 计算$y(t) = w_1(t) * w_2(t)$,其中,

$$w_1(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_0 \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

及

$$w_2(t) = \begin{cases} [1 - 2|t|], & |t| < \frac{1}{2}T_0 \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

2.45 给定$w(t) = 5 + 12\cos\omega_0 t$,其中$f_0 = 10$ Hz。求:

(a) $R_w(\tau)$。

(b) $P_w(f)$。

2.46 给定波形:

$$w(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \theta_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \theta_2)$$

式中,A_1、A_2、ω_1、ω_2、θ_1及θ_2为常数,求$w(t)$的自相关函数。

2.47 根据习题 2.46:

(a) 求$w(t)$的 PSD 函数。

(b)画出 $\omega_1 \neq \omega_2$ 时的 PSD。

(c)画出 $\omega_1 = \omega_2$ 及 $\theta_1 = \theta_2 + 90°$ 时的 PSD。

(d)画出 $\omega_1 = \omega_2$ 及 $\theta_1 = \theta_2$ 时的 PSD。

★ 2.48　给定周期电压波形，如图 P2.48 所示。

(a)求该波形的直流分量。

(b)求该波形的均方根值。

(c)写出该波形的复指数形式的傅里叶级数。

(d)求该波形的频谱。

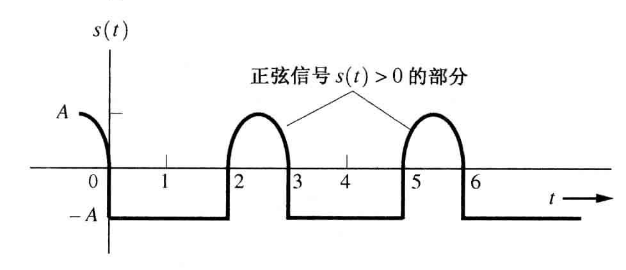


图 P2.48

2.49　确定下列情况下，$s_1(t)$ 与 $s_2(t)$ 在区间$\left(-\frac{5}{2}T_2 < t < \frac{5}{2}T_2\right)$内是否为正交函数，其中 $s_1(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$，$s_2(t) = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$ 及 $\omega_2 = 2\pi/T_2$。

(a)$\omega_1 = \omega_2$ 和 $\varphi_1 = \varphi_2$。

(b)$\omega_1 = \omega_2$ 和 $\varphi_1 = \varphi_2 + \pi/2$。

(c)$\omega_1 = \omega_2$ 和 $\varphi_1 = \varphi_2 + \pi$。

(d)$\omega_1 = 2\omega_2$ 和 $\varphi_1 = \varphi_2$。

(e)$\omega_1 = \frac{4}{5}\omega_2$ 和 $\varphi_1 = \varphi_2$。

(f)$\omega_1 = \pi\omega_2$ 和 $\varphi_1 = \varphi_2$。

★ 2.50　令 $s(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$，确定下列情况下 $s(t)$的均方根值：

(a)$\omega_1 = \omega_2$ 和 $\varphi_1 = \varphi_2$。

(b)$\omega_1 = \omega_2$ 和 $\varphi_1 = \varphi_2 + \pi/2$。

(c)$\omega_1 = \omega_2$ 和 $\varphi_1 = \varphi_2 + \pi$。

(d)$\omega_1 = 2\omega_2$ 和 $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$。

(e)$\omega_1 = 2\omega_2$ 和 $\varphi_1 = \varphi_2 + \pi$。

2.51　证明下式成立：

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t - kT_0) \leftrightarrow f_0\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(f - nf_0)$$

式中，$f_0 = 1/T_0$。[提示：将 $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t - kT_0)$展开为傅里叶级数，然后求傅里叶变换。]

★ 2.52　图 P2.52 中示出了三种函数。

(a)证明这些函数在区间(-4, 4)内是相互正交的。

(b)求相应的正交函数集。

★ 2.53　用习题 2.52(b)中求出的正交函数集将下面的波形展开为正交级数：

$$w_1(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t \leqslant 4 \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

★ 2.54　利用下式计算习题 2.53 中展开的正交级数的均方误差：

$$\varepsilon = \int_{-4}^{4}\left[w(t) - \sum_{j=1}^{3} a_j\varphi_j(t)\right]^2 \mathrm{d}t$$

★ 2.55　用习题2.52(b)中求出的正交函数集将下面的波形展开：

$$w_1(t) = \begin{cases} \cos(\frac{1}{4}\pi t), & -4 \leqslant t \leqslant 4 \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

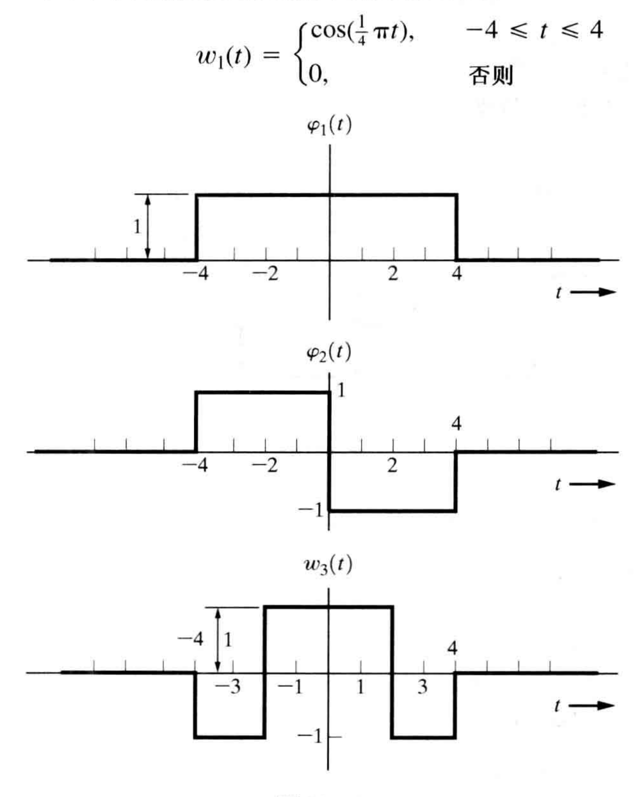


图 P2.52

★ 2.56　利用习题2.54所示的积分计算习题2.55中展开的正交级数的均方误差。

2.57　证明：式(2.95)给出的正交傅里叶级数中的基函数 $\cos(n\omega_0 t)$ 和 $\sin(n\omega_0 t)$ 在区间($a < t < a + T_0$)内为正交函数，其中 $\omega_0 = 2\pi/T_0$。

2.58　求图P2.58所示波形的傅里叶级数的复系数表达式。

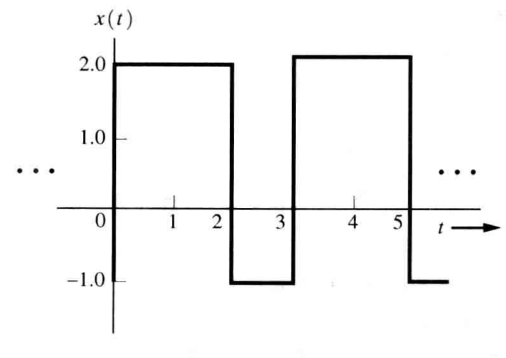


图 P2.58

2.59　图P2.58所示的周期信号通过一线性滤波器，滤波器的单位冲激响应为 $h(t) = e^{-\alpha t}u(t)$，其中，$t > 0$，$\alpha > 0$。

(a)求输出波形 $y(t)=x(t)*h(t)$ 的傅里叶级数的复系数表达式。

(b)求输出波形 $y(t)$ 的归一化功率表达式。

2.60　求图 P2.2 所示的周期波形的复数形式的傅里叶级数。

★ 2.61　求图 P2.61 中以 A、T、b 及 τ_0 为变量的周期矩形波形的傅里叶级数的复系数。[提示：答案可以简化为 $(\sin x)/x$ 与相移因子 $e^{j\theta_n(\tau_0)}$ 相乘的形式。]

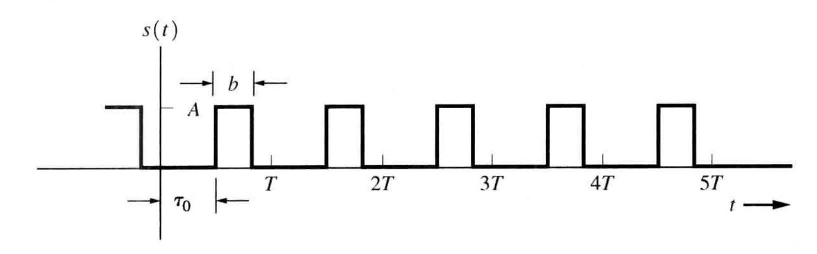


图 P2.61

2.62　对图 P2.62 所示的波形，求复数形式的傅里叶级数。

2.63　对图 P2.62 所示的波形，求正交形式的傅里叶级数。

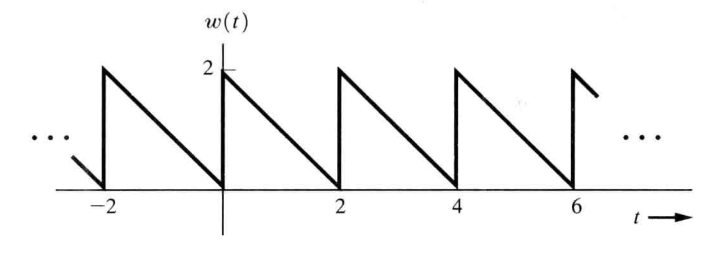


图 P2.62

★ 2.64　给定周期波形 $s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}p(t-nT_0)$，其中，

$$p_t(t)=\begin{cases}At, & 0<t<T\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

且 $T\leqslant T_0$。

(a)求傅里叶级数的系数 c_n。

(b)求傅里叶级数的系数 $\{x_n, y_n\}$。

(c)求傅里叶级数的系数 $\{D_n, \varphi_n\}$。

2.65　证明：式(2.103)中极坐标形式的傅里叶级数可由式(2.88)复数形式的傅里叶级数中的项重新排列得到。

2.66　证明式(2.93)正确。

2.67　令复数 c_1 和 c_2 分别用 $c_1=x_1+jy_1$ 和 $c_2=x_2+jy_2$ 表示，其中 x_1，x_2，y_1 和 y_2 都为实数。试通过证明下式说明 Re{·}为线性运算因子：

$$\mathrm{Re}\{c_1+c_2\}=\mathrm{Re}\{c_1\}+\mathrm{Re}\{c_2\}$$

2.68　假设 $y(t)=s_1(t)+2s_2(t)$，其中 $s_1(t)$ 为图 P2.48 中给出的波形，$s_2(t)$ 为图 P2.61 中给出的波形。令 $T=3$，$b=1.5$，$\tau_0=0$，求 $y(t)$ 的傅里叶级数的复系数 $\{c_n\}$。

2.69　计算图 P2.2 所示波形的 PSD。

★ 2.70　假设 $v(t)$ 为周期三角波形，如图 P2.70 所示。

(a)求 $v(t)$ 的复数形式的傅里叶级数。

(b)计算归一化的平均功率。

(c)计算并画出电压谱。

(d)计算并画出 PSD。

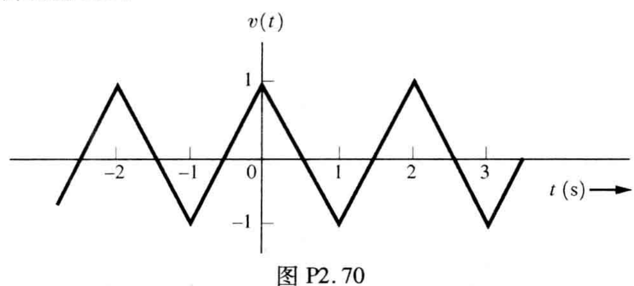


图 P2.70

2.71 令任意复数 c 用 $c = x + jy$ 表示，其中 x，y 为实数。如果 c^* 表示 c 的复共轭，试证明：

(a) $\text{Re}\{c\} = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}c^*$。

(b) $\text{Im}\{c\} = \frac{1}{2j}c - \frac{1}{2j}c^*$。

注意，当 $c = e^{jz}$ 时，(a)中给出的是 $\cos z$ 的定义式，(b)中给出的是 $\sin z$ 的定义式。

★ 2.72 计算并画出习题 2.4 中描述的半波整流正弦波的 PSD。

2.73 sine 和 cosine 波形的基本定义为：

$$\sin z_1 \triangleq \frac{e^{jz_1} - e^{-jz_1}}{2j} \quad \text{和} \quad \cos z_2 \triangleq \frac{e^{jz_2} + e^{-jz_2}}{2}$$

试证明：

(a) $\cos z_1 \cos z_2 = \frac{1}{2}\cos(z_1 - z_2) + \frac{1}{2}\cos(z_1 + z_2)$。

(b) $\sin z_1 \sin z_2 = \frac{1}{2}\cos(z_1 - z_2) - \frac{1}{2}\cos(z_1 + z_2)$。

(c) $\sin z_1 \cos z_2 = \frac{1}{2}\sin(z_1 - z_2) + \frac{1}{2}\sin(z_1 + z_2)$。

2.74 令两个复数分别用 $c_1 = x_1 + jy_1$ 和 $c_2 = x_2 + jy_2$ 表示，其中 x_1、x_2、y_1 和 y_2 都为实数。证明：

$$\text{Re}\{c_1\}\,\text{Re}\{c_2\} = \tfrac{1}{2}\text{Re}\{c_1 c_2^*\} + \tfrac{1}{2}\text{Re}\{c_1 c_2\}$$

注意，上式为习题 2.73 中 $\cos z_1 \cos z_2$ 恒等式的一般形式，对 $\cos z_1 \cos z_2$ 恒等式来说，$c_1 = e^{jz_1}$，$c_2 = e^{jz_2}$。

2.75 证明傅里叶变换是一种线性运算，即证明下式：

$$\mathcal{F}[ax(t) + by(t)] = a\mathcal{F}[x(t)] + b\mathcal{F}[y(t)]$$

2.76 画出下式给出的传输函数的振幅频谱和相位频谱图：

$$H(f) = \frac{j10f}{5 + jf}$$

2.77 给定一滤波器，如图 P2.77 所示，其中 $w_1(t)$ 和 $w_2(t)$ 为电压波形。

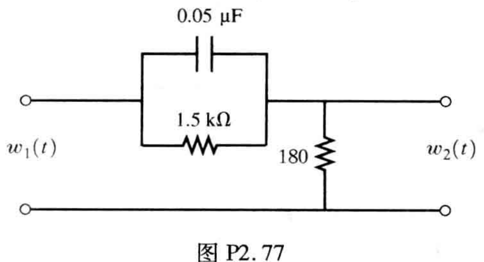


图 P2.77

(a)求传输函数。

(b)画出振幅频谱和相位频谱图。

(c)求功率传输函数。

(d)画出功率传输函数图。

2.78　信号的 PSD 为:

$$\mathcal{P}_x(f) = \frac{2}{(1/4\pi)^2 + f^2}$$

将该信号加到图 P2.78 所示的网络中。

(a)求 $y(t)$ 的 PSD。

(b)求 $y(t)$ 的平均归一化功率。

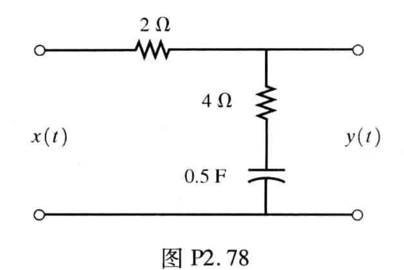
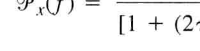


图 P2.78

2.79　信号 $x(t)$ 的 PSD 为:



$$\mathcal{P}_x(f) = \frac{K}{[1 + (2\pi f/B)^2]^2}$$

其中 $K>0$，$B>0$。

(a)求以 B 为参数的 3 dB 带宽。

(b)求以 B 为参数的等效噪声带宽。

★ 2.80　将信号 $x(t) = e^{-400\pi t}u(t)$ 加到一理想低通滤波器的输入端，滤波器的传输函数为:

$$H(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leqslant B \\ 0, & |f| \leqslant B \end{cases}$$

求通过 $x(t)$ 一半能量的滤波器的带宽 B。

2.81　证明：波形的平均归一化功率为自相关函数 $R_w(\tau)$ 在 $\tau = 0$ 时的值，即 $P = R_w(0)$。[提示：参见式(2.69)及式(2.70)。]

2.82　信号 $x(t) = 0.5 + 1.5\cos\left[\left(\frac{2}{3}\right)\pi t\right] + 0.5\sin\left[\left(\frac{2}{3}\right)\pi t\right]$ V 通过一个 RC 低通滤波器[见图 2.15(a)]，图中 $R = 1\ \Omega$，$C = 1$ F。试问:

(a)输入信号的 PSD，$\mathcal{P}_x(f)$ 为多少?

(b)输出信号的 PSD，$\mathcal{P}_y(f)$ 为多少?

(c)平均的归一化输出功率 P_y 是多少?

2.83　图 2.15(a)中 RC 低通滤波器的输入信号为:

$$x(t) = 1.0 + 2.0\cos\omega_x t + 0.5\sin\omega_x t$$

假设滤波器的截止频率为 $f_0 = 1.5f_x$。

(a)求输入信号的 PSD，$\mathcal{P}_x(f)$。

(b)求输出信号的 PSD，$\mathcal{P}_y(f)$。

(c)求输出信号 $y(t)$ 的归一化平均功率。

★ 2.84　利用 MATLAB，画出图 P2.84 所示的低通滤波器的振幅频率响应和相位频率响应，图中 $R_1 = 7.5\ \text{k}\Omega$，$R_2 = 15\ \text{k}\Omega$，$C = 0.1\ \mu\text{F}$。

2.85　图 P2.85 所示为一梳状滤波器。令 $T_d = 0.1$。

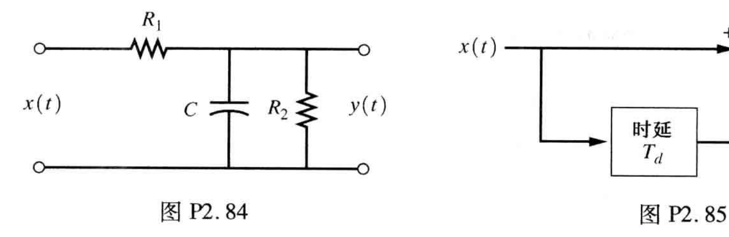


图 P2.84　　图 P2.85

(a)画出该滤波器的传输函数的幅频特性。

(b)如果输入信号为 $x(t) = \Pi(t/T)$，其中 $T=1$，试画出输出信号的频谱 $|Y(f)|$。

2.86 信号 $x(t) = \Pi(t-0.5)$ 通过一滤波器，滤波器的传输函数为 $H(f) = \Pi(f/B)$。试画出 B 取下列值时的输出波形：

(a) $B=0.6$ Hz。

(b) $B=1$ Hz。

(c) $B=50$ Hz。

★ 2.87 考察 RC 低通滤波器的失真效应。假设滤波器的输入信号是幅度为 1、占空比为 50% 的周期方波，滤波器的 3 dB 带宽为 1500 Hz。利用计算机求解并画出方波信号取下列频率值时的输出信号波形：

(a)300 Hz。

(b)500 Hz。

(c)1000 Hz。

[提示：用傅里叶级数表示方波信号。]

2.88 给定一个具有平坦 PSD 的信号[即 $P_s(f)=1$]，设计 RC 低通滤波器，使得在频率为 15 kHz 时滤波器对信号的衰减值为 20 dB，即对图 2.15 中的低通滤波器，求满足设计要求的 RC 值。

2.89 信号 $g(t) = e^{-0.1t}$ 的带宽近似为 0.5 Hz，因此用 $f_s=1$ Hz 的抽样频率对信号进行抽样时不会引起明显的混叠失真。在时间区间(0, 14)内，对带通信号进行抽样，得到抽样值 a_n。利用抽样定理，即式(2.158)，重构该信号。画出重构信号并与原信号进行比较，它们一致吗？如果抽样频率减小，会发生什么情况？

★ 2.90 对波形 $20 + 20\sin(500t + 30°)$ 进行周期抽样并由抽样值重构信号。

(a)求抽样值之间允许的最大时间间隔。

(b)为了重构 1 秒钟的该波形需要存储多少位抽样值？

2.91 利用计算机程序，计算矩形脉冲 $\Pi(t)$ 的 DFT。取该脉冲的五个抽样值，填补 59 个零点，这样就能够利用 64 位的 FFT 算法。画出所得的振幅频谱，并将该结果与脉冲的实际频谱进行比较。尝试用其他位数的脉冲抽样值与填补的零点位数相组合，看看 FFT 的结果会发生什么变化？

★ 2.92 利用 DFT，计算并画出波形 $\Lambda(t)$ 的频谱，将所得结果与图 2.6(c)中给出的结果进行比较。

2.93 利用 DFT，计算并画出图 P2.26 所示的脉冲的频谱 $|W(f)|$，图中 $A=1$，$t_1=1$ s，$t_2=2$ s。

2.94 令某一波形用下式表示：

$$w(t) = 4\sin(2\pi f_1 t + 30°) + 2\cos(2\pi f_2 t - 10°)$$

式中，$f_1=10$ Hz，$f_2=25$ Hz。

(a)利用 DFT，计算并画出 $|W(f)|$ 及 $\theta(f)$。

(b)令 $\mathcal{P}_w(f)$ 表示 $w(t)$ 的 PSD。利用 DFT，计算并画出 $\mathcal{P}_w(f)$。

(c)将(a)和(b)中得到的结果与用解析法得到的正确结果进行比较。

2.95 利用 DFT，计算并画出图 P2.48 所示的周期信号的频谱 $|S(f)|$，图中 $A=5$。

2.96 升余弦低通滤波器的传输函数为：

$$H(f) = \begin{cases} 0.5[1 + \cos(0.5\pi f/f_0)], & |f| \leq 2f_0 \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

令 $f_0=1$ Hz。利用 IFFT，计算该滤波器的单位冲激响应 $h(t)$。将计算结果与图 3.26(b)中 $r=1$ 情况下的结果进行比较。

2.97 给定低通滤波器如图 2.15 所示。

(a)求以 R 和 C 为参数的等效带宽。

(b)求滤波器的第一零点带宽。

(c)求滤波器的绝对带宽。

2.98　假设信号的 PSD 由下式给出：

$$\mathcal{P}_s(f) = \left[\frac{\sin(\pi f/B_n)}{\pi f/B_n}\right]^2$$

式中，B_n 为信号的零点带宽，试求以 B_n 为参数的等效带宽的表达式。

2.99　表 2.4 中给出了 BPSK 信号的六种不同的带宽定义。利用这些定义与式(2.201)，证明表 2.4 中给出的结果是正确的。

★ 2.100　给定三角脉冲波形为：

$$s(t) = \Lambda(t/T_0)$$

(a)求信号的绝对带宽。

(b)求以 T_0 为参数的 3 dB 带宽。

(c)求以 T_0 为参数的等效带宽。

(d)求以 T_0 为参数的零点带宽。

第3章　基带脉冲与数字信号

本章要点

- 模数信号转换（脉冲编码调制与增量调制）
- 二进制与多进制数字信号
- 数字信号的频谱与带宽
- 码间串扰的预防
- 时分复用
- 分组传输

3.1　引言

本章讨论如何将模拟波形（来自模拟信号源）进行编码得到数字基带信号。就像我们将要看到的那样：对模拟信号的数字化逼近可以做到非常精确。此外，我们还将学习如何对数字基带信号进行处理，以使它们占用的带宽最小。

由于数字电路成本低及数字信号处理的灵活性，使得数字传输方式日益受到欢迎。数字信号处理的灵活性表现为可以用一种通用的通信系统，将来自数字信源的数据和由模拟信号编码得到的数字信号进行混合传输。

模数转换过程中涉及到的信号称为基带信号。正如第1章所论述的那样，我们把基带信号对载波进行调制后产生的信号称为带通信号。

本章的四个主要目标如下：

- 研究如何将模拟波形转换成数字信号，其中最常用的是脉冲编码调制（PCM）技术。
- 学习如何计算数字信号的频谱。
- 考察接收机中对脉冲信号进行滤波时，是如何影响接收机恢复数字信息的能力的。对脉冲信号的滤波会在恢复的数字信号中引入码间串扰（ISI）。
- 研究如何将若干个数字比特流复用（组合）成一路高速数字流在数字系统上传输。本章将讨论时分复用技术（TDM）。①

在数字通信系统中，另一个很重要的问题是噪声对系统的影响。噪声导致数字接收机输出端产生错误比特，我们将在第7章对此问题进行研究。分析噪声对系统的影响时，要用到统计学中的概念，这些内容将在本书的附录B中重点讨论。

3.2　脉冲幅度调制

脉冲幅度调制（PAM）是一个工程术语，它用来描述模拟波形到脉冲信号的转换过程，脉冲信号的幅度表示模拟信息。因为将模拟波形转换成PCM数字信号时，第一个步骤是模拟波形到

---

① 其他的复用技术，如频分复用和码分复用，将在第5章和第8章中讲述。

PAM 信号的转换，所以我们首先研究 PAM 信号。在一些应用中也可以直接使用 PAM 信号，而无需将 PAM 信号转换成 PCM 信号。

第 2 章中研究的抽样定理提供了重构模拟波形的方法，即通过抽样值和正交函数$(\sin x)/x$重构模拟波形。PAM 波形是一种看起来像脉冲的信号，它包含模拟波形的信息。由于使用了脉冲，因此可以预料 PAM 波形的带宽比模拟波形的带宽要宽得多，但是脉冲信号更适合在数字系统中使用。我们将会看到，和抽样定理所要求的一样，PAM 脉冲信号的速率$f_s \geqslant 2B$，这里 B 为模拟波形的最高频率，$2B$ 称为奈奎斯特速率。

有两种类型的 PAM 信号：自然抽样产生的 PAM 信号和瞬时抽样产生的平顶脉冲 PAM 信号，这些信号分别如图 3.1 和图 3.5 所示。平顶类型的 PAM 信号转换成 PCM 信号时更有用，而自然抽样型的 PAM 信号更易于产生，并可应用于其他的场合。

3.2.1　自然抽样(门控)

定义　如果模拟波形 $w(t)$ 带限于 B Hz，则用自然抽样(门控)方法产生的 PAM 信号为：

$$w_s(t) = w(t)\, s(t) \tag{3.1}$$

其中，

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t-kT_s}{\tau}\right) \tag{3.2}$$

是矩形脉冲信号，且$f_s = 1/T_s \geqslant 2B$。

定理　自然抽样 PAM 信号的频谱为：

$$W_s(f) = \mathscr{F}[w_s(t)] = d\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi nd}{\pi nd} W(f-nf_s) \tag{3.3}$$

其中，$f_s = 1/T_s$，$\omega_s = 2\pi f_s$，信号 $s(t)$ 的占空比为 $d=\tau/T_s$，$W(f) = \mathscr{F}[w(t)]$是原始未抽样波形的频谱。

证明　对式(3.1)求傅里叶变换，可以得到：

$$W_s(f) = W(f) * S(f) \tag{3.4}$$

$s(t)$可以表示成傅里叶级数的形式：

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_s t} \tag{3.5a}$$

式中，

$$c_n = d\,\frac{\sin n\pi d}{n\pi d} \tag{3.5b}$$

由于 $s(t)$ 是周期信号，因此可以利用式(2.109)获得其频谱：

$$S(f) = \mathscr{F}[s(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(f-nf_s) \tag{3.6}$$

于是，式(3.4)等价于：

$$W_s(f) = W(f) * \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\delta(f-nf_s)\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n W(f) * \delta(f-nf_s)$$

或

$$W_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n W(f-nf_s) \tag{3.7}$$

将式(3.5b)代入上式就可以得到式(3.3)。

相对而言，自然抽样 PAM 波形更易于产生，因为它只需用到模拟开关，而现在已经有 CMOS 硬件(如 4016-四双向开关)可供使用。图 3.2 给出了这种硬件的示意图，而相关的波形 $w(t)$、$s(t)$与 $w_s(t)$如图 3.1 所示。

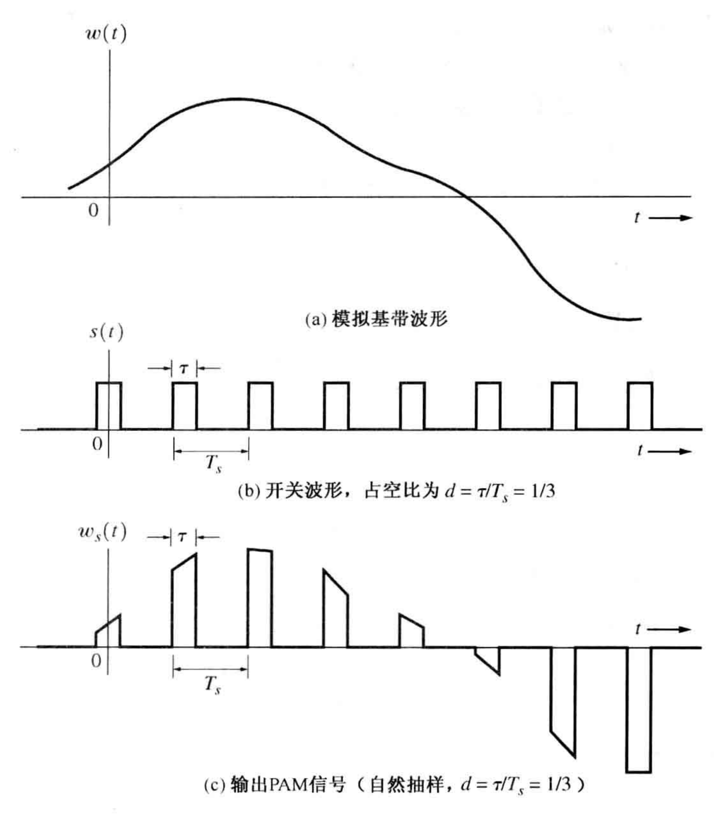


图 3.1　自然抽样 PAM 信号

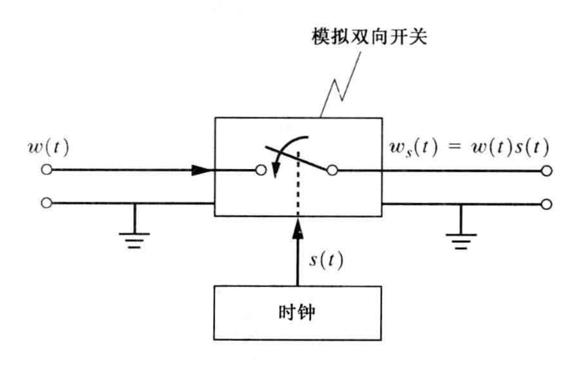


图 3.2　利用自然抽样(门控)产生 PAM 信号

式(3.3)给出了自然抽样 PAM 信号的频谱，它是输入模拟波形频谱的函数。假设输入波形具有矩形谱，图 3.3 给出了输入波形频谱与 PAM 信号频谱之间的关系，这里矩形脉冲波形的占空比为 $d=\tau/T_s=1/3$，抽样频率 $f_s=4B$。正如所期望的那样，输入模拟波形的频谱在抽样频率的各次谐波上重复出现。比较图 2.18 和图 3.3，可以看出自然抽样 PAM 信号的频谱与 2.7 节中研究的脉冲抽样的频谱类似。本例中，$d=1/3$，PAM 信号的频谱在 $\pm3f_s$、$\pm6f_s$ 等频点处为零，这是因为$(\sin x)/x$ 函数在这些谐波频率上的频谱为零的缘故。从图中可以看出，PAM 信号的带

宽要比原始模拟波形的带宽宽得多。实际上，就图3.3(b)所示的例子而言，PAM信号频谱包络的零点带宽为 $3f_s = 12B$，也就是说，PAM信号的零点带宽是模拟波形带宽的12倍。

例题 3.1　自然抽样 PAM 信号的频谱

假设模拟基带信号具有矩形谱，带宽为5 Hz。计算并且画出采用自然抽样方法产生的PAM信号频谱结构。解题过程参见 MATLAB 文件 Example3_01.m。

在接收端，将PAM信号 $w_s(t)$ 通过低通滤波器（截止频率为 $B < f_{\text{cutoff}} < f_s - B$），就可以恢复原始的模拟波形 $w(t)$，比较图3.3(b)和图3.3(a)可以看出这一点。因为落在低通滤波器通带外的PAM信号频谱与原始模拟波形的频谱具有相同的形状，所以从图3.3(a)可以看出，低通滤波器通带外的PAM信号，除了具有不同的增益因子 d（这可以通过放大器进行补偿）外，等同于原始的模拟波形。从图3.3(b)可以看出，只有在 $f_s \geq 2B$ 时，落在低通滤波器通带外的PAM信号频谱才与原始模拟波形的频谱具有相同的形状，否则在 f_s 各次谐波上的频谱成分将重叠，这也是奈奎斯特抽样频率必须满足的另一个例证。如果模拟波形欠抽样（$f_s < 2B$），频谱会发生重叠效应，这称为混叠，这将导致恢复出的信号产生失真。实际上，通常认为物理信号是时限的，所以它不可能是绝对带限的（正如第2章中指出的那样），因此，PAM信号总是会有一点混叠的。通常，可以对模拟信号先进行预滤波，然后将滤波器的输出引入PAM电路，这样就不用担心上述问题了。当然，有人已经研究过混叠噪声对系统的影响[Spilker, 1977]。

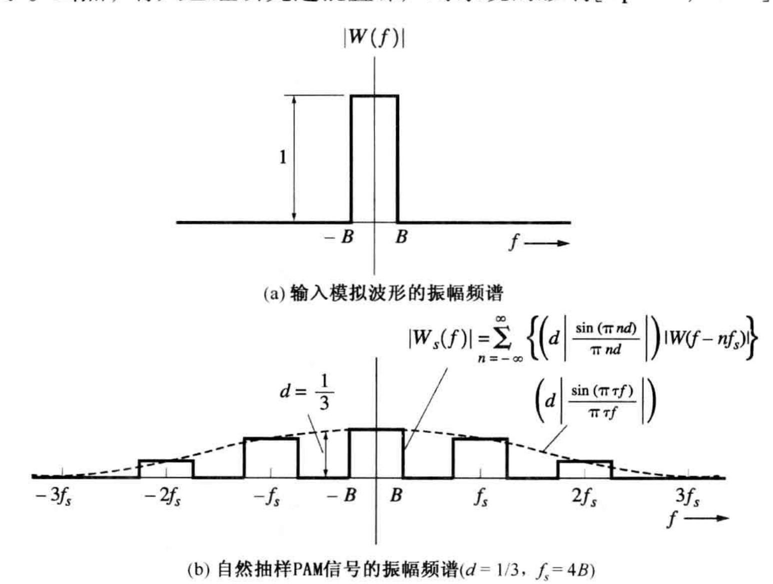


图 3.3　自然抽样 PAM 波形信号的频谱（参见 MATLAB 文件 Example3_01.m）

采用相乘检波的方法也可以从PAM信号中恢复模拟波形（见习题3.5），其原理如图3.4所示。这里PAM信号先与频率为 $\omega_0 = n\omega_s$ 的正弦信号相乘，于是在乘法器的输出端，以谐波 nf_s 为中心频率的PAM信号的频谱被搬移到基带（即 $f=0$）位置上。我们将在第4章研究相乘检波器，而在 $n=0$ 时，相乘检波法等同于上面讨论的低通滤波法。当然，读者可能会有这样的疑问，既然低通滤波器可以很好地完成PAM信号的恢复工作，为什么还要使用更复杂的相乘检波器呢？这个问题的答案是，因为噪声对PAM信号产生了影响。由于电源嗡鸣声所形成的工频噪声和机械电路震动所产生的噪声通常都落在对应于 $n=0$ 的基带范围内，而落在其他频带的可能性相对少一些，这样采用相乘检波法就可以克服噪声问题。

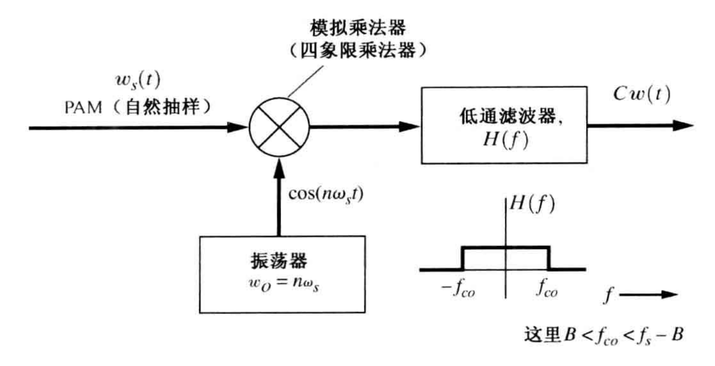


图 3.4 PAM 信号的解调(自然抽样)

3.2.2 瞬时抽样(平顶 PAM)

如图 3.5 所示,通过瞬时抽样和保持电路产生平顶信号,也可以完成模拟波形到脉冲信号的转换。这也是 2.7 节中研究的冲激脉冲序列抽样技术的另一种实现方法。

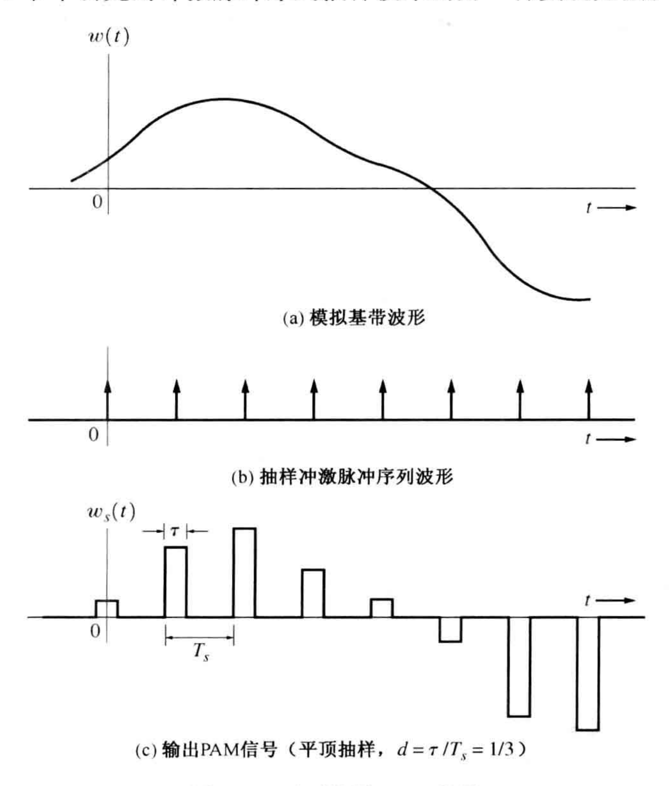


图 3.5 平顶抽样 PAM 信号

定义 如果模拟波形 $w(t)$ 带限于 B Hz,则用瞬时抽样方法产生的 PAM 信号为:

$$w_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w(kT_s)h(t - kT_s) \tag{3.8}$$

式中,$h(t)$ 为抽样脉冲波形。对于平顶抽样,脉冲波形可表示为:

$$h(t) = \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1, & |t| < \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases} \tag{3.9}$$

其中，$\tau \leqslant T_s = 1/f_s$，且 $f_s \geqslant 2B$。

定理　平顶 PAM 信号的频谱为：

$$W_s(f) = \frac{1}{T_s} H(f) \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(f - kf_s) \tag{3.10}$$

式中，

$$H(f) = \mathscr{F}[h(t)] = \tau\left(\frac{\sin \pi\tau f}{\pi\tau f}\right) \tag{3.11}$$

由于在 $t = kT_s$ 时刻对模拟波形 $w(t)$ 进行抽样，且样本值 $w(kT_s)$ 决定了平顶矩形脉冲的幅值，因此这类 PAM 信号是由瞬间样本值组成的，如图 3.5(c) 所示。采用抽样与保持电路可以产生平顶 PAM 信号。

在式(3.8)中，除了矩形脉冲外，还可以使用其他形状的脉冲信号，当然这时产生的 PAM 信号不再是平顶的。应该注意到，如果 $h(t)$ 是 $(\sin x)/x$ 型的脉冲，则式(3.8)就等同于抽样定理中的式(2.158)，这时抽样得到的信号与原始未经抽样的模拟信号 $w(t)$ 是相同的。

证明　对式(3.8)求傅里叶变换，可以得到平顶 PAM 信号的频谱。首先引入卷积运算，用一种更方便的形式重写式(3.8)：

$$\begin{aligned} w_s(t) &= \sum_k w(kT_s) h(t) * \delta(t - kT_s) \\ &= h(t) * \sum_k w(kT_s)\delta(t - kT_s) \end{aligned}$$

因此，

$$w_s(t) = h(t) * \left[w(t) \sum_k \delta(t - kT_s)\right]$$

PAM 信号的频谱为：

$$W_s(f) = H(f)\left[W(f) * \sum_k e^{-j2\pi f kT_s}\right] \tag{3.12}$$

由于指数函数的和等价于周期函数的傅里叶级数展开(在频域中)，其中的周期函数为冲激脉冲序列，即

$$\frac{1}{T_s}\sum_k \delta(f - kf_s) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j(2\pi n T_s)f} \tag{3.13a}$$

式中，

$$c_n = \frac{1}{f_s}\int_{-f_s/2}^{f_s/2}\left[\sum_k \delta(f - kf_s)\right] e^{-j2\pi n T_s f} df = \frac{1}{f_s} \tag{3.13b}$$

将式(3.13a)代入式(3.12)，得：

$$\begin{aligned} W_s(f) &= H(f)\left[W(f) * \frac{1}{T_s}\sum_k \delta(f - kf_s)\right] \\ &= \frac{1}{T_s} H(f)\left[\sum_k W(f) * \delta(f - kf_s)\right] \end{aligned}$$

上式简化后即得到式(3.10)。

图 3.6 中给出了输入模拟波形具有矩形谱时的平顶 PAM 信号的频谱。采用低通滤波器可

以从平顶 PAM 信号中恢复原始的模拟波形。由于 $H(f)$ 的滤波效应引起 PAM 信号的平顶形状，导致恢复出的模拟波形中部分高频信息的丢失。如果高频信息丢失严重，可以通过减小 τ 值，或者在低通滤波器的传输函数的高频部分引入额外的增益来减少信息的丢失。此时，称这样的低通滤波器为均衡滤波器，它的传递函数为 $1/H(f)$。由于 τ/T_s 决定了恢复的模拟波形的增益，当 τ 相对于 T_s 较小时恢复波形的增益也较小，所以通常称脉冲的宽度 τ 为“孔径”。当然也可以采用类似于图 3.4 所给出的相乘检波法恢复模拟波形，但必须在乘法器前加预滤波器(使得以 $f=nf_s$ 为中心的频段上的频谱更平坦些)，以补偿因孔径效应所造成的频谱分量的丢失。再一次强调，为了预防出现混叠，f_s 必须满足条件 $f_s \geq 2B$。

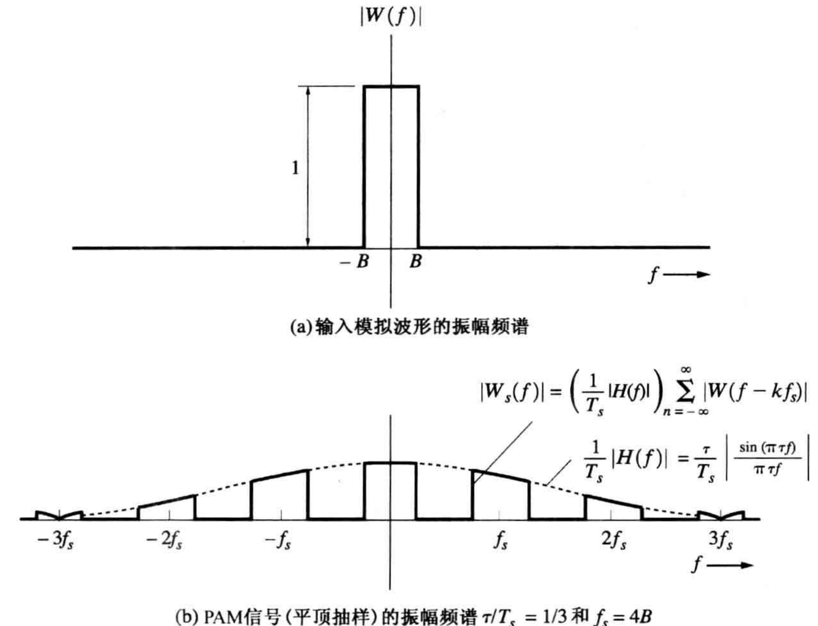


图 3.6　具有平顶抽样的 PAM 波形的频谱(见文件 Example 3_02. m)

例题 3.2　平顶抽样 PAM 信号的频谱

假设模拟基带信号具有矩形频谱，带宽为 5 Hz。计算并且画出采用平顶抽样方法产生的 PAM 信号频谱结构。解题过程参见 M 文件 Example3_02. m。

由于窄脉冲具有很大的带宽，所以无论是自然抽样还是瞬时抽样的 PAM 信号，在信道上传输时都需要很宽的频率响应，这给信道的幅度和相位响应提出了严格的要求。传输 PAM 信号所需要的带宽比传输原始模拟波形所需要的带宽要宽得多，所以 PAM 系统的噪声性能不可能比直接传输模拟波形的系统好。因而，PAM 信号并不适用于长距离传输。但是 PAM 确实提供了一种将模拟信号转换成 PCM 信号(将在下一节中讨论)的方法。同时 PAM 还是一种将信号复用到不同时隙上去的方法，这样，来自不同信源的多个 PAM 信号可以交织在一起，从而可以在一个信道上传输多路 PAM 信号。这也就是所谓的时分复用技术，我们将在 3.9 节中讨论它。

3.3　脉冲编码调制

定义　脉冲编码调制(PCM)本质上是一种特殊类型的模数转换方式，它通过串行比特流中的码字来表示模拟波形的瞬间样本中包含的信息。

如果假设每个码字中包含 n 位二进制码元，那么就存在 $M=2^n$ 个不同的码字，每个码字对应于一个特定的幅度电平。然而模拟波形样本的幅度值可以是任意数量量化电平中的某一个，所以通常采用最接近于实际样本值的码字来表示该样本值，上述过程称为量化过程。也可以这样来描述量化过程：采用最接近于实际样本值的那个允许值来代替样本值 $w(kT_s)$，这里，存在 M 个允许的值，每个值对应于一个码字。其他常用的模数转换方法，例如增量调制(DM)与差分脉冲编码调制(DPCM)，将在后续的章节中讨论。

由于 PCM 系统有许多优点，所以它很常用。PCM 的优点如下：

- 可以在系统中广泛使用比较便宜的 PCM 数字电路。
- 从各种类型的模拟信源(语音、视频等)编码得到的 PCM 信号可以与数据信号(来自数字计算机)组合在一起，并在一个公共的高速数字通信系统中传输。这种信号的组合称为时分复用，将在后续的章节中详细讨论。
- 在需要中继器的长距离数字电话系统中，尽管输入中继器的是包含有噪声的 PCM 信号，但是在中继器的输出端可以再生出"干净的"PCM 信号。当然，输入信号中的噪声将引起再生的 PCM 信号中的比特错误。
- 数字系统的噪声性能优于模拟系统。此外，还可以采用适当的编码技术来进一步减小系统输出的误比特率，有关编码技术的内容已在第 1 章中讨论过。

PCM 的上述优点通常胜于它的缺点，其缺点是需要比模拟信号宽得多的带宽。

3.3.1　抽样、量化和编码

通过以下三个基本步骤可以获得 PCM 信号：抽样、量化和编码(见图 3.7)，其中通过抽样产生平顶 PAM 信号。

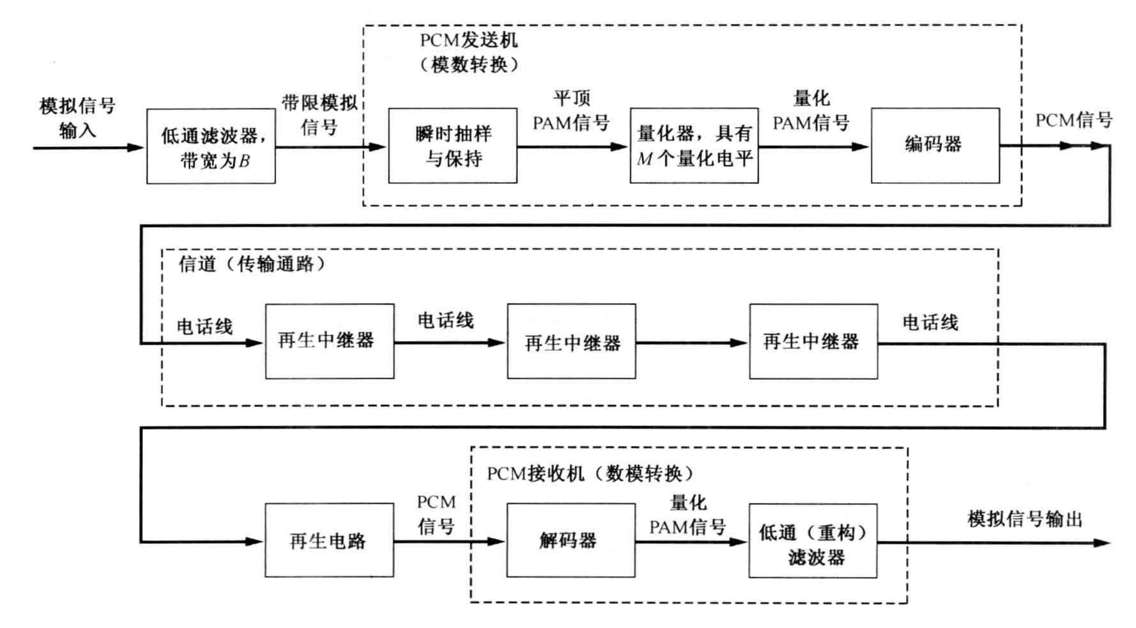
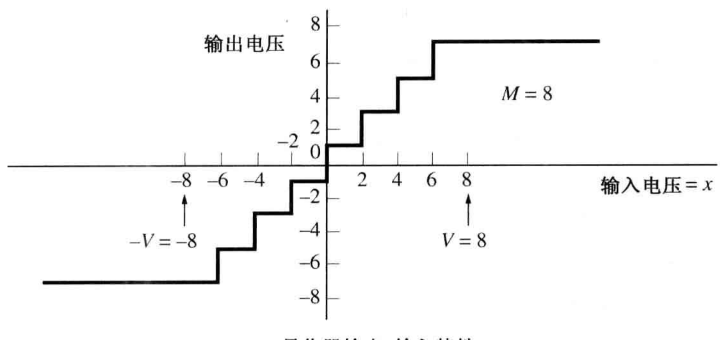


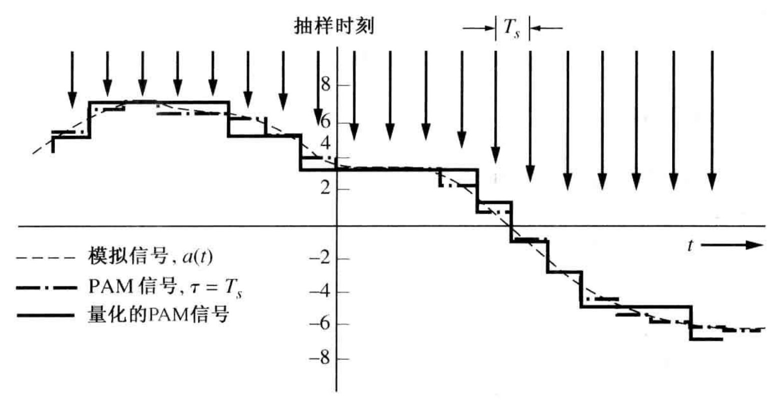
图 3.7　PCM 传输系统

$M=8$ 时的量化过程如图 3.8 所示。图中所有的量化台阶具有相同的大小，所以称这种量化器为均匀量化器。由于采用有限数量的量化电平(示例中 $M=8$)来逼近模拟样本值，因而量

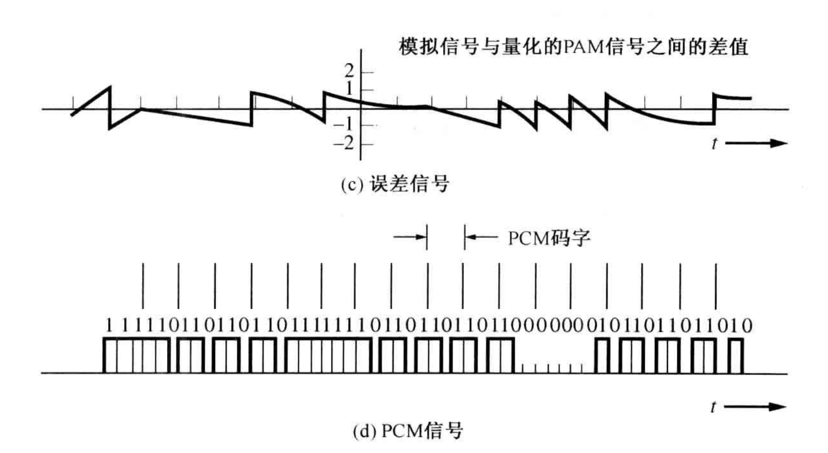
化过程就会在恢复的模拟波形中引入误差，误差波形如图3.8(c)所示。量化误差是指抽样器输入的模拟波形与量化器的输出波形之间的差值。注意，误差波形的峰值(±1)是量化台阶大小(2)的一半。假设以奈奎斯特频率(2B)或者更高的频率抽样，并且信道噪声可以忽略，那么由于量化误差的存在，恢复的模拟波形中仍将存在噪声，此噪声称为量化噪声。量化噪声可以认为是一种舍入误差。在7.7节中，我们将对量化噪声的统计特性进行分析，并导出PCM系统信噪比(SNR)的计算公式。量化器的输出就是量化的PAM信号。



(a) 量化器输出-输入特性



(b) 模拟信号，平顶PAM信号与量化的PAM信号



(c) 误差信号

(d) PCM信号

图3.8　PCM系统波形示例

通过将量化的样本值编码成二进制码字，可以从量化的PAM信号中得到PCM信号。系统

设计人员可以规定码字所代表的特定量化电平值。以表 3.1 中的格雷码为例，输出的 PCM 信号如图 3.8(d)所示，这里对应于每个量化样本值的 PCM 码字将在下一个时钟脉冲到来时输出。选择格雷码的原因是由于相邻电平的编码仅有一位之差，因此，只要符号位没有发生比特错误，则接收到的 PCM 码字中由于比特错误引起的模拟波形的电平误差最小。

至此，我们所讨论的 PCM 系统都是通过二进制码字来表示量化的模拟样本值的。当然，一般来说，除了二进制码字外，还可以使用其他的多进制码字来表示量化的模拟样本值，或者将二进制码字转换成多进制码字(将在 3.4 节讨论)。与二进制信号相比，多进制信号占用的带宽要小得多，当然它需要更复杂的多进制电路。

表 3.1　具有 $M=8$ 个量化电平的三比特格雷码

量化样本电压	格雷码字(PCM 输出)	
+7	110	
+5	111	
+3	101	
+1	100	
−1	000	符号位外，其余位成镜像关系
−3	001	
−5	011	
−7	010	

3.2.2　实用 PCM 电路

实现模数转换(ADC)功能时通常采用以下六种编码器：计数或斜坡编码器、串行或连续逼近编码器、直接转换或闪烁编码器、增量编码器、并行编码器、总和增量编码器。对这些编码方法的描述，请访问以下网址：http://en/wikipedia.org。这些编码技术将在以下章节中讨论。

计数编码器中，在对模拟波形进行抽样时，同时给斜坡电压发生器加电并启动二进制计数器。然后斜坡电压发生器的输出连续地与样本值进行比较，当斜坡电压值等于样本值时，从计数器中读出以二进制表示的计数值，这个值就是输出的 PCM 码字。最后将二进制计数器和斜坡电压发生器重置为零，为下一个抽样时刻的重新加电做准备。此种编码技术需要较少的组件，但这类 ADC 的速度受限于计数器的速度。Maxim 公司 LCD 输出的型号为 ICL 7106 的 ADC 集成电路就采用了计数编码器。

串行编码器将样本值与量化的估计值进行比较，连续的估计值取决于比较器的前一个输出是正还是负。在选取估计值时，开始采用较大的台阶，接着台阶逐渐减小，这样使得选取过程迅速收敛。估计电压值由一系列的分压器产生，并通过由数字逻辑控制的开关来配置这些分压器。最后读出这些开关的配置值作为输出的 PCM 码字。同斜坡编码技术相比，串行编码技术需要更精确的组件(如分压器)，反馈型 ADC 的速度取决于开关的速度。Analog Devices 公司的 AD7923 及 12 位的 ADC 都采用了串行编码技术。

直接转换或闪烁编码器使用了一组并行的比较器，比较器的参考电平为允许的量化值。编码时，将样本值同时输入到所有的并行比较器中，在特定数字逻辑的协助下，比较器输出电平的高低决定了输出的 PCM 码字。相比而言，该编码技术是所有编码技术中速度最快的一种，但它需要更多的硬件。Maxim 公司的型号为 MAX 104 的 8 位 ADC 集成电路采用的就是这种编码技术。

一些模数转换器(如 MAX 104)通常以并行的方式输出码字，这种情况下，为得到 PCM 信

号，需要将这些并行方式输出的码字转换成串行的形式以便在二线信道上传输。这一转换过程是由并串转换电路完成的，此种电路就是通常所说的串行输入-输出(SIO)芯片。SIO 芯片中包含有一个移位寄存器，它用于保持并行数据(通常为 8 或 16 输入线)，接着数据逐位从移位寄存器的最后一级移出到单一输出线上，以形成串行格式的数据。通常，SIO 芯片都是全双工的，也就是说，它包含两个移位寄存器，用以完成两个方向上数据流的并串或串并转换功能，其中一个移位寄存器将并行输入数据转换成串行输出数据以便在信道上进行传输，同时另一个移位寄存器将接收到的串行数据转换成并行数据以便进行相应的处理。目前，有以下三种类型的 SIO 芯片可供使用：通用异步收/发器(UART)、通用同步收/发器(USRT)以及通用同步/异步收/发器(USART)。其中 UART 发送或者接收异步串行数据，USRT 发送或者接收同步串行数据，而 USART 在单个芯片上集成了 UART 与 USRT 两者的功能(有关异步与同步串行数据线的讨论参见 3.9 节)。National Semiconductor 公司的 PC16550D 芯片就是一种 UART 收/发器，该芯片为 PC 串口上的异步串行数据与 8 位并行数据之间提供转换接口。

在接收端，通过数模转换器(DAC)将 PCM 信号解码变为模拟信号。如果 DAC 芯片的输入采用并行方式，则首先必须使用前面描述的 SIO 芯片将接收到的串行 PCM 数据转换成并行形式。接着通过 DAC 芯片将并行数据转换成模拟样本的逼近值，在此转换过程中，利用并行码字去控制阻性电流(或电压)分配器网络中的电子开关，从而输出模拟信号。由于模拟输出电压正比于分配器参考电压与码字值的乘积，所以称这种芯片为乘法 DAC。National Semiconductor 公司的型号为 DAC0808 的 8 位 DAC 芯片采用的就是乘法 DAC 技术。DAC 芯片输出模拟波形的量化样本值，它近似于模拟波形的样本值，这样一来，只要向 DAC 芯片提供时钟驱动，它就产生量化 PAM 信号，该 PAM 信号通过低通重构滤波器平滑后就可以获得模拟输出波形，这一过程如图 3.7 所示。

半导体公司制造了几百种 ADC 与 DAC 电路，读者可以从相关制造商的 Web 主页上找到这些芯片的数据手册。其中有许多这类芯片是为特定应用设计的。

3.3.3 PCM 信号的带宽

读者可能会问：PCM(串行)数据波形的频谱是什么样的？对于 PAM 信号，因为它是输入模拟信号的线性函数，所以其频谱是模拟信号频谱的函数。而对于 PCM 信号，情况就不是这样了。正如图 3.7 与图 3.8 所示，PCM 信号是输入模拟波形的非线性函数，这样一来，PCM 信号的频谱与模拟波形的频谱之间就没有直接的关系(在 3.4 节与 3.5 节中将会看到这一点)。

二进制(串行)PCM 波形的带宽取决于数据的比特率以及用于表示数据的脉冲波形的形状。由图 3.8 可看出，PCM 信号的比特率为：

$$R = nf_s \tag{3.14}$$

其中，n 为一个 PCM 码字中所包含的比特数($M = 2^n$)，f_s为抽样速率。为了不产生混叠失真，需要满足条件$f_s \geqslant 2B$，其中 B 为输入的模拟波形(该模拟信号将会被转化为 PCM 信号)的带宽。在 3.4 节中，维数定理给出了二进制编码的 PCM 波形带宽的下限：

$$B_{\text{PCM}} \geqslant \tfrac{1}{2}R = \tfrac{1}{2}nf_s \tag{3.15a}$$

仅当产生 PCM 波形的脉冲形状为$(\sin x)/x$ 型时，上式取最小值 $1/2R = 1/2nf_s$。然而，通常所使用的脉冲形状更接近于矩形，这样二进制编码的 PCM 波形带宽将大于此最小值。3.5 节与 3.6 节中将研究线路码和脉冲波形的形状选择的细节问题。PCM 波形的真正带宽取决于相应的选择结果。例如，参考图 3.15，假设选择最典型的矩形脉冲，则采用单极性 NRZ 码、极性 NRZ 码或者

双极性 RZ 码的 PCM 波形分别如图 3.15(b)、图 3.15(c)和图 3.15(e)所示，这些都是常用的 PCM 集成电路所产生的典型波形。那么，正如图 3.16(a)、图 3.16(b)和图 3.16(d)所示，零点带宽是脉冲宽度的倒数，二进制信号为 $1/T_b = R$。于是，在使用矩形脉冲时，PCM 波形的第一零点带宽为：

$$B_{\mathrm{PCM}} = R = nf_s \quad (\text{第一零点带宽}) \tag{3.15b}$$

表 3.2 列出了采用最小抽样速率 $f_s = 2B$ 时，PCM 波形的第一零点带宽的值。应该注意，式(3.15a)的维数定理指出了 PCM 信号带宽的下限为：

$$B_{\mathrm{PCM}} \geqslant nB \tag{3.15c}$$

式中，$f_s \geqslant 2B$，B 为相应的模拟波形的带宽。于是，对于任何合理的 n 值，串行 PCM 信号的带宽要比输入的模拟信号的带宽宽得多。在图 3.8 所示的例子中，$n=3$，PCM 信号的带宽至少是相应的模拟信号带宽的 3 倍。此外，如果使用不恰当的滤波器来减小 PCM 信号的带宽或者将 PCM 信号通过频率响应较差的系统的话，那么滤波后的脉冲将被拉长（脉宽延长），以至于一个比特的脉冲拖尾到了相邻的比特时隙中。如果这种脉冲拖尾现象很严重，则将导致比特判决错误。通常称这种脉冲拖尾效应为码间串扰(ISI)。3.6 节中将讨论无码间串扰时对信号滤波的要求。

表 3.2 无信道噪声时采用均匀量化的 PCM 系统的性能

使用的量化电平数量，M	PCM 码字的长度，n(比特)	PCM 信号的带宽(第一零点带宽)[a]	恢复的模拟信号功率与量化噪声功率之比(dB)	
			$(S/N)_{\text{pk out}}$	$(S/N)_{\text{out}}$
2	1	$2B$	10.8	6.0
4	2	$4B$	16.8	12.0
8	3	$6B$	22.8	18.1
16	4	$8B$	28.9	24.1
32	5	$10B$	34.9	30.1
64	6	$12B$	40.9	36.1
128	7	$14B$	46.9	42.1
256	8	$16B$	52.9	48.2
512	9	$18B$	59.0	54.2
1024	10	$20B$	65.0	60.2
2048	11	$22B$	71.0	66.2
4096	12	$24B$	77.0	72.2
8192	13	$26B$	83.0	78.3
16 384	14	$28B$	89.1	84.3
32 768	15	$30B$	95.1	90.3
65 536	16	$32B$	101.1	96.3

[a] B 是输入模拟信号的绝对带宽。

3.3.4 噪声的影响

PCM 系统输出端恢复出的模拟信号常受到噪声的影响，噪声主要有两种：

- PCM 编码是由具有 M 个量化台阶的量化器产生的量化噪声。
- 恢复出的 PCM 信号中的比特错误引起的噪声。信道噪声或者不恰当的信道滤波产生的 ISI 都将引起比特错误。

此外，正如 2.7 节与 3.2 节中所论述的那样，输入的模拟信号必须充分带限（使用低通预防

混叠滤波器)，并且以足够快的速率进行抽样，以使恢复出的模拟信号中的混叠噪声可以忽略不计。

第7章将证明，在特定的前提条件下，恢复出的模拟信号的峰值功率与所有噪声的平均功率的比值如下①：

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{pk out}} = \frac{3M^2}{1 + 4(M^2 - 1)P_e} \tag{3.16a}$$

而恢复出的模拟信号的平均功率与噪声的平均功率的比值为：

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = \frac{M^2}{1 + 4(M^2 - 1)P_e} \tag{3.16b}$$

式中，M 为 PCM 系统中使用的量化电平的数量，P_e为接收机中 DAC 恢复出的二进制 PCM 信号在未转换成模拟信号之前的误比特率。

例题 3.3 恢复出的模拟信号的平均信噪比

利用式(3.16b)，计算由误码率为 P_e的 PCM 信号恢复出的模拟信号的平均信噪比，并画出误码率 P_e在 $10^{-7} \sim 10^{-1}$范围内变化时，恢复出的模拟信号平均信噪比的变化情况。解题过程参见 M 文件 Example3_03. m。

第7章给出了许多不同类型的数字传输系统的 P_e值。第1章介绍了信道编码可以纠正比特错误，从而减小 P_e的值。因此，在许多实用系统中，P_e是可以忽略不计的。如果假设信道噪声没有引起比特错误(即 $P_e = 0$)，并且不存在码间串扰，那么由式(3.16a)可得，仅存在量化误差时的峰值 SNR 为：

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{pk out}} = 3M^2 \tag{3.17a}$$

由式(3.16b)可得，仅存在量化误差时的 SNR 均值为：

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = M^2 \tag{3.17b}$$

相应的 SNR 的数值如表 3.2 所列。

为了得到上述 SNR 值必须满足一个严格的前提条件，即 PCM 编码器输入端的模拟信号峰-峰值要设置成量化器的设计电平。参考图 3.8(a)中的例子，输入信号电压必须在 $-V$ 和 V 之间，这里 $V = 8$ V，是量化器的设计电平。对于任何输入波形，式(3.16)与式(3.17)都有相同的值。例如三角波形，它的峰-峰值为 $2V$，均方根值为 $V/\sqrt{3}$，其中，V 是量化器的设计峰值电平。

从实用角度来看，根据不同的工作状态，可以将 PCM 编码器输出端的量化噪声分成四种类型，它们分别是过载噪声、随机噪声、颗粒噪声和振荡噪声。正如前面所讨论的那样，PCM 编码器输入端模拟信号的峰值不能超过量化器的设计电平 V。如果输入信号峰值不超过 V，则 PCM 系统输出端恢复出的模拟信号为平顶波形，平顶的幅度接近于峰值 V，我们可以从示波器上清楚地看到这些平顶信号，此过程将产生过载噪声。由于平顶信号引入了非期望的高次谐波成分，所以恢复出的模拟信号听起来有些失真。

第二类量化噪声为随机噪声，它是在正常的工作状态下，并且输入信号电平设置恰当时，由随机量化误差所引入的，此状态与式(3.17)的前提条件相同。随机噪声是“白色”的嘶嘶声。如果输

---

① 由于推导此公式时需要用到统计学的知识，所以公式的推导过程将在第7章介绍。

入信号电平不够大，则对应的 SNR 将从式(3.17)的给出值下降到式(3.28a)与式(3.28b)的导出值。式(3.28a)与式(3.28b)将在后面讨论。但是，量化噪声总是或多或少具有一定的随机性。

如果输入信号进一步减小到相对于量化器的设计电平而言很小的程度，那么样本与样本之间的误差值并不相同，此时的噪声是刺耳的声音，就像将石头投入木桶时发出的声音一样，所以称这种类型的噪声为颗粒噪声。增加量化级的数量，也就是提高 PCM 信号的比特率，可以使颗粒噪声随机化(减小噪声功率)。同样，采用非均匀量化器，如下一节将讨论的 μ -律或 A -律量化器，也都可以减小颗粒噪声。

PCM 系统输出端可能产生的第四类量化噪声是振荡噪声。当模拟信号接近于常量，或者没有信号输入(即输入为零电平)时，可能产生振荡噪声。对于这种状态，量化的样本值(见图 3.8)可能在两个相邻量化级之间振荡，导致在 PCM 系统输出端形成非期望的正弦类音频信号，它的频率为 $1/2f_s$。有两种方法可以减小振荡噪声：其一是将对应的音频信号滤除；其二是重新设计量化器，使得在输入常量处没有垂直的量化台阶——例如在无信号输入时的零电平处。在无信号输入的情况下，也称振荡噪声为空闲信道噪声。要减小此类噪声，可以在量化器输出-输入特性图上采用水平量化台阶代替图 3.8(a)所示的垂直量化台阶。

利用 $M=2^n$ 的关系式，我们可以以分贝为单位将式(3.17a)和式(3.17b)写为：

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{dB}} = 6.02n + \alpha \tag{3.18}$$

式中，n 为一个 PCM 码字中包含的比特数。当 $\alpha=4.77$ 时，得到峰值 SNR 值；当 $\alpha=0$ 时，得到均值 SNR 值。此公式称为 6 dB 原则，它指出了 PCM 系统一个重要的性能特征：PCM 码字每增加一位，输出的 SNR 可以获得 6 dB 的提高。表 3.2 也说明了这一关系。尽管 α 的值取决于不同的假设条件(如不同类型的输入波形和量化特性)，但式(3.18)对于这些不同的假设条件都是有效的[Jayant 和 Noll，1984]。但有个条件是必须满足的，即无比特错误并且输入信号电平足够大，以至能覆盖绝大多数的量化电平。

例题 3.4　电话系统中 PCM 信号的设计

假设模拟音频(VF)电话信号占用的带宽为 300～3400 Hz。为了在数字电话系统中进行传输，必须将此信号转换成 PCM 信号。最小的抽样频率为 $2\times3.4=6.8$ 千样本/秒。实际应用中为了能够使用具有合理过渡带的低成本预防混叠的低通滤波器，常采用 8 千样本/秒的抽样频率对 VF 信号进行过抽样，这也是美国电话产业所采用的标准。假设利用 8 比特的码字来表示一个样本值，则二进制 PCM 信号的比特率为：

$$\begin{aligned} R &= (f_s \text{ 采样 / 秒})(n \text{ 比特 / 采样}) \\ &= (8 \text{ 千采样 / 秒})(8 \text{ 比特 / 采样}) = 64 \text{ 千比特 / 秒} \end{aligned} \tag{3.19}$$

称这种 64 千比特/秒(kbps)的信号为 DS-0 信号(数字信号，类型为零)。

参考式(3.15a)的维数定理，上述二进制 PCM 信号的最小绝对带宽为：

$$(B)_{\min} = \tfrac{1}{2}R = 32 \text{ kHz} \tag{3.20}$$

当使用具有$(\sin x)/x$ 形状的脉冲产生 PCM 信号时，才能获得此最小绝对带宽。如果使用具有矩形形状的脉冲，则相应 PCM 信号的绝对带宽是无限的，由式(3.15b)可得到其第一零点带宽为：

$$B_{\text{PCM}} = R = 64 \text{ kHz} \tag{3.21}$$

也就是说，为了传输此类数字语音 PCM 信号需要的带宽为 64 kHz，而原始模拟语音信号的带宽不超过 4 kHz(在 3.5 节中将介绍减小此类 PCM 信号带宽的方法，即对信号进行不会引入 ISI 的

滤波)。利用式(3.17a),可得到此类 PCM 信号的峰值信号与量化噪声功率比为:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{pk out}} = 3(2^8)^2 = 52.9 \text{ dB} \tag{3.22}$$

其中,$M=2^8$。应该注意到,是否包含奇偶校验位并不影响量化噪声。但可以利用校验位来减少因信道噪声或 ISI 引起的译码错误。本例中,因为假定 P_e为零,所以这些影响可以忽略不计。M 文件 Example3_04. m 给出了利用式(3.16a)得到的精确计算结果。

对于最佳条件(即 $P_e=0$)下的 PCM 系统,容易推导出它的性能是 M 的函数,其中 M 为使用的量化台阶的数量。表 3.2 给出了相应的结果。注意,在计算 SNR 时 PCM 码字中不包含奇偶校验位。

在设计 PCM 系统时,可以通过查表 3.2 获得相应的设计要求。例如,高保真音响发烧友倾向于数字音频记录技术,此时记录的是 PCM 信号,而不是模拟语音信号本身,用以产生华丽的音乐效果。对于动态范围达到 90 dB 的音乐信号,至少需要 15 位的 PCM 码字。此外,如果模拟信号带宽为 20 kHz,则采用矩形脉冲生成的 PCM 信号的第一零点带宽为 2 × 20 kHz × 15 = 600 kHz。考虑到过抽样和为减小 ISI 而预留的带宽,实际 PCM 信号的带宽在 1.5 MHz 左右。因此,为了记录和再生高质量的音乐信号,必须使用视频类型的磁带记录器。起初这类录音技术似乎有些荒谬,因为即使是昂贵的高质量模拟录音设备也很难达到 70 dB 的动态范围,所以采用数字音频技术是获取性能提高的唯一出路。现在这一事实已经由市场上日益流行的数字压缩光盘(CD)所证明。在 CD 中,每个立体声信道都采用 16 位的 PCM 码字,抽样频率为 44.1 kHz[Miyaoka, 1984; Peek, 1985],并且使用 RS 编码和交织技术来纠正由于盘面上的划痕或指印所引起的突发性错误。

在数字计算机系统中用来储存音频信息的波形文件是 PCM 信号的又一个应用。通常,PCM 信号的采样率为 8、11.025、12、16、22.025、24、32、41、48、96 和 192 千个样本/秒,而编码器采用 16 比特表示一个样本值,有时也会使用 8 比特、24 比特或者 32 比特来表示一个样本值。更多关于音频信息格式(比如 MP3)的内容,请参见维基百科中音频格式区别比较(http://en.wikipedia.org)的介绍。

PCM 也有较多种类的变形。例如,本章提到的 PCM 也称为线性脉冲编码(LPCM)。差分脉冲编码(DPCM)技术利用实际样本值和预估样本值之间的差值进行 PCM 编码。自适应差分脉冲编码(ADPCM)的量化步长也在自适应地变化。而增量编码调制(DM)只用一位比特对采样值进行编码,这部分内容详见 3.8 节。

3.3.5 非均匀量化:μ -律与 A-律压扩

在模拟语音信号中,零值电平附近的成分远大于峰值电平附近的成分。例如,语音信号数字化时,假设允许的峰值电压是 1 V,则微弱成分的电压值可能在 0.1 V 左右(与峰值电压相比下降了 20 dB)。对于这些幅度分布不均匀的信号,如果采用前面所讨论的均匀量化技术,则将引入很大的颗粒量化噪声。克服这一问题的方法是减小零电平附近量化台阶的大小,同时增大峰值电平处量化台阶的大小。由于量化过程中使用了不同大小的量化台阶,所以称这种量化技术为非均匀量化。非均匀量化特性的示例如图 3.9(a)所示。

为了实现信号的非均匀量化,可以先将信号通过压缩(非线性)放大器后输入到采用均匀量化技术的 PCM 电路中。在美国,普遍采用由下式定义的 μ-律压缩特性[Smith, 1957]:

$$|w_2(t)| = \frac{\ln(1+\mu|w_1(t)|)}{\ln(1+\mu)} \tag{3.23}$$

式中，$w_1(t)$的峰值电压为±1(即$|w_1(t)|\leqslant 1$)，μ是一个正常数，它为压缩参数，ln为自然对数。图3.9(b)给出了不同μ值时的压缩特性，注意，当$\mu=0$时对应于线性放大(就是均匀量化)。美国、加拿大和日本等国电话公司的PCM系统通常采用$\mu=255$的压缩特性[Dammann, McDaniel, Maddox, 1972]。

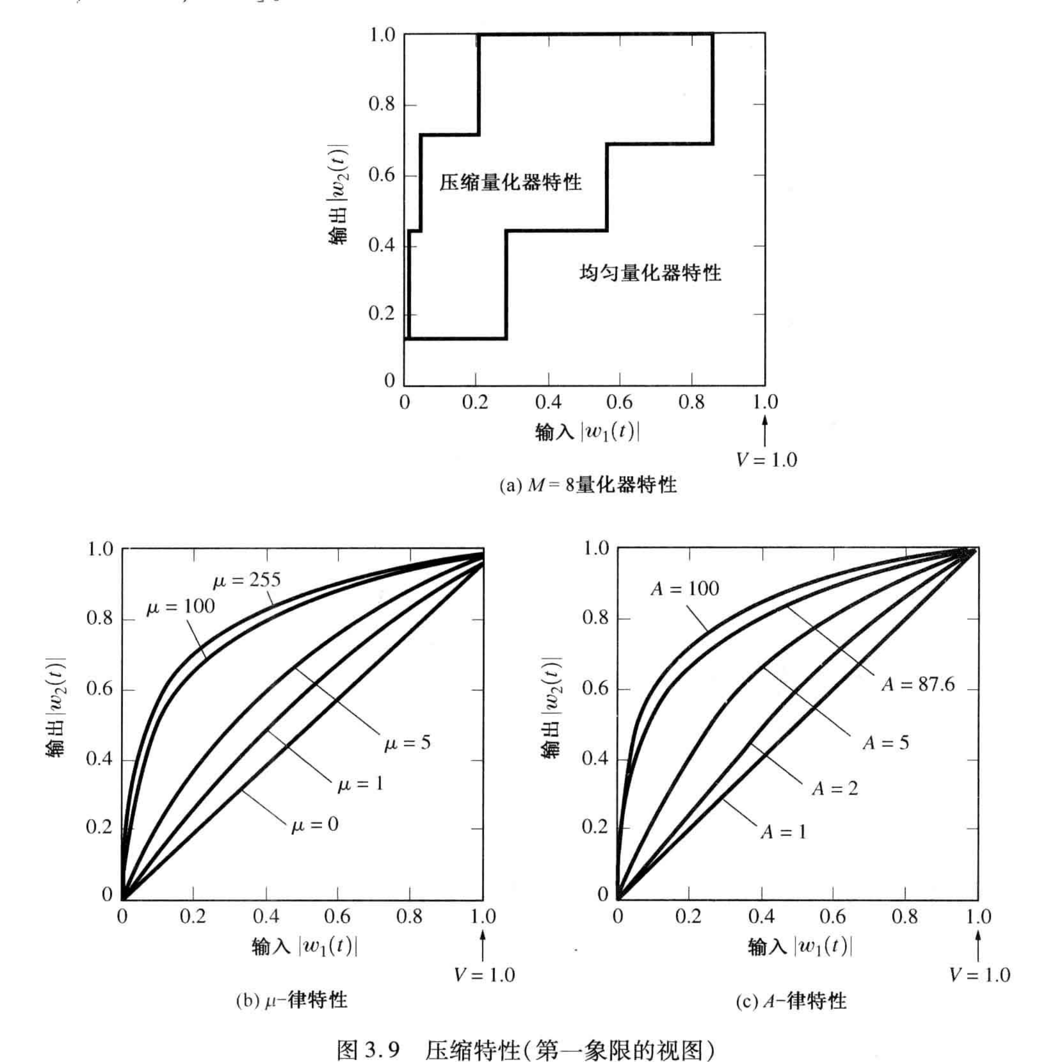


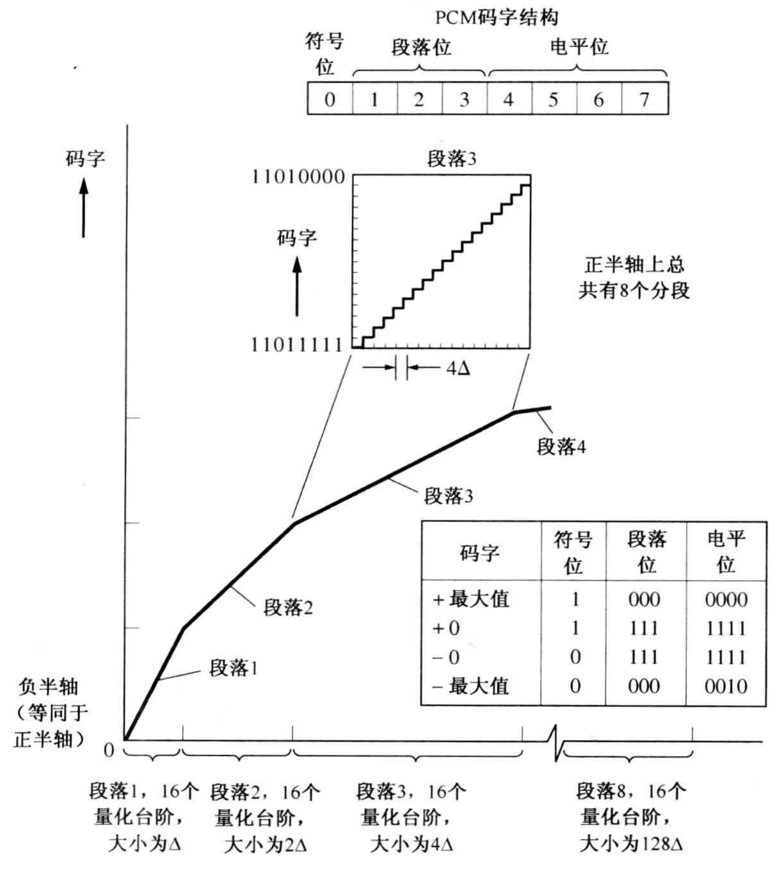
图3.9　压缩特性(第一象限的视图)

例题3.5　μ-律压缩特性

画出如图3.9(b)所示的μ-律压缩特性曲线。解题过程参见M文件Example3_05.m。

实用中，通常采用分段折线来逼近图3.9(b)所示的平滑非线性特性曲线，图3.9(d)给出了$\mu=255$时特性曲线的分段折线表示方法[Dammann, McDaniel, Maddox, 1972]。特性曲线的每一段用具有16个量化台阶的均匀量化器来逼近，并且量化台阶的大小由特定的段落号决定，即段落1使用16个(包括零点两侧的半个量化台阶)大小为Δ的量化台阶，段落2使用16个大小为2Δ的量化台阶，段落3使用16个大小为4Δ的量化台阶，其他段落依次类推。选择Δ值的原则是最大值(段落8的最后一个量化台阶)与输入模拟信号的峰值电平相匹配。对于$\mu=255$的压缩特性，现在广泛采用这种分段技术。如图3.9(d)所示，8比特的PCM码字中包含1比特

的符号位，指示输入电压的正负；3 比特的段落位，指出段落号；4 比特的电平位，指示段内的特定量化台阶。



码字	符号位	段落位	电平位
+最大值	1	000	0000
+0	1	111	1111
-0	0	111	1111
-最大值	0	000	0010

图 3.9(续) 压缩特性(第一象限的视图)

A-律特性是在欧洲普遍使用的另一种压缩律，它的特性由下式定义[Cattermole，1969]：

$$|w_2(t)| = \begin{cases} \dfrac{A\,|w_1(t)|}{1+\ln A}, & 0 \leqslant |w_1(t)| \leqslant \dfrac{1}{A} \\[2ex] \dfrac{1+\ln(A\,|w_1(t)|)}{1+\ln A}, & \dfrac{1}{A} \leqslant |w_1(t)| \leqslant 1 \end{cases} \tag{3.24}$$

式中，$|w_1(t)| \leqslant 1$，A 是一个正常数，它的典型值为 87.6。A-律压缩特性如图 3.9(c)所示。

实用中，通常也采用分段折线来逼近 A-律特性曲线，它与图 3.9(d)所示的 $\mu=255$ 的特性分段折线表示相似，唯一不同的是：这里段落 1 使用 16 个大小为 Δ 的量化台阶，段落 2 也使用了 16 个大小为 Δ 的量化台阶，段落 3 使用 16 个大小为 2Δ 的量化台阶，段落 4 使用 16 个大小为 4Δ 的量化台阶，其他段落依次类推。

当发送端使用压缩特性时，接收端必须使用相应的扩张(即解压缩)特性，以将信号恢复成正确的相对电平。扩张特性是压缩特性的逆运算，通常称压缩器和扩张器的组合为压扩器。

可以再一次看到，输出的 SNR 值遵循 6 dB 原则[Couch，1993]：

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\mathrm{dB}} = 6.02n + \alpha \tag{3.25}$$

式中

$$\alpha = 4.77 - 20\log(V/x_{rms}) \quad (\text{均匀量化}) \tag{3.26a}$$

或者对足够大的输入电平有：

$$\alpha \approx 4.77 - 20\log[\ln(1+\mu)] \quad (\mu\text{-律压扩}) \tag{3.26b}$$

或者[Jayant 和 Noll，1984]：

$$\alpha \approx 4.77 - 20\log[1+\ln A] \quad (A\text{-律压扩}) \tag{3.26c}$$

式(3.25)中，n 是 PCM 码字中所使用的比特数，V 是量化器的峰值设计电平，x_{rms}是输入模拟信号电平的均方根值。应该注意，对于均匀量化系统(无压扩)来说，输出的 SNR 值是输入电平的函数，但在 μ -律与 A -律压扩量化系统中，输出的 SNR 值对输入电平就不是那么敏感了，这一点可以从图 3.10 中看出。比值 V/x_{rms}称为加载因子，通常设置输入电平使得加载因子为 4，即 12 dB，以保证过载量化噪声可以忽略不计。在实际系统中，对于均匀量化，这相当于 $\alpha = -7.3$，而由式(3.17b)给出的理想条件下 $\alpha = 0$。在上述任何情况下，PCM 码字每增加 1 比特，输出的信号与量化噪声功率比将提高 6 dB。

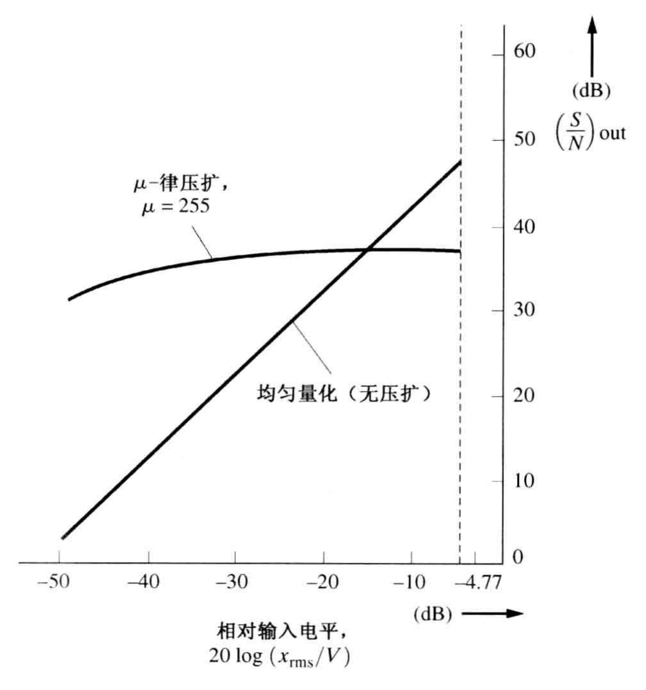


图 3.10　8 位 PCM 系统有、无压扩特性时输出的 SNR 值

3.4　数字信号

本节将回答以下问题：如何用数学表达式来表示数字信号的波形，例如图 3.8(d)所示的 PCM 信号？如何估计数字信号波形的带宽？

数字信号的电压(或电流)波形可以表示成有限的 N 项正交级数，即可以写成如下形式：

$$w(t) = \sum_{k=1}^{N} w_k \varphi_k(t), \quad 0 < t < T_0 \tag{3.27}$$

式中，w_k表示数据，$\varphi_k(t)$，$k = 1, 2, \cdots, N$ 表示 N 个正交函数，它们决定了数字波形的形状(本

节后面的例题“二进制波形”与“多进制波形”中将说明这一等式)。N 是描述波形所需要的维数。正如将在下一小节关于矢量表示的描述那样，术语“维数”是起源于解析几何中的一种叫法。由式(3.27)给出的波形 $w(t)$ 当用于表示一个 PCM 码字，或者表示具有 M 条消息的数字信源的任一条消息时，必须分配一个唯一的数据集 $\{w_k\}$，$k = 1, 2, \cdots, N$，用以表示相应的消息。例如，对于由计算机键盘的 ASCII 码组成的二进制信源来说，字母 X 分配的码字为 0001101，此时$w_1 = 0$，$w_2 = 0$，$w_3 = 0$，$w_4 = 1$，$w_5 = 1$，$w_6 = 0$，$w_7 = 1$ 以及 $N=7$。这一消息(即字母 X)在 T_0秒的时间间隔内被发送出去，于是由式(3.27)给出的表示相应消息的电压(或电流)波形也具有 T_0秒的时间宽度。采用下面的定义可以计算出传输的数据速率。

定义 波特(符号率)为[①]：

$$D = N/T_0 \text{ 符号/秒} \tag{3.28}$$

式中，N 指 T_0秒的时间间隔内所使用的维数。

定义 比特率为：

$$R = n/T_0 \text{ bps} \tag{3.29}$$

式中，n 指 T_0秒的时间间隔内传输的比特数。

在 w_k取二进制值时，有 $n = N$，并且称 $w(t)$ 为二进制信号。当给 w_k分配多于两个可能的值(即 w_k不是二进制的)时，称 $w(t)$ 为多进制信号。这两种类型的信号将在后续不同的小节中讨论。

还有一个关键性的问题是：当由式(3.27)表示的波形经过信道传输到达接收机的输入端后，接收机又如何来检测数据呢？因为 $w(t)$ 是一个正交级数，所以接收机检测数据的常规方法是计算正交级数的系数，即利用式(2.84)，得到：

$$w_k = \frac{1}{K_k}\int_0^{T_0} w(t)\varphi_k^*(t)\mathrm{d}t, k = 1,2,\cdots,N \tag{3.30}$$

式中，$w(t)$ 为接收机输入端的波形，$\varphi_k(t)$ 为已知的正交函数，在发送端正是通过它来产生波形 $w(t)$ 的。还可以看出，当接收信号受到白色加性噪声污染时，式(3.30)是检测数据的最佳方法。这一过程称为匹配滤波检测，它采用互相关处理方法，详细内容将在 6.8 节中讨论。例题 3.7 与例题 3.8 表明了数据的检测过程。

3.4.1 矢量表示

在正交矢量空间中，式(3.27)可以表示成：

$$\mathbf{w} = \sum_{j=1}^{N} w_j \varphi_j \tag{3.31a}$$

式中的粗体字为矢量，它表示式(3.27)给出的波形，$\mathbf{w}$ 是欧式矢量空间中的一个 N 维向量，$\{\varphi_j\}$ 指 N 维矢量空间中的一个正交集，如果式(2.78)中的 K_j都为 1 的话，则该正交集为一个单位正交集。对于式(3.52a)中的矢量 $\mathbf{w}$ 可以简单地表示成行矢量的形式：

$$w = (w_1, w_2, w_3, \cdots, w_N) \tag{3.31b}$$

---

① 尽管我们说“波特率”时是用词不当，但在一些技术著作中，有时还会采用术语“波特率”来代替“波特”。因为波特的定义就是符号率，它的单位为符号/秒。

例题 3.6　二进制信号的矢量表示

考察图 3.11(a)所示的 3 比特(二进制)信号波形的矢量表示，这一信号可以直接表示成以下形式：

$$s(t) = \sum_{j=1}^{N=3} d_j p\left[t - \left(j - \tfrac{1}{2}\right)T\right] = \sum_{j=1}^{N=3} d_j p_j(t)$$

式中，$p(t)$的波形如图 3.11(b)所示，并且$p_j(t) \triangleq p\left[t - \left(j - \frac{1}{2}\right)T\right]$。

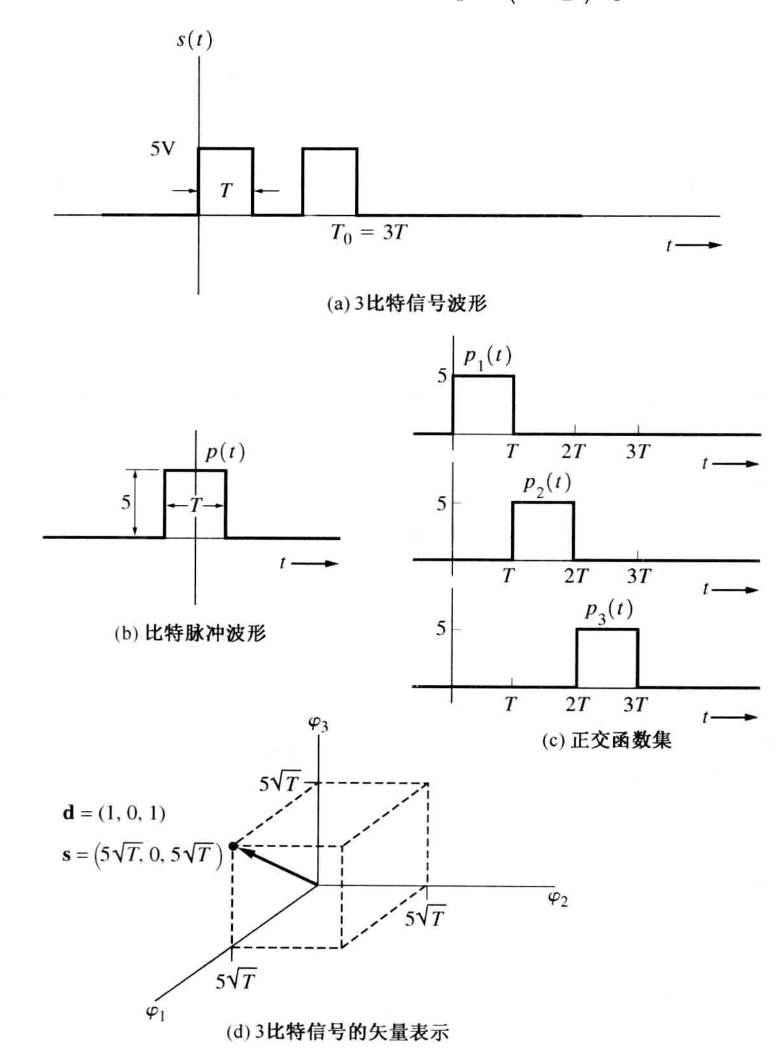


图 3.11　3 比特二进制数字信号的表示

函数集$\{p_j(t)\}$是一组没有归一化的正交函数，矢量

$$\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3) = (1, 0, 1)$$

是一个二进制码字，其中 1 表示二进制码元 1，0 表示二进制码元 0。函数$p(t)$是比特脉冲的形状。

利用正交函数表示法，可以将波形表示为：

$$s(t) = \sum_{j=1}^{N=3} s_j \varphi_j(t)$$

令 $\{\varphi_j(t)\}$ 为对应的标准正交函数集，于是，由式(2.78)可得：

$$\varphi_j(t) = \frac{p_j(t)}{\sqrt{K_j}} = \frac{p_j(t)}{\sqrt{\int_0^{T_0} p_j^2(t)\,dt}} = \frac{p_j(t)}{\sqrt{25T}}$$

或

$$\varphi_j(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}}, & (j-1)T < t < jT \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

式中，$j=1$、2 或 3。由式(2.84)，其中 $a=0$ 且 $b=3T$，可以求出图 3.11(a)所示的数字信号的标准正交级数的系数为：

$$\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3) = (5\sqrt{T}, 0, 5\sqrt{T})$$

图 3.11(d)给出了信号 $s(t)$ 的矢量表示。应该注意到，对于三维($N=3$)的二进制信号，只能表示 $2^3=8$ 条不同的消息，每一条消息对应于一个矢量，这个矢量终止于立方体的一个顶点。

由正交级数产生的波形参见 M 文件 Example3_06. m。该波形和图 3.11(a)所示波形相同。

3.4.2 带宽估算

由维数定理，可得到式(3.27)表示的数字信号波形带宽的下限。于是，由式(2.174)与式(3.28)，可知波形 $w(t)$ 的带宽为：

$$B \geq \frac{N}{2T_0} = \frac{1}{2}D \text{ Hz} \tag{3.32}$$

如果 $\varphi_j(t)$ 是 $\sin(x)/x$ 型的脉冲，则可以得到绝对带宽的下限为 $N/(2T_0)=D/2$；而在其他的情况下(即其他类型的脉冲波形)，信号的带宽将大于这一下限值。在估算数字信号的带宽时，特别是当信号的实际带宽很难(或不可能)计算时，式(3.32)就显得非常有用。例题 3.7 与例题 3.8 说明了这一点。

3.4.3 二进制信号

二进制信号波形可以描述成由式(3.27)给出的 N 维正交级数的形式，这里，正交级数的系数 w_k 取二进制值。下面的例题给出了有关二进制信号的更多细节，包括它们的波形、数据速率和波形带宽。

例题 3.7 二进制信号

让我们来考察一下二进制信号的一些性质。假设二进制信号来自于能产生 $M=256$ 条不同消息的数字信源。因为 $M=2^n=2^8=256$，所以可以采用 $n=8$ 位的二进制码元来表示每一条消息。假定传输一条消息需要耗时 $T_0=8$ ms，并且将要传输的是对应于码字 01001110 的消息，也就是

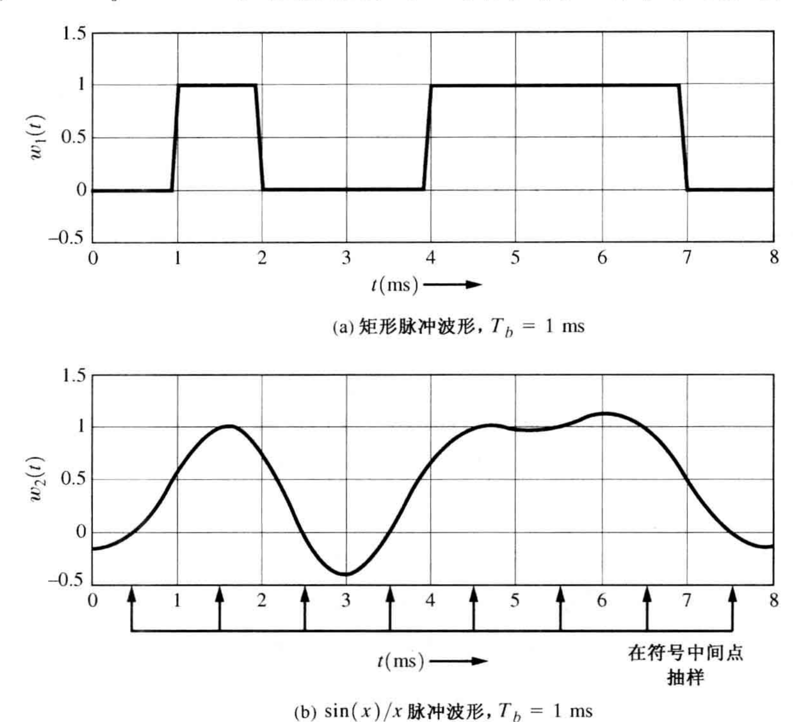
$$w_1=0, w_2=1, w_3=0, w_4=0, w_5=1, w_6=1, w_7=1, w_8=0$$

情形 1 矩形脉冲正交函数 假定正交函数 $\varphi_k(t)$ 为单位幅度的矩形脉冲，脉冲的宽度为

$T_b = T_0/n = 8/8 = 1$ ms，这里 T_b 是发送 1 比特数据所用的时间。于是，利用式(3.27)和 MATLAB 文件，得到最终的传输波形如图 3.12(a)所示。

正如式(3.30)所给出的那样，通过计算正交级数的系数，接收机可以检测出传输的数据。对于矩形脉冲的情形来说，这等价于每隔 1 比特的时间间隔对波形抽样一次①。对照图 3.12(a)，可以看出每隔一个 $T_b = 1$ ms 的间隔抽样得到的检测结果为正确的 8 位数据码字 01001110。

此时，因为 $N = n = 8$ 以及 $T_0 = 8$ ms，所以二进制信号的比特率和波特率(符号率)为：$R = n/T_0 = 1$ kbps，$D = N/T_0 = 1$ kbaud。也就是说，对二进制信号，比特率与波特是相等的。



(a) 矩形脉冲波形，$T_b = 1$ ms

(b) $\sin(x)/x$ 脉冲波形，$T_b = 1$ ms

图 3.12　二进制信号(通过计算获得)(见 M 文件 Example3_07.m)

图 3.12(a)给出的波形的带宽是多少呢？由式(3.32)可以得到它的带宽下限为 $1/2D = 500$ Hz。在 3.5 节中将指出，具有矩形脉冲形状的二进制信号的实际零点带宽为 $B = 1/T_s = D = 1000$ Hz。显然，这一数值要比带宽的下限值大得多，于是就引出了这样一个问题：什么形状的波形的带宽下限值为 500 Hz呢？此问题的答案是，具有 $\sin(x)/x$ 型脉冲形状的波形，这将在情形 2 中描述。

情形 2　$\sin(x)/x$ 脉冲正交函数　从直观的角度来看，要想减少波形的带宽必须平滑矩形脉冲的尖锐拐角。此外，回忆一下在抽样定理那一节中研究过的式(2.158)，可以发现 $\sin(x)/x$ 型的脉冲形状具有最小的带宽，因此可以选择：

$$\varphi_k(t) = \frac{\sin\left\{\dfrac{\pi}{T_s}(t - kT_s)\right\}}{\dfrac{\pi}{T_s}(t - kT_s)} \tag{3.33}$$

对二进制信号，式中的 $T_s = T_b$。最终的传输波形如图 3.12(b)所示。

---

① 只有当接收信号没有受到噪声污染时，抽样检测结果才是最佳的。见式(3.30)后面的讨论。

再一次强调，接收机可以通过计算正交级数的系数来检测数据。因为所使用的是 $\sin(x)/x$ 型的脉冲正交函数，因此由式(2.160)看出，通过在每个码元符号的中间点对接收波形进行抽样，可以恢复出数据①。对照图3.12可以发现，在每隔一个 $T_s=1$ ms 的码元符号的中间点上抽样，可以检测出正确的8位数据码字01001110。

对于情形2，波形的比特率和波特仍为：$R=1$ kbps 以及 $D=1$ kbaud。借助图2.6(b)可以估算出由式(3.33)给出的波形的绝对带宽，此时 $2W=1/T_s$，可以得到 $B=1/(2T_s)=500$ Hz。于是就获得了(维数定理所预计的)带宽下限。

注意，当使用矩形脉冲波形时，正如图3.12(a)所示，数字信源是通过二进制数字波形来传输信息的。也就是说，数字信号为数字波形。然而，当使用具有 $\sin(x)/x$ 型脉冲形状的波形时，正如图3.12(b)所示，此时数字信源的信息是通过模拟波形来传输的(即波形的电压值在 $-0.4\sim1.2$ V 的范围内是连续变化的)。

图3.12所示图形的产生过程参见M文件Example3_07.m。

3.4.4　多进制信号

对例题3.7中讨论的二进制信号，我们获得了带宽的下限为 $B=N/(2T_0)$。也就是说，在情形2中，需要 $N=8$ 个脉冲，并且当消息的持续时间为 $T_0=8$ ms 时，得到的带宽为500 Hz。然而，如果可以减少 N 值的话，则波形的带宽可以更小。事实上，令式(3.27)中的 w_k 取 $L>2$ 个可能值(而不是在二进制信号中仅仅取两个可能值)，就可以减小 N 的值，从而减小波形的带宽。当 w_k 取 $L>2$ 个可能值时，由式(3.27)获得的波形称为多进制信号。

例题3.8　$L=4$ 的多进制信号

这里，我们将把例题3.7中 $M=256$ 的消息源编码为 $L=4$ 的多进制信号。同样，每条消息在 $T_0=8$ ms 的时间间隔内发送出去。利用数模转换器(DAC)①可以将消息源的 ℓ 个比特的二进制数据编码为 L 进制的数据，从而得到多进制信号，这一过程如图3.13所示。例如，$\ell=2$ 比特的DAC，一种可能的编码方法如表3.3所示。DAC每次读入 $\ell=2$ 比特的数据，然后输出 $L=4$ 种可能的电平值中的一种，其中 $L=2^\ell$。

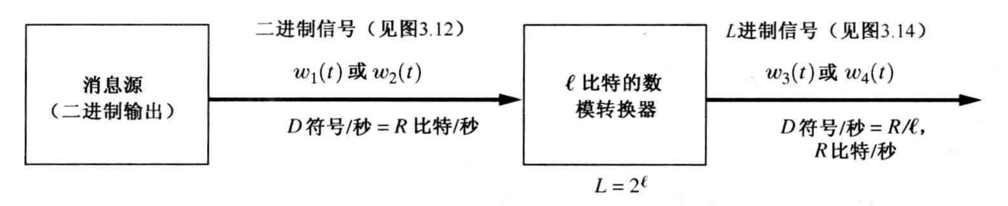


图3.13　二进制信号到多进制信号的转换

表3.3　2比特数模转换器

二进制输入($\ell=2$ 比特)	输出电平(V)
11	+3
10	+1
00	−1
01	−3

① 数模转换器(DAC)中的术语“模拟”是一个误称，因为DAC输出的是一个 L 进制的数字信号。但在数据手册中都称此种器件为数模转换器。

于是，对输入的二进制码字 01001110，相应的四进制输出序列为 −3，−1，+3，+1。这样一来，式(3.27)中的 w_k 的值为 $w_1 = -3$，$w_2 = -1$，$w_3 = +3$ 以及 $w_4 = +1$，此时的维数为 $N = 4$。图 3.14给出了对应的 $L = 4$ 进制的波形，当 $\varphi_k(t)$ 为矩形脉冲时的多进制波形如图 3.14(a)所示，而当 $\varphi_k(t)$ 为 $\sin(x)/x$ 型脉冲时的多进制波形如图 3.14(b)所示。在任何一种情况下，通过在 $T_s = 2$ ms 符号间隔的中间点(即 $T = 1$ ms、3 ms、5 ms 与 7 ms)对接收波形进行抽样，接收机都可以恢复出对应于 w_k 值的四进制数据①。

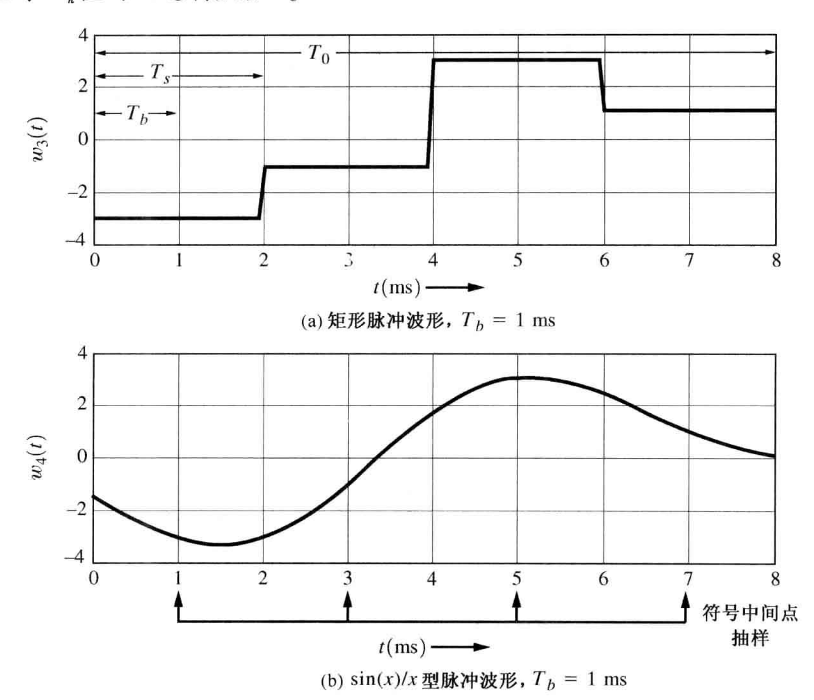


图 3.14　$L = 4$ 进制信号(通过计算获得)(见 M 文件 Example3_08.m)

对于 $L = 4$ 的多进制信号，由于每个符号 ℓ 携带 2 比特(即表 3.3 中所列)，因此等效的比特间隔 $T_b = 1$ ms。比特率为 $R = n/T_0 = \ell/T_s = 1$ kbps(与例题 3.7 中的比特率相同)。波特率为 $D = N/T_0 = 1/T_s = 0.5$ kbaud(与例题 3.7 中的波特率不同)。多进制信号的比特率与波特率之间的关系如下：

$$R = \ell D \tag{3.34}$$

式中，$\ell = \log_2(L)$ 为 DAC 在每个时钟周期内读入的二进制数据的位数。

图 3.14(a)所示的矩形脉冲多进制波形的零点带宽为 $B = 1/T_s = 500$ Hz，而对于图 3.14(b)所示的 $\sin(x)/x$ 型脉冲多进制波形，由式(3.32)可知其绝对带宽为 $B = N/(2T_0) = 1/(2T_s) = D/2 = 250$ Hz。这样，任何一种 $L = 4$ 的多进制波形的带宽都只有相应的二进制信号(具有相同的脉冲形状)带宽的 1/2。一般来说，L 进制信号的带宽是相应的二进制信号带宽的 $1/\ell$，其中 $\ell = \log_2(L)$，这是因为多进制信号的符号宽度是二进制信号的 ℓ 倍。二进制信号的比特率 R 等于 ℓ 乘以多进制信号的符号速率。

图 3.14 所示图形的产生过程参见 M 文件 Example3_08.m。

① 只有在接收信号没有受到噪声污染时，抽样检测才是最佳的。见式(3.30)后面的讨论。

下一节将推导出二进制信号和多进制信号功率谱密度的准确表达式。

3.5 线路码及其频谱

3.5.1 二进制线路编码

二进制码元 1 和 0，如 PCM 信号，能够表示为各种串行比特格式，这种格式称为线路码。图 3.15 所示为一些常用的线路码①。线路码可分为两大类：归零码(RZ)和非归零码(NRZ)。在 RZ 码中，波形将在每个比特间隔的部分时间内(通常是半个比特间隔)回到 0 V 电平。按照表示二进制数据电平值方法的不同，线路码波形还可以进一步细分。下面将介绍几种常用的线路码。

单极性信号：在正逻辑单极性信号中，用高电平($+A$ V)表示二进制码元 1，零电平表示二进制码元 0。这种信号也称为开关键控(on-off keying)信号。

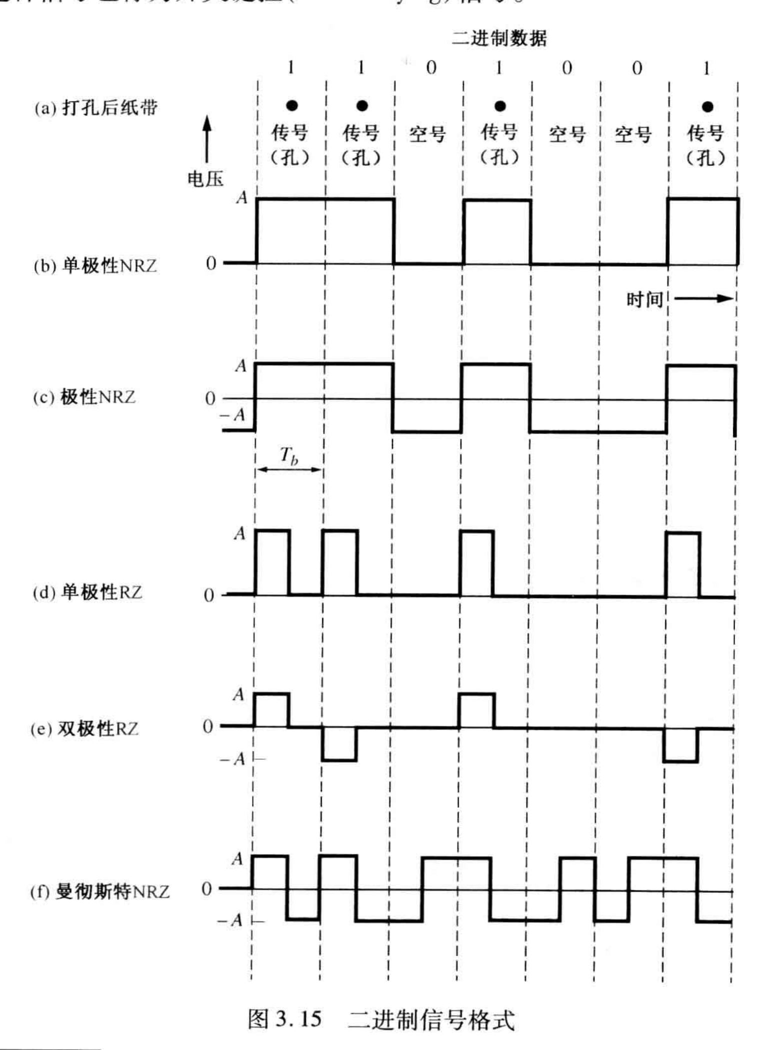


图 3.15 二进制信号格式

① 严格地说，打孔纸带只是一种存储媒体，而非线路码。然而，这里描述它是从历史的角度解释传号(mark)和空号(space)这两个名词的来历。在打孔纸带中，二进制码元 1 对应有孔(传号)，而二进制码元 0 则对应无孔(空号)。

极性信号：利用具有相同值的正电平和负电平来分别表示二进制码元 1 和 0。

双极性(伪三进制)信号：利用交替出现的正和负电平值表示二进制码元 1，零电平表示二进制码元 0。术语“伪三进制”指利用三种编码信号电平来表示二进制数据，这种信号也称为传号交替反转(AMI)信号。

曼彻斯特信号：利用半比特间隔内的正脉冲和紧接着半比特间隔内的负脉冲表示二进制码元 1，用半比特间隔内的负脉冲和紧接着半比特间隔内的正脉冲表示二进制码元 0。这种信号也称为裂相码。

在本书的后续部分，我们将经常使用各种线路码的简写。例如，单极性 NRZ 简单地记为单极性，极性 NRZ 简称为极性，双极性 RZ 简称为双极性。遗憾的是，这样一来，术语“双极性”就有两种相互矛盾的定义，好在它们的真实含义通常可以通过具体的上下文区分出来：(1)在空间通信系统中，有时称极性 NRZ 为双极性 NRZ，或者简称为双极性(本书不使用此种含义)；(2)在电话系统中，双极性指伪三进制信号(这是本书中所使用的含义)，如 3.9 节将要讨论的 T1 中的双极性 RZ 信号。

图 3.15 所示的线路码还有其他的称谓[Deffeback 和 Frost，1971；Sklar，2001]。例如，极性 NRZ 也称为 NRZ-L，其中 L 指正常的逻辑电平分配；双极性 RZ 也称为 RZ-AMI，这里 AMI 指传号(二进制值 1)交替反转；双极性 NRZ 也称为 NRZ-M，这里 M 指传号反转；负逻辑双极性 NRZ 也称为 NRZ-S，其中 S 指空间上的反转；曼彻斯特 NRZ 也称为 Bi-φ-L，因为曼彻斯特 NRZ 是具有双相和正常逻辑电平的信号。

除了上面讨论的线路码外，还有许多其他类型的线路码，这里无法一一列举，读者可参考其他著作[Bylanski 和 Ingram，1976；Bic，Duponteil 和 Imbeaux，1991]。例如，双极性(伪三进制)信号可以进一步细分成几种子类型，正如在式(3.45)后面所讨论的那样。

图 3.15 所示的线路码都具有各自的优点和缺点。例如，单极性 NRZ 线路码的优点是可以使用仅由单个电源供电的电路(例如，对于 TTL 电路，只需单个 +5 V 电源供电)，但它的缺点也很明显，因为其波形有非零的直流分量，所以需要具有直流耦合能力的信道(在 $f=0$ 处必须有很好的频率响应)来传输；在极性 NRZ 线路码中，如果假定数据常常在二进制码元 1 和 0 之间转换，并且发送 1 和 0 的数目相同，则传输极性 NRZ 信号时无需具有直流耦合能力的信道。然而，产生极性 NRZ 信号的电路不但需要正电压电源，而且还需要负电压电源供电；曼彻斯特 NRZ 线路码的优点是，无论数据序列如何，总具有零直流分量，但它所需的传输带宽是单极性 NRZ 码或极性 NRZ 码的两倍，这是因为曼彻斯特 NRZ 码的脉冲宽度是单极性 NRZ 码或极性 NRZ 码的 1/2(见图 3.15)。

线路码应满足以下一些性质：

- **自同步**。线路码中必须包含足够的定时信息，使得同步电路可以从线路码中提取定时和时钟信号，并且数据中长连的 1 或 0 串将不影响时钟信号的正确恢复。
- **低误比特率**。在接收到的数据信号受到噪声或 ISI 污染后，仍可以设计出合适的接收机，它能够以很低的误比特率恢复二进制数据。3.6 节中将讨论 ISI 问题，噪声的影响将在第 7 章讨论。
- **适合信道特性的频谱结构**。例如，对交流耦合信道来说，线路码信号的 PSD 在零频附近应小到可以忽略不计。此外，与信道带宽相比，线路码信号的带宽必须足够小，这样 ISI 才不是问题。
- **传输带宽**。传输带宽必须尽可能小。

- **检错能力**。在简单地添加信道编码器与译码器后，线路码应该具有检错能力，或者线路码自身具有检错能力。
- **透明性**。数据协议和线路码必须设计成可以正确和透明地接收每一种可能的数据序列。

如果协议中某些特定的码字保留用作控制序列，例如，用一个特定的码字指示接收机将该码字后的所有数据发送到打印机，则该协议是不透明的。当随机数据文件(如机器语言文件)在链路上传输时，因为文件中的某些字可能与控制字符序列相同，所以将产生这样的问题：接收系统将按照数据协议的规定拦截这些序列，并执行协议中定义的动作，而不是简单地将它们传送到预期的目的地。另外，如果某些序列将导致时钟信号的丢失(超出接收机位同步范围)，则也认为该码是不透明的。在双极性格式的信号中，因为长连的0串会导致时钟信号的丢失，所以它们是不透明的。

如何为数字信号选择特定类型的波形取决于具体的应用。在推导出各种格式信号的功率谱之后，我们将进一步讨论它们的优点和缺点。

3.5.2 二进制线路码的功率谱

采用确定信号分析方法或随机信号分析方法都可以计算信号的功率谱(PSD)。这一点首次在第1章中讨论过，并随后在例题2.22中做出了说明。为了使用确定信号分析方法计算PSD，需要用到特定数据序列的线路码的波形。然后，利用式(2.66)就可以计算出波形近似的PSD。如果线路码是周期的，则可以利用式(2.126)计算出PSD(习题3.24就要用到这种确定信号的分析方法)。同样，采用随机信号分析方法也可以计算出PSD，随机信号分析方法将在第6章中讨论。我们将采用随机信号的分析方法获得图3.15所示的各种线路码的PSD，这是因为采用随机信号分析方法获得的线路码的PSD适用于随机数据序列(而不是仅适用于特定的数据序列)。

正如3.4节中讨论和论证过的那样，数字信号(或线路码)可以表示成：

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n f(t - nT_s) \tag{3.35}$$

式中，$f(t)$为符号脉冲波形，T_s为一个符号的持续时间。对于二进制信号，有 $T_s = T_b$，其中 T_b指发送1比特数据所需要的时间。对于多进制信号，有 $T_s = \ell T_b$。集合 $\{a_n\}$ 是一组随机数据。例如，对于单极性NRZ线路码，有$f(t) = \Pi\left(\frac{t}{T_b}\right)$，并且当发送二进制码元1时有 $a_n = +A$ V，当发送二进制的码元0时有 $a_n = 0$ V。

正如将在6.2节中证明的那样，由式(6.70)可得数字信号PSD的一般表达式为：

$$\mathcal{P}_s(f) = \frac{|F(f)|^2}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R(k) e^{j2\pi k f T_s} \tag{3.36a}$$

式中，$F(f)$是脉冲波形$f(t)$的傅里叶变换，$R(k)$是随机数据的自相关函数。自相关函数的定义由下式给出：

$$R(k) = \sum_{i=1}^{I} (a_n a_{n+k})_i P_i \tag{3.36b}$$

其中，a_n与a_{n+k}分别指数据脉冲在第n个与第$(n+k)$个符号位置上的(电压)电平值，P_i指$a_n a_{n+k}$的乘积取第i种可能值的概率。注意，式(3.36a)指出数字信号的功率谱取决于以下两项：(1)所使用的脉冲波形；(2)数据的统计特性。

利用式(3.36)，也就是统计方法，可以计算出图3.15所示的各种线路码的PSD。

单极性NRZ信号。对于单极性信号，a可能取的电平值为$+A$ V与0 V。假设信号中这两

种电平出现的概率相同，并且数据位与位之间是不相关的。现在，可以利用式(3.36b)来计算 $R(k)$。对于 $k=0$，$a_n a_n$ 乘积的可能值为 $A\times A=A^2$ 与 $0\times 0=0$，因而 $I=2$。对随机数据，乘积取值 A^2 的概率为 1/2，取值 0 的概率为 1/2，因此有：

$$R(0)=\sum_{i=1}^{2}(a_n a_n)_i P_i = A^2\cdot\tfrac{1}{2}+0\cdot\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{2}A^2$$

当 $k\neq 0$ 时，乘积具有 $I=4$ 种可能值：$A\times A$、$A\times 0$、$0\times A$ 与 0×0，它们出现的概率均为 1/4。于是，对 $k\neq 0$，有：

$$R(k)=\sum_{i=1}^{4}(a_n a_{n+k})P_i = A^2\cdot\tfrac{1}{4}+0\cdot\tfrac{1}{4}+0\cdot\tfrac{1}{4}+0\cdot\tfrac{1}{4}=\tfrac{1}{4}A^2$$

因而

$$R_{\text{unipolar}}(k)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}A^2, & k=0\\[2mm] \dfrac{1}{4}A^2, & k\neq 0\end{cases} \tag{3.37a}$$

对于矩形 NRZ 脉冲波形，它的傅里叶变换对为：

$$f(t)=\Pi\left(\frac{t}{T_b}\right)\leftrightarrow F(f)=T_b\frac{\sin\pi f(T_b)}{\pi f T_b} \tag{3.37b}$$

利用式(3.36a)，其中 $T_s=T_b$，可得到单极性 NRZ 线路码的 PSD 为：

$$\mathcal{P}_{\text{unipolar NRZ}}(f)=\frac{A^2T_b}{4}\left(\frac{\sin\pi f T_b}{\pi f T_b}\right)^2\left[1+\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{j2\pi k f T_b}\right]$$

但是，①

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{jk2\pi f T_b}=\frac{1}{T_b}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T_b}\right) \tag{3.38}$$

于是，

$$\mathcal{P}_{\text{unipolar NRZ}}(f)=\frac{A^2T_b}{4}\left(\frac{\sin\pi f T_b}{\pi f T_b}\right)^2\left[1+\frac{1}{T_b}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T_b}\right)\right] \tag{3.39a}$$

但是，因为 $f=n/T_b$ 时有 $\sin(\pi f T_b)/(\pi f T_b)=0$，所以当 $n\neq 0$ 时，上式可以简化为：

$$\mathcal{P}_{\text{unipolar NRZ}}(f)=\frac{A^2T_b}{4}\left(\frac{\sin\pi f T_b}{\pi f T_b}\right)^2\left[1+\frac{1}{T_b}\delta(f)\right] \tag{3.39b}$$

如果选择 A 值从而使得单极性 NRZ 信号的归一化平均功率取单位值，则有 $A=\sqrt{2}$。②此时单极性 NRZ 信号的 PSD 如图 3.16(a)所示，其中线路码的比特率为 $R=1/T_b$。单极性 NRZ 信号的缺点是浪费功率，因为信号中有直流分量，其功率谱在零点附近并不趋近于零。这样一来，单极性 NRZ 信号必须使用具有直流耦合能力的电路。单极性信号的优点是它易于使用 TTL 与 CMOS 电路产生，并且仅需要单个电源供电。

---

① 正如式(2.115)中表示的那样，式(3.38)称为泊松和公式(Poisson sum formula)。

② 利用具有周期特性数据 10101010 的线路码可以简单地证明这一点。令 $P_s=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}s^2(t)\,dt=\frac{1}{2T_b}A^2T_b$ 等于单位值，可得 $A=\sqrt{2}$。

极性 NRZ 信号。对于极性 NRZ 信号，a 可能取的电平值为 $+A$ V 与 $-A$ V。假设信号中这两种电平出现的概率相同，并且数据位与位之间是不相关的，可得：

$$R(0) = \sum_{i=1}^{2}(a_n a_n)_i P_i = A^2 \frac{1}{2} + (-A)^2 \frac{1}{2} = A^2$$

当 $k \neq 0$ 时，有：

$$R(k) = \sum_{i=1}^{4}(a_n a_{n+k})P_i = A^2 \frac{1}{4} + (-A)(A)\frac{1}{4} + (A)(-A)\frac{1}{4} + (-A)^2 \frac{1}{4} = 0$$

于是，

$$R_{\text{polar}}(k) = \begin{cases} A^2, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \tag{3.40}$$

然后，将式(3.40)与式(3.37a)代入式(3.36a)，可得到极性 NRZ 信号的 PSD 为：

$$\mathcal{P}_{\text{polar NRZ}}(f) = A^2 T_b \left(\frac{\sin \pi f T_b}{\pi f T_b}\right)^2 \tag{3.41}$$

如果选择 A 值从而使得极性 NRZ 信号的归一化平均功率取单位值，则有 $A=1$，此时极性 NRZ 信号的 PSD 如图 3.16(b)所示，其中线路码的比特率为 $R = 1/T_b$。

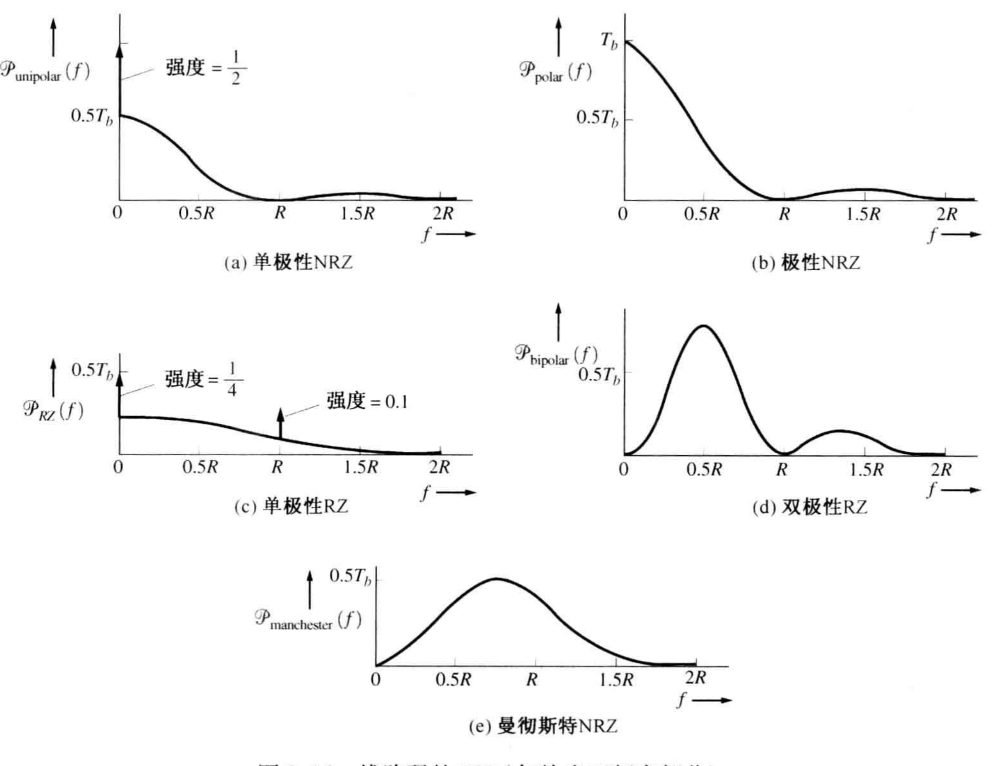


图 3.16 线路码的 PSD(仅给出正频率部分)

极性信号的缺点是在直流附近具有很大的谱分量。另一方面，尽管需要正、负两个电源，但极性信号相对来说还是易于产生的。当然，还可以使用专用集成电路从单个电源生成两个不同极性的电源。极性 NRZ 信号的误比特率性能优于其他类型的信号(见图 7.14)。

单极性 RZ 信号。前面已经计算过单极性数据的自相关函数，结果由式(3.37a)给出。对于

RZ 信号，脉冲的持续时间为 $T_b/2$，而不是 NRZ 信号中的 T_b。也就是说，对于 RZ 信号有：

$$F(f) = \frac{T_b}{2}\left(\frac{\sin(\pi f T_b/2)}{\pi f T_b/2}\right) \tag{3.42}$$

于是，参考式(3.37b)与式(3.39a)，可得到单极性 RZ 线路码的 PSD 为：

$$\mathcal{P}_{\text{unipolar RZ}}(f) = \frac{A^2 T_b}{16}\left(\frac{\sin(\pi f T_b/2)}{\pi f T_b/2}\right)^2\left[1 + \frac{1}{T_b}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f - \frac{n}{T_b}\right)\right] \tag{3.43}$$

如果选择 A 值从而使得单极性 RZ 信号的归一化平均功率取单位值，则有 $A=2$，此时单极性 RZ 信号的 PSD 如图 3.16(c)所示，其中线路码的比特率为 $R=1/T_b$。

正如所料，因为 RZ 信号的脉冲宽度是 NRZ 信号的 1/2，所以单极性 RZ 信号的第一零点带宽是单极性或极性 NRZ 信号的两倍。单极性 RZ 信号的 PSD 中，在频率 $f=R$ 处，存在有离散(冲激)分量，因而这一周期成分可以用于恢复时钟信号。这种信号的缺点是，为了获得相同的误比特率，它所需的功率要比极性信号高出 3 dB(见第 7 章)。而且，单极性 RZ 信号在零频附近的谱分量不能忽略不计。

双极性 RZ 信号。同理，利用式(3.36a)也可以获得双极性信号的 PSD。a_n 的可能取值为 $+A$、$-A$ 与 0，其中二进制码元 1 由交替的 $+A$ 与 $-A$ 表示，二进制码元 0 由 $a_n=0$ 表示。当 $k=0$时，乘积 $a_n a_n$ 的可能值为 A^2 与 0，并且每种可能值均以 1/2 的概率出现，于是有：

$$R(0) = \frac{A^2}{2}$$

当 $k=1$(只考虑相邻比特)时，数据序列为(1, 1)、(1, 0)、(0, 1)与(0, 0)，那么，乘积 $a_n a_{n+1}$ 的可能值为 $-A^2$、0、0 与 0，并且每种序列出现的概率均为 1/4，所以有：

$$R(1) = \sum_{i=1}^{4}(a_n a_{n+1})_i P_i = -\frac{A^2}{4}$$

当 $k>1$ 时，要考虑的比特并不相邻，乘积 $a_n a_{n+k}$的可能值为 $\pm A^2$、0、0 与 0，并且每种可能值出现的概率均为 1/4，所以有：

$$R(k>1) = \sum_{i=1}^{5}(a_n a_{n+k})_i P_i = A^2\cdot\tfrac{1}{8} - A^2\cdot\tfrac{1}{8} = 0$$

于是

$$R_{\text{bipolar}}(k) = \begin{cases} \dfrac{A^2}{2}, & k=0 \\ -\dfrac{A^2}{4}, & |k|=1 \\ 0, & |k|>1 \end{cases} \tag{3.44}$$

例题 3.9　利用数据的自相关函数计算双极性 RZ 线路码的 PSD

利用式(3.36a)和式(3.44)，计算并画出自相关值为 $R=1$ 的双极性 RZ 线路码的 PSD。参见 M 文件 Example3_09.m，将所得结果与图 3.16(d)进行比较。

将式(3.44)和式(3.42)代入式(3.36a)，其中 $T_s=T_b$，可得到双极性 RZ 线路码的 PSD 为：

$$\mathcal{P}_{\text{bipolar RZ}}(f) = \frac{A^2 T_b}{8}\left(\frac{\sin(\pi f T_b/2)}{\pi f T_b/2}\right)^2(1 - \cos(2\pi f T_b))$$

或

$$\mathcal{P}_{\text{bipolar RZ}}(f) = \frac{A^2T_b}{4}\left(\frac{\sin(\pi f T_b/2)}{\pi f T_b/2}\right)^2 \sin^2(\pi f T_b) \tag{3.45}$$

如果归一化平均功率取单位值，则有 $A=2$，此时的 PSD 如图 3.16(d)所示。双极性信号在零频附近的谱分量为零，所以传输通路上可使用具有交流耦合能力的电路。

例题 3.10 画出双极性 RZ 线路码的 PSD

利用式(3.45)，计算并画出自相关值为 $R=1$ 的双极性 RZ 线路码的 PSD。参见 M 文件 Example3_9.m的运行结果。将所得结果与图 3.16(d)进行比较。

利用全波整流电路将双极性格式的信号转换成单极性格式的信号后，可以简单地从双极性波形中提取时钟信号。整流后得到的单极性 RZ 信号中在时钟频率处存在着周期成分(见图 3.16(c))。双极性信号是不透明的，因为长连 0 串将导致时钟信号的丢失。使用 n 阶高密度双极性(HDBn)信号可以防止出现这种问题，在 HDBn 信号中，用包含一些脉冲的“填充”序列来替代长度超过 n 的长连 0 串①。计算 HDBn 码的 PSD 非常困难，因为对于数量很大的 k 需要单独计算$R(k)$的值[Davis 和 Barber, 1973]。

双极性信号自身也具有检测一位错码的能力，因为单个错码将导致码序列违反双极性线路码的编码规则。接收机的逻辑单元可以容易地检测出任何违反编码规则的码序列。

双极性信号的两个缺点是：(1)接收机必须区分三种不同的电平($+A$、$-A$ 与 0)，而不是像前面所讨论的其他信号格式那样只需要区分两种不同的电平；(2)为了获得相同的误比特率，双极性信号所需的功率要比极性信号高出大约 3 dB。(正如式(7.28)所描述的那样，双极性信号的误码率是单极性信号误码率的 3/2 倍。)

曼彻斯特 NRZ 信号。曼彻斯特信号采用以下脉冲波形：

$$f(t) = \Pi\left(\frac{t+T_b/4}{T_b/2}\right) - \Pi\left(\frac{t-T_b/4}{T_b/2}\right) \tag{3.46a}$$

相应的脉冲波形的频谱为：

$$F(f) = \frac{T_b}{2}\left[\frac{\sin(\pi f T_b/2)}{\pi f T_b/2}\right]e^{jwT_b/4} - \frac{T_b}{2}\left[\frac{\sin(\pi f T_b/2)}{\pi f T_b/2}\right]e^{-jwT_b/4}$$

或

$$F(f) = jT_b\left[\frac{\sin(\pi f T_b/2)}{\pi f T_b/2}\right]\sin\left(\frac{wT_b}{4}\right) \tag{3.46b}$$

将上式和式(3.40)代入式(3.36a)，可得到曼彻斯特 NRZ 信号的 PSD 为：

$$\mathcal{P}_{\text{Manchester NRZ}}(f) = A^2T_b\left(\frac{\sin(\pi f T_b/2)}{\pi f T_b/2}\right)^2 \sin^2(\pi f T_b/2) \tag{3.46c}$$

如果归一化平均功率取单位值，则有 $A=1$。

曼彻斯特 NRZ 信号的 PSD 如图 3.16(e)所示，它的零点带宽是双极性信号的两倍。然而，

---

① 例如，对于 HDB3 码而言，用于取代 $n+1=4$ 的长连 0 串的填充序列为交替的 000V 与 100V 序列，其中比特 1 按照双极性规则编码，比特 V 的极性则违反双极性编码规则。交替的填充序列设计成相邻的 V 脉冲在极性上交替。这样一来，HDB3 线路码具有零直流分量，其 PSD 在 $f=0$ 处趋于零。为了对 HDB3 码进行译码，译码器必须检测出违反双极性规则的点，并且对该点之前 0 的数目进行计数，以便删除替代的比特 1。

曼彻斯特码无直流分量，而且长连 0 串将不会引起时钟信号的丢失。

回顾一下前面所讨论的数字信号的 PSD，应该强调的一点是：数字信号的 PSD 是位图（通过位自相关表示）和脉冲形状的函数。数字信号 PSD 的一般表达式［即式(3.36)］不但对二进制信号适用，而且对多进制信号也是适用的。

3.5.3　差分编码

当串行数据沿着一条通信信道经过许多电路时，波形常常会在无意中被反转（即数据取补）。在采用双绞线作为传输信道的通信系统中，当使用极性线性码时，仅仅是因为连接点处两条引线接反了，也会出现波形的反转（注意这种引线接反的情况并不会影响以双极性信号格式传输的数据）。为了解决这一问题，常常采用如图 3.17 所示的差分编码技术。编码后的差分数据由下式产生：

$$e_n = d_n \oplus e_{n-1} \tag{3.47}$$

其中，$\oplus$指模 2 加法器或异或门（XOR）操作。接收到的编码数据按照下式进行解码：

$$\tilde{d}_n = \tilde{e}_n \oplus \tilde{e}_{n-1} \tag{3.48}$$

式中的颚化符号（～）指接收端的数据。

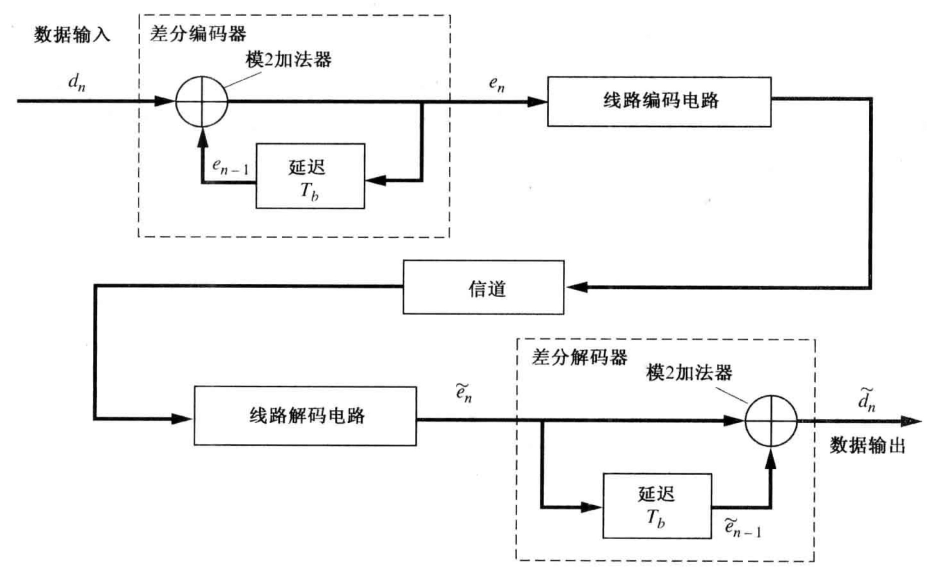


图 3.17　差分编解码系统

编码序列中每一位数字是通过比较当前输入位和前一个编码位而获得的。如果当前输入位与前一个编码位具有相反的状态，则编码器输出二进制码元 1；如果两者的状态相同，则编码器输出二进制码元 0，这等同于异或门或模 2 加法器真值表中的内容。表 3.4 给出了一个编码实例，其中开始的参考数字为二进制码元 1。在接收端，通过比较相邻位的状态对编码序列进行解码。如果当前接收到的编码位与前一个编码位具有相同的状态，则解码器输出二进制码元 0；如果两者状态相反，则解码器输出二进制码元 1。正如表中所给出的那样，经过差分编码的波形在极性反转之后并不影响解码数据。在波形必须通过成千上万个电路的大型通信系统中，差分码的这种性质是一个很好的优点，因为在这些通信系统中，随着网络的不断改变和升级，输出引线的正极性标志常常丢失或者被偶然改变，例如在几个不同的数据通路之间进行交叉连接时常常会出现这种情况。

表 3.4　差分编解码示例

编码									
输入序列	d_n		1	1	0	1	0	0	1
编码序列	e_n	1	0	1	1	0	0	0	1
参考数字 ——→		↑							
解码(信道极性正确)									
接收序列(正确极性)	$\tilde{e}_n$	1	0	1	1	0	0	0	1
解码序列	$\tilde{d}_n$		1	1	0	1	0	0	1
解码(信道极性反转)									
接收序列(极性反转)	$\tilde{e}_n$	0	1	0	0	1	1	1	0
解码序列	$\tilde{d}_n$		1	1	0	1	0	0	1

3.5.4　眼图

通过在模拟示波器上观察接收到的线路码可以看出信道滤波和信道噪声对波形的影响。图 3.18的左侧给出了以下三种情况下接收到的受污染的极性 NRZ 波形：(1)理想信道滤波；(2)引入码间串扰(ISI)的滤波；(3)噪声加上 ISI。(ISI 将在 3.6 节中讨论。)图中右侧给出了采用多重扫描时示波器上显示的受污染的信号，这里每次扫描由时钟信号触发，并且扫描宽度稍稍大于 T_b。因为示波器上所显示的图形很像人的眼睛，所以称它们为眼图。在正常的工作状态下(即没有检测到误码)，眼图是张开的；如果存在大量噪声或 ISI，则眼图将闭合，这也意味着接收机输出端将产生误码。眼图为估计接收到的线路码的质量及接收机防止误码的能力提供了一种很好的方法。如图 3.18 所示，眼图提供了以下信息：

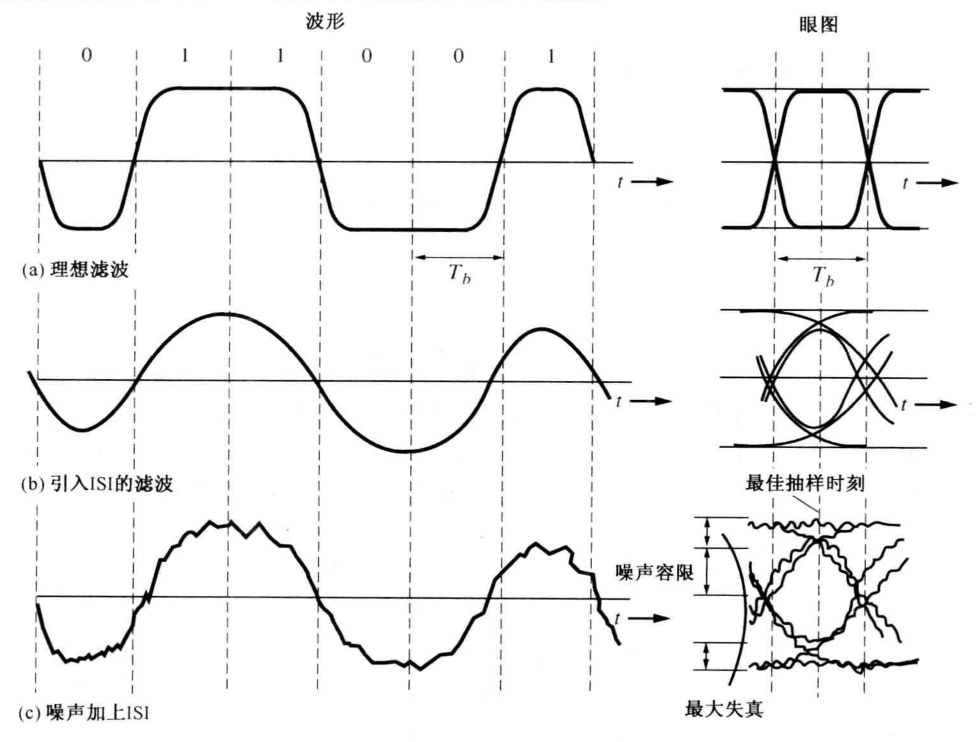


图 3.18　失真的极性 NRZ 波形与对应的眼图

- 眼图内部张开部分的宽度，也称为眼图张开度，决定了接收机中抽样器所允许的定时误差。显然，抽样的最佳时刻是“眼睛”张开最大的时刻。
- 眼图斜边的斜率决定了系统对定时误差的灵敏度(在零交叉点或者其附近估计)。
- 眼图张开的高度决定了系统的噪声容限。

3.5.5 再生中继器

当线路码数字信号(如 PCM 信号)在硬连线信道(如双绞电话线)上传输时，信号不断被衰减、滤波并且受到噪声污染。因此，对于长距离传输，除非在传输线路和接收机中串联一系列的中继器，如图 3.7 所示，否则接收端将无法恢复数据。中继器周期性地对信号进行放大和整形。因为需要保留信号的相对幅度值，所以如果传输的是模拟信号而不是数字信号的话，中继器就只能使用具有适当滤波特性的线性放大器了。此时，带内失真会在线性中继器之间积累，这也是模拟信号的缺点之一。然而，如果传输的是数字信号，则可以进行非线性处理，再生出规则的数字信号，我们称完成这类非线性处理的器件为再生中继器。图 3.19 给出了用于单极性 NRZ 信号的再生中继器的简化方框图。图中放大滤波器将低电平输入信号放大到适合后续电路处理的电平，并对信号进行滤波以使信道噪声和 ISI 的影响最小。(减小 ISI 的滤波器称为均衡滤波器，这将在 3.6 节中讨论。)位同步器以同步后的比特率产生时钟信号，并在眼图张开最大的时刻对放大的失真信号进行抽样。(下一小节将详细讨论位同步器。)对每个时钟脉冲，抽样与保持电路产生一个样本值并保持一个比特间隔(即 T_b)的时间，直到下一个时钟脉冲的到来。仅当样本值大于预置的门限电平 V_T时，比较器才输出一个高电平，其中门限电平 V_T的值通常取期望的样本值峰-峰抖动的一半①。如果输入的噪声很小，并且 ISI 可以忽略不计，则只有当中继器输入端受污染的单极性 NRZ 线路码为二进制码元 1(即高电平)时，比较器才输出高电平。这里比较器是一种门限器件，它起判决作用。于是，中继器再生了“无噪声”的单极性 NRZ 线路码，除非输入噪声和 ISI 足够大，使得样本值错误地落入了 V_T的另一侧，从而引起误判决并输出误码。第 7 章将讨论中继器输入端的 SNR 值、所使用的滤波器以及所选择的 V_T值是如何影响误比特率的②。

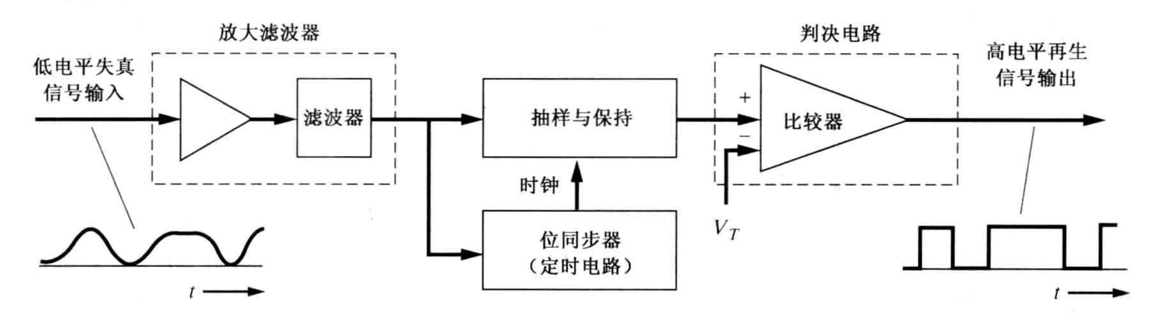


图 3.19　用于单极性 NRZ 信号的再生中继器

在远距离数字通信系统中，可以将许多中继器串联在一起使用，如图 3.7 所示。当然，中继器之间的距离是由传输媒介的路径损耗和叠加的噪声量决定的。当信道中某点的 SNR 值低于保持系统总的误比特率指标所需的门限值时，则在该点就需要添加一个中继器。现在假设中

---

① 当二进制码元 1 和 0 以相同的概率出现时，这是最佳的 V_T值。

② 为了获得最小的误比特率，可以将图 3.19 中的抽样与保持电路替换成一种称为匹配滤波器(MF)的最佳抽样判决电路。匹配滤波器将在 6.8 节中讨论。

继器已经被合理放置，使得每个中继器具有相同的误比特率 P_e。包含接收机在内，系统中总共有 m 个中继器，对于这 m 个串联的中继器，利用附录 B 给出的二项分布可以计算出系统总的误比特率 P_{me}。利用式(B.33)，可得到 m 个中继器中第 i 个中继器产生的误比特率为：

$$P_i = \binom{m}{i} P_e^i (1 - P_e)^{m-i} \tag{3.49}$$

然而，对于特定的一位数据，仅当奇数个中继器中的每一个都产生误码时，系统的输出才为误码。因而，m 个串联的中继器错一位码的总概率为：

$$\begin{aligned} P_{me} &= \sum_{\substack{i=1 \\ i=\text{奇数}}}^{m} P_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i=\text{奇数}}}^{m} \binom{m}{i} P_e^i (1 - P_e)^{m-i} \\ &= mP_e(1 - P_e)^{m-1} + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} P_e^3 (1 - P_e)^{m-3} + \cdots \end{aligned} \tag{3.50a}$$

在实用条件下，通常有 $P_e \ll 1$，所以上面的级数中只有第一项是有意义的。于是，总的误比特率可以近似表示为：

$$P_{me} \approx mP_e \tag{3.50b}$$

式中，P_e为单个中继器的误比特率。

3.5.6 位同步

同步信号是一种时钟类型的信号，接收机(或中继器)需要利用它们从受污染的输入信号中检测(或再生)数据。这些时钟信号与接收到的输入信号之间有着精确的频率和相位关系，相对于发送机中的时钟信号而言，它们存在着一定的时延，这是因为信号通过信道时经历了一定的传输延迟。

数字通信系统中通常至少需要以下三种类型的同步信号：(1)位同步信号，用于区分每个比特间隔，将在本小节讨论；(2)帧同步信号，用于区分一组数据，将在3.9 节时分复用中讨论；(3)载波同步信号，用于带通信号的相干检波，将在第 4、5 和 7 章中讨论。系统通常可以通过以下两种方法获取同步信号：(1)直接从受污染的信号中提取同步信号；(2)利用单独的信道传送同步信号。

由于在单独的信道上传送同步信号的方法通常是不经济的，所以本小节将集中精力讨论直接从受污染的信号中提取同步信号的位同步器及其系统。位同步器电路的复杂程度取决于线路码的同步特性。例如，如果在单极性 RZ 码中具有足够数量的交替二进制码元 1 和 0，则实现这种码型的位同步器几乎是小事一件，因为如图 3.16(c)所示，单极性 RZ 码的 PSD 在频率 $f = R$ 处有一个 δ 函数。因此，只要将接收到的单极性 RZ 波形通过一个频率调谐在 $f_0 = R = 1/T_b$处的窄带带通滤波器就可以获得位同步时钟信号。在图 3.20 中，如果删除平方律器件，就给出了用于单极性 RZ 码的位同步器的方框图。此外，正如在 4.3 节中描述的那样，还可以使用锁相环(PLL)电路从单极性 RZ 线路码中提取同步信号，这是通过将 PLL 锁定在频率 $f = R$ 处的离散谱线上实现的。对于极性 NRZ 线路码，它的位同步器要稍微复杂一些，如图 3.20 所示。这里首先通过平方律(或者全波整流器)电路将滤波后的极性 NRZ 波形[见图 3.20(b)]转换成单极性 RZ 波形[见图 3.20(c)]。因为单极性 RZ 码的 PSD 在频率 $f = R$ 处有一个 δ 函数，所以利用滤波器或 PLL 可以容易地恢复出时钟信号。迄今为止，所讨论的位同步器都是利用某种技术检测出 PSD 在频率 $f = R$ 处的谱线来实现的。

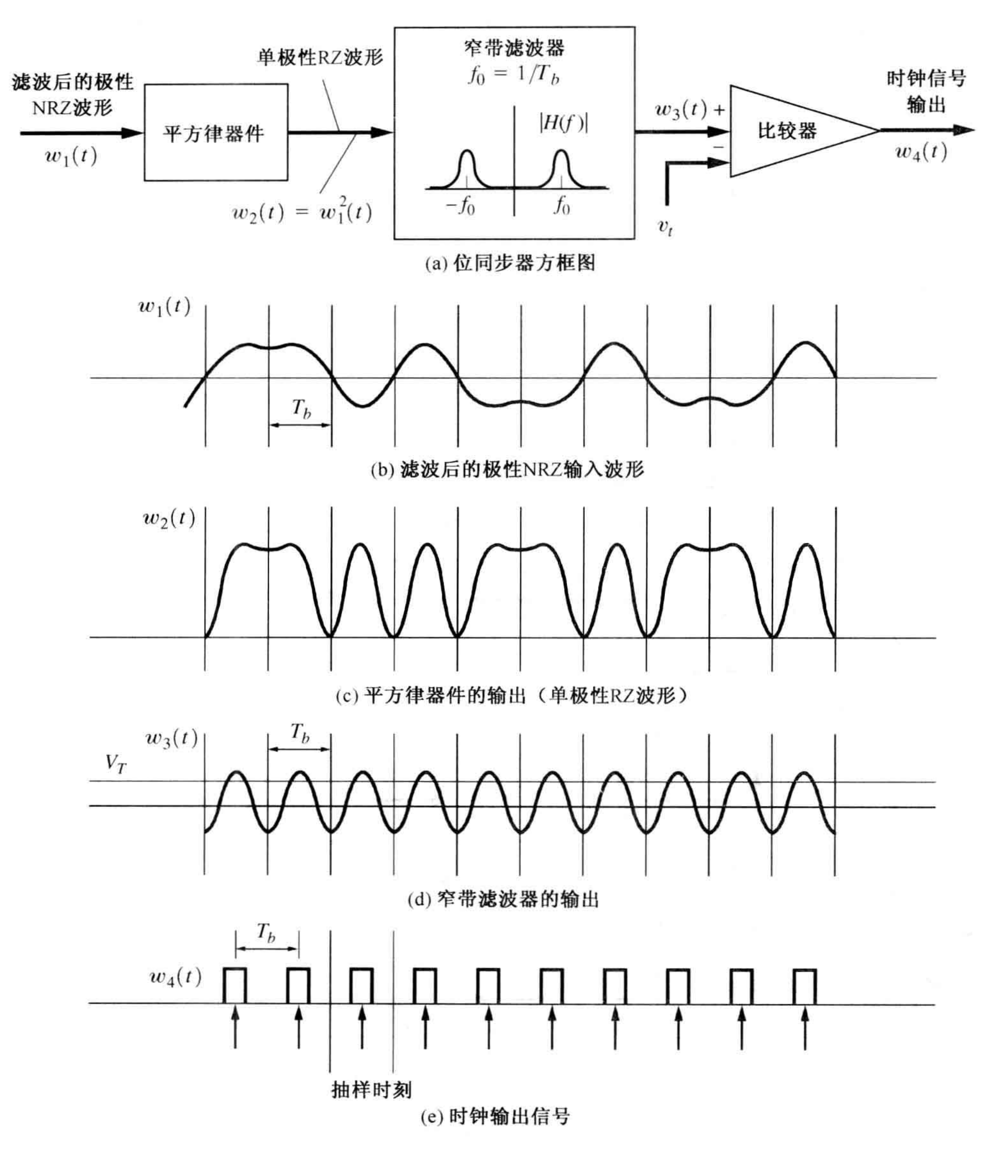


图 3.20　用于极性 NRZ 信号的平方律位同步器

另一种技术是利用线路码自身的对称性质来实现位同步的[Carlson，1986]。参考图 3.18 中的极性 NRZ 码的眼图，假定数据序列由交替的 1 和 0 组成，则可以认为经过适当滤波后的线路码脉冲形状是关于最佳定时(抽样)时刻对称的。在图 3.21 中，令 $w_1(t)$表示滤波后的极性 NRZ 线路码，令 $w_1(\tau_0 + nT_b)$ 表示在眼图张开最大时对线路码波形进行抽样获得的样本值，这里 n 是一个整数，$R = 1/T_b$指线路码的比特率，τ 为相对定时时刻(即时钟相位)，τ_0 是 τ 的最佳值，对应于在眼图张开最大时刻进行抽样。因为对于由交替的 1 和 0 组成的数据，线路码脉冲形状近似地关于最佳定时时刻对称，所以有：

$$|w_1(\tau_0 + nT_b - \Delta)| \approx |w_1(\tau_0 + nT_b + \Delta)|$$

式中，τ_0 为最佳的时钟相位，并且有 $0 < \Delta < 1/2T_b$。通常称 $w_1(\tau + nT_b - \Delta)$ 为超前样本，称 $w_1(\tau + nT_b + \Delta)$ 为滞后样本，利用这两个样本可以推导出最佳定时信号，这也是图 3.21 所示的

超前-滞后位同步器的工作原理。用于压控时钟(VCC)的控制电压 $w_3(t)$ 是由 $w_2(t)$ 经过平滑(取平均)后得到的,也就是说:

$$w_3(t) = \langle w_2(t) \rangle \tag{3.51a}$$

其中,

$$w_2(t) = |w_1(\tau + nT_b - \Delta)| - |w_1(\tau + nT_b + \Delta)| \tag{3.51b}$$

(取平均操作是必须的,因为只有这样位同步器才能保持同步状态,即使数据序列中的 1 和 0 并不是逐位交替的。)如果 VCC 产生的定时脉冲具有最佳的定时时刻,即 $\tau = \tau_0$,也就是说,在眼图张开最大时刻进行抽样,则由式(3.51)可知,控制电压 $w_3(t)$ 为零。如果 τ 滞后,则 $w_3(t)$ 是一个正的校正电压;如果 τ 超前,则 $w_3(t)$ 是一个负的校正电压。正的(负的)控制电压将使 VCC 输出信号的频率增大(减小)。于是,位同步器将输出一个同步于输入数据流的时钟信号。$w_4(t)$ 是一个脉冲串,它在时间点 $t = \tau + nT_b$ 上具有窄的时钟脉冲,其中 n 是任意的整数,τ 近似等于 τ_0,后者为眼图张开最大时刻抽样的最佳时钟相位。有趣的是,比较图 3.21 中的超前-滞后位同步器和图 5.3 中的科斯塔(Costas)载波同步环,可以发现它们具有相同的形式。

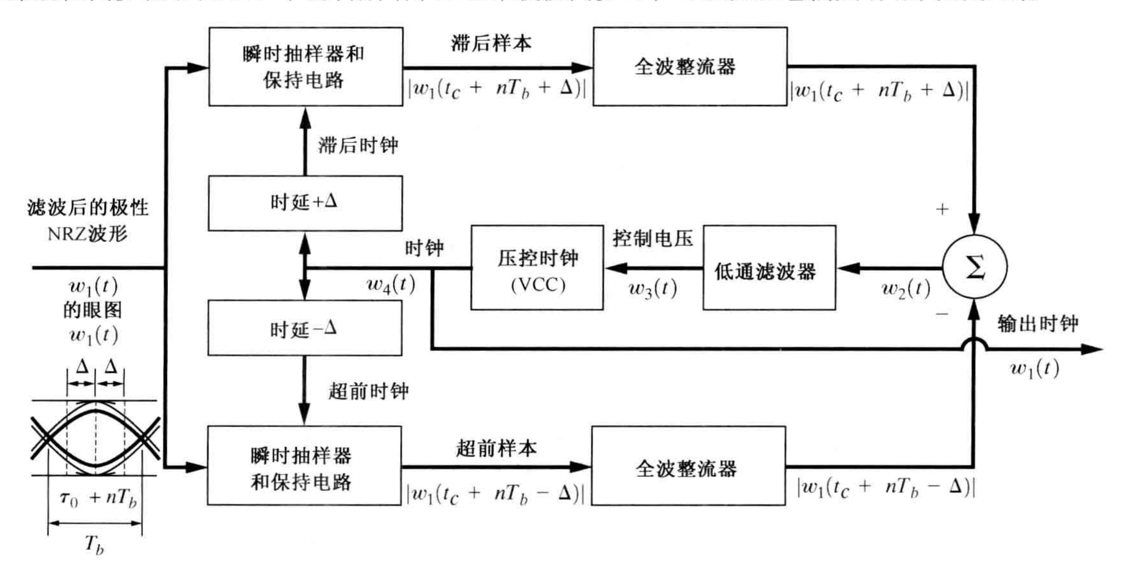


图 3.21　用于极性 NRZ 信号的超前-滞后位同步器

单极性、极性和双极性位同步器只有当数据序列中存在足够数量的交替的 1 和 0 时才能很好地工作。采用以下两种方法之一可以预防因为长连 1 或 0 串而引起的同步丢失。其一是采用在第 1 章中所讨论的比特交织(即扰乱)技术。此时,具有长连 1 或 0 串的源数据被交织以生成具有交替的 1 和 0 的数据序列,然后在信道上以单极性、极性或双极性线路码的形式传输。在接收端,首先采用前面描述的常规接收技术,通过位同步器恢复出交织的数据,然后对交织的数据进行解交织运算以获得原始数据。其二是采用完全不同类型的线路码,这些码型在同步时不需要数据序列具有交替的 1 和 0。例如,可以采用曼彻斯特 NRZ 编码技术,但是它所需要的信道带宽是极性 NRZ 码的两倍。

3.5.7　多进制极性 NRZ 信号功率谱

与二进制信号相比,多进制信号减小了所需占用的信道带宽。这个概念在 3.4 节就介绍过了。这里我们将进一步讨论这个概念,并且将推导出多进制极性 NRZ 信号 PSD 的数学表达式。

为了减小信号的带宽，图 3.22 给出了如何将二进制信号转换成多进制极性 NRZ 信号的方法，这里 ℓ 位的 DAC 用于将数据速率为 R bps 的二进制信号转换成 $L=2^{\ell}$ 进制的极性 NRZ 信号。

例如，假设使用 $\ell=3$ 位的 DAC，于是输出的是 $L=2^3=8$ 进制信号。图 3.22(b) 给出了典型的输入波形，图 3.22(c) 给出了相应的八进制输出波形，其中 T_s 指发送一个多进制符号所需要的时间。为了获得这样的输出波形，必须采用如表 3.5 所示的编码。由图可知，$D=1/T_s=1/(3T_b)=R/3$，或者一般而言，输出信号的波特率为：

$$D=\frac{R}{\ell} \tag{3.52}$$

波特率 D 和比特率 R 之间的关系与 3.4 节中讨论维数定理时所得出的结论相同，在那里我们曾指出信号的带宽受限于 $B \geqslant D/2$。

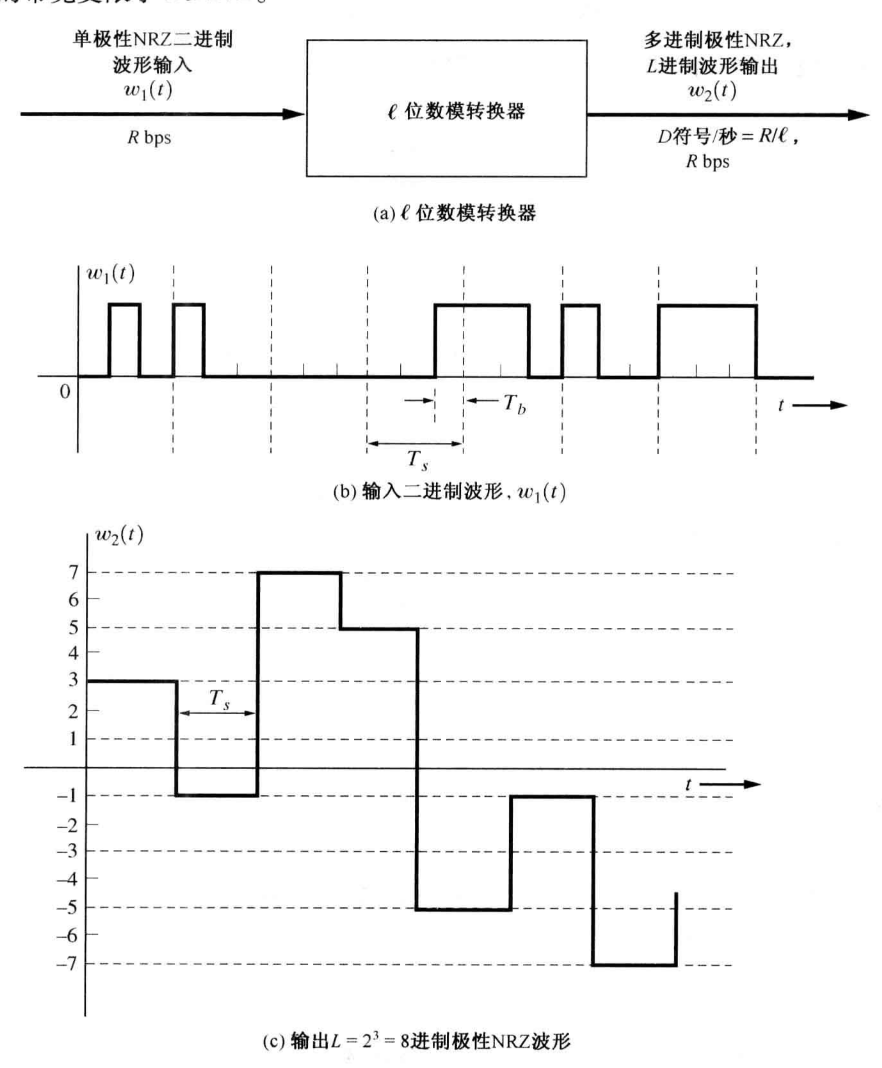


图 3.22　二进制到多进制极性 NRZ 信号的转换

利用式(3.36a)可以获得多进制极性 NRZ 波形[见图 3.22(c)]的 PSD。我们计算表 3.5 中给出的 a_n 值以相同的概率出现时的 $R(k)$，当 $k=0$ 时，可得：

$$R(0)=\sum_{i=1}^{8}(a_n)_i^2P_i = 21$$

这里，8 种可能值的取值概率都为 1/8。当 $k\neq0$ 时，有 $R(k)=0$。于是，由式(3.36a)可得，波形 $w_2(t)$ 的 PSD 为：

$$\mathcal{P}_{w_2}(f) = \frac{|F(f)|^2}{T_s}(21 + 0)$$

这里脉冲宽度(或符号宽度)为 $T_s=3T_b$，对于宽度为 $3T_b$ 的矩形脉冲波形，如果 $\ell=3$，则上式可重写为：

$$\mathcal{P}_{w_2}(f) = 63T_b\left(\frac{\sin 3\pi fT_b}{3\pi fT_b}\right)^2$$

因此，此多进制极性 NRZ 信号的第一零点带宽为 $B_{\text{null}}=1/(3T_b)=R/3$，或者说是输入二进制信号带宽的 1/3 倍。

表 3.5　3 位 DAC 码

数字码字	输出电平
000	+7
001	+5
010	+3
011	+1
100	-1
101	-3
110	-5
111	-7

一般来说，具有矩形脉冲形状的 $L=2^\ell$ 进制极性 NRZ 信号的 PSD 可以表示为：

$$\mathcal{P}_{\text{multilevel NRZ}}(f) = K\left(\frac{\sin \ell\pi fT_b}{\ell\pi fT_b}\right)^2 \tag{3.53}$$

式中，K 为常数，信号的零点带宽为：

$$B_{\text{null}} = R/\ell \tag{3.54}$$

例题 3.11　画出多进制 NRZ 线路码的 PSD

计算并画出数据速率 $R=6$ bps 的八进制 NRZ 线路码的 PSD。参见 M 文件 Example3_11.m 的运行结果。将所得结果与图 5.33 进行比较。

总之，多进制信号与二进制信号相比，可以减小数字信号的带宽。实际上，滤波后的多进制信号常用于调制载波，形成相对窄带的数字信号，以便在信道上传输数字信息。

3.5.8 频谱效率

定义　数字信号的频谱效率是指单位时间内每赫兹的带宽所能传输的数据比特数，即

$$\eta = \frac{R}{B}\,(\text{bps})/\text{Hz} \tag{3.55}$$

式中，R 为数据的比特率，B 为信号的带宽。

在实际应用中，可用的带宽常常受到物理上或法律上的限制，通信工程师的任务就是选择

一种信号编码技术，在给定的成本限制并符合系统输出端低误码率的要求下，获得最大的频谱效率。此外，在误码率较小的条件下，系统的频谱效率还受限于信道噪声。香农信道容量公式，即式(1.10)，给出了频谱效率的最大值为：

$$\eta_{\max} = \frac{C}{B} = \log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right) \tag{3.56}$$

但香农定理并没有指出如何获得具有最大理论频谱效率的系统。然而，接近于理论频谱效率的实际系统通常都组合使用了纠错编码技术和多进制信号技术。

例题 3.12 最大频谱效率

画出频谱效率 $\eta_{\max}$ 随信噪比 S/N 变化的曲线，其中信噪比 S/N 的单位为 dB。参见 M 文件 Example3_12.m 的运行结果。

将式(3.54)代入式(3.55)，得到多进制极性 NRZ 信号的频谱效率为：

$$\eta = \ell (\text{bps})\,\text{Hz} \quad \text{多进制极性 NRZ 信号} \tag{3.57}$$

式中，ℓ 为 DAC 的位数。当然，正如式(3.56)所指出的那样，因为频谱效率受限于信噪比，所以不能无限制地增大 ℓ 值，以期获得无穷大的频谱效率。

前面各节中所讨论的各种线路码的频谱效率可以从它们的 PSD 中容易地计算出来，结果如表 3.6 所示。由表中可以看出，单极性 NRZ、极性 NRZ 和双极性 RZ 信号的频谱效率是单极性 RZ 和曼彻斯特 NRZ 信号的两倍。

对于所有的二进制线路码，都有 $\eta \leqslant 1$。虽然采用多进制信号可以获得比二进制信号高得多的频谱效率，但是多进制电路也更为昂贵。实际上，在 T1G 数字电话线上使用的就是多进制极性 NRZ 信号，这将在 3.9 节中研究。

表 3.6 线路码的频谱效率

码 型	第一零点带宽(Hz)	频谱效率 $\eta = R/B$[bps/Hz]
单极性 NRZ	R	1
极性 NRZ	R	1
单极性 RZ	$2R$	$\frac{1}{2}$
双极性 RZ	R	1
曼彻斯特 NRZ	$2R$	$\frac{1}{2}$
多进制极性 NRZ	R/ℓ	ℓ

3.6 码间串扰

矩形多进制脉冲的绝对带宽是无限的。如果这些脉冲通过通信系统时被不恰当地滤波，则它们就会在时域中扩展，这样每个符号的脉冲将干扰相邻的时隙，从而引起码间串扰(ISI)，这一过程如图 3.23 所示。现在的问题是：如何限制信号的带宽却又不会引入 ISI？当然，信号带宽受限后，脉冲将具有圆顶(不再是平顶脉冲了)。奈奎斯特(Nyquist)是最早研究这一问题的人[1928]，他发现了三种可用于消除 ISI 的脉冲形成方法。在后续的小节中我们将研究这三种不同的方法。

考虑如图 3.24 所示的数字传输系统，这里输入端的平顶多进制信号为：

$$w_{\text{in}}(t) = \pi \sum_n a_n h(t - nT_s) \tag{3.58}$$

其中，$h(t) = \Pi(t/T_s)$，a_n 可以取 L 进制所有的允许值(对于二进制信号有 $L=2$)。符号率为 $D=1/T_s$脉冲/秒。式(3.58)还可以写为：

$$w_{in}(t) = \sum_n a_n h(t) * \delta(t - nT_s)$$
$$= \left[\sum_n a_n \delta(t - nT_s)\right] * h(t) \tag{3.59}$$

图3.24中线性系统的输出是输入脉冲序列与整个系统的等效冲激响应的卷积，也就是说

$$w_{out}(t) = \left[\sum_n a_n \delta(t - nT_s)\right] * h_e(t) \tag{3.60}$$

其中，整个系统的等效冲激响应为：

$$h_e(t) = h(t) * h_T(t) * h_C(t) * h_R(t) \tag{3.61}$$

注意，$h_e(t)$也具有脉冲形状，当用单个平顶脉冲激励发送滤波器时，接收滤波器输出的就是 $h_e(t)$波形(见图3.24)。

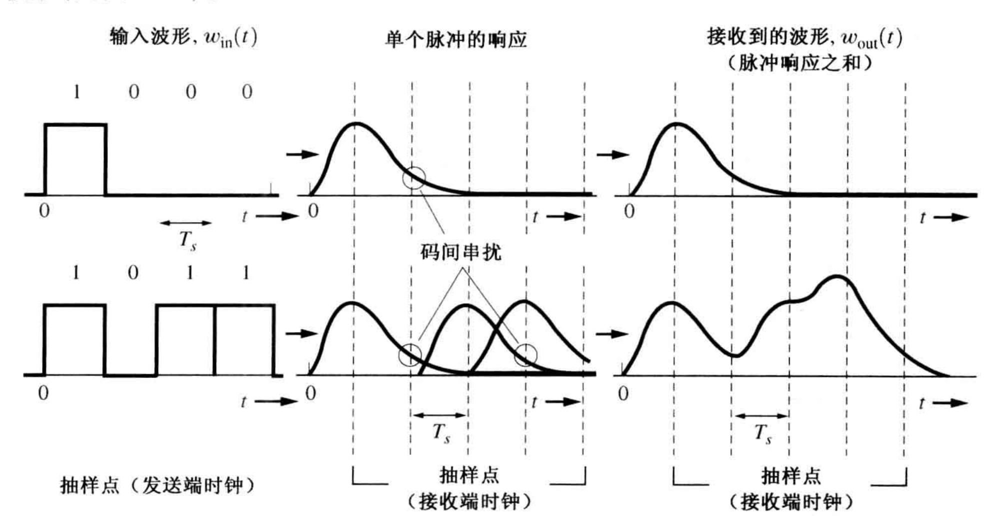


图3.23 二进制通信系统接收脉冲的ISI示意图

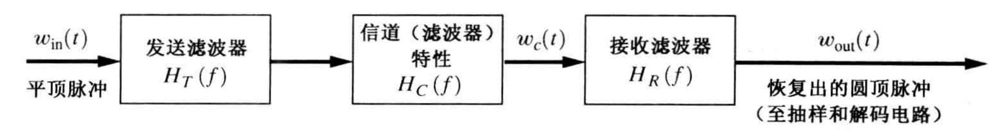


图3.24 基带脉冲传输系统

等效系统的传递函数为：

$$H_e(f) = H(f)H_T(f)H_C(f)H_R(f) \tag{3.62}$$

其中，

$$H(f) = \mathscr{F}\left[\Pi\left(\frac{t}{T_s}\right)\right] = T_s\left(\frac{\sin \pi T_s f}{\pi T_s f}\right) \tag{3.63}$$

当输入到发送滤波器的是平顶脉冲时，将使用式(3.63)。接收滤波器的传递函数由下式给出：

$$H_R(f) = \frac{H_e(f)}{H(f)H_T(f)H_C(f)} \tag{3.64}$$

式中，$H_e(f)$是系统总的滤波特性。

当通过选择$H_e(f)$以使ISI最小时，称由式(3.64)获得的$H_R(f)$为均衡滤波器。均衡滤波器的特性既取决于信道的频率响应$H_C(f)$，也取决于所需的$H_e(f)$。当信道由双绞电话线组成时，不同的呼叫之间的信道传递函数也不同，此时的均衡滤波器必须是一个自适应滤波器。在这种情况下，均衡滤波器通过调整自身的系数从而使ISI最小。在某些自适应策略中，每一次通信发起之前都会发送一个测试位图(test bit pattern)，用于调整均衡滤波器使得眼图张开最大(即ISI最小)，称这种序列为学习序列或训练序列。

我们可以重写式(3.60)，使得接收滤波器输出端的圆顶脉冲序列为：

$$w_{\text{out}}(t) = \sum_n a_n h_e(t - nT_s) \tag{3.65a}$$

输出脉冲的形状受输入脉冲形状(这里为平顶脉冲)、发送滤波器、信道滤波器以及接收滤波器的影响。因为实用中信道滤波器是预先规定好的，所以问题的关键在于确定发送滤波器和接收滤波器，使得接收滤波器输出端的圆顶脉冲具有最小的ISI。

例题3.13 *RC*滤波器引入的码间串扰

画出信道滤波器输入单极性NRZ信号时的系统输出波形图。假设包括发送端、信道以及接收端在内的总的传递特性具有*RC*低通滤波特性(见图2.15)，滤波器的3 dB带宽为1 Hz。同时假设输入的单极性NRZ信号的数据为[1 0 0 1 0 1 1 0 1 0]，比特率$R_b = 1$ Hz。画出接收机输出端的波形，并观察码间串扰现象。

解：由式(3.61)，有$h_e(t) = h(t) * h_{RC}(t)$，其中$h_{RC}(t)$是式(2.146)给出的*RC*低通滤波器的冲激响应。令单极性NRZ信号具有矩形脉冲形状，它在0到T_b(其中$R_b = 1/T_b$)时间域内有单位幅度，在其他时间域内为零。于是$h(t) = \Pi((t - T_b/2)/T_b)$，$T_b$为1比特的宽度。将$h_{RC}(t)$及$h(t)$代入$h_e(t)$表达式中，得：

$$h_e(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0 \\ 1 - e^{-t/\tau_0}, & 0 < t \leqslant T_b \\ e^{-t/\tau_0}(e^{-Tb/\tau_0} - 1), & t > T_b \end{cases} \tag{3.65b}$$

将上式代入式(3.65a)，得到系统输出波形。计算过程及结果参见M文件Example3_13.m。

从实用角度来看，当找到所需的发送滤波器和接收滤波器后，它们可以乘以$Ke^{-j\omega T_d}$，其中K是适当的增益因子，T_d是适当的时延，通过选择这些参数以使滤波器更容易构造。因子$Ke^{-j\omega T_d}$的引入并不会改变输出波形中ISI为零的结果。当然，这会改变输出波形的幅度和时延。

3.6.1 奈奎斯特第一准则(零ISI)

奈奎斯特消除ISI的第一准则使用了等效传递函数$H_e(f)$的概念，并使对应的冲激响应满足以下条件：

$$h_e(kT_s + \tau) = \begin{cases} C, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \tag{3.66}$$

式中，k为整数，T_s是符号(样本)的定时周期，τ是指接收机抽样定时时刻与输入符号定时时刻之间的偏移量，C是一个非零整数。也就是说，如果在$t = 0$的时刻，向发送滤波器输入端输入单个电平为a的平顶脉冲，接收到的脉冲将为$ah_e(t)$。输出脉冲在$t = \tau$时刻的值为aC，但是在其他的抽样时刻不会引起串扰，这是因为当$k \neq 0$时有$h_e(kT_s + \tau) = 0$。

现在假设我们选择的 $h_e(t)$ 为 $(\sin x)/x$ 型的函数。特别地，令 $\tau=0$，那么所选择的 $h_e(t)$ 具有以下形式：

$$h_e(t) = \frac{\sin \pi f_s t}{\pi f_s t} \tag{3.67}$$

式中，$f_s=1/T_s$。这个冲激响应满足零 ISI 的奈奎斯特第一准则，即式(3.66)。因此，如果合理地设计发送滤波器及接收滤波器，使得系统总的传递函数为：

$$H_e(f) = \frac{1}{f_s}\Pi\left(\frac{f}{f_s}\right) \tag{3.68}$$

那么，输出波形就不会有 ISI。而且，由式(3.68)给出的传递函数的绝对带宽为 $B=f_s/2$。由第 2 章和 3.4 节中所研究的抽样定理和维数定理可知，这是具有最小带宽的最佳滤波系统，它所允许的信号波特率为 $D=1/T_s=2B$ 脉冲/秒，其中 B 为系统的绝对带宽。然而，想要使系统总的冲激响应为 $(\sin x)/x$ 型，那么在工程上存在两个难题：

- 要求系统总的 $H_e(f)$ 在通带 $-B<f<B$ 范围内具有平坦的幅度传递特性，而在其他频带内为 0。这在实际系统中是无法实现的(即冲激响应是非因果的，并且具有无穷长的持续时间)。因为滤波器的传递函数 $H_e(f)$ 在频点 $f=\pm B$ 处具有陡峭的下降沿，所以很难用实际的滤波器去逼近它。
- 解码器中抽样电路的时钟同步必须非常精确，因为 $(\sin x)/x$ 脉冲以 $1/x$ 的速率衰减，并且仅当 t 正好是最佳抽样时刻时，对相邻时隙的影响才为零。于是，不精确的同步会引起 ISI。

正是因为存在上述困难，使得我们不得不考虑其他的脉冲波形，它们的带宽比 $(\sin x)/x$ 脉冲稍微大一点。最理想的情况是寻找一种脉冲波形，它在相邻抽样点上的值为零，并且其包络的衰减速率远远大于 $1/x$，这样抽样时刻的时钟抖动就不会引起严重的 ISI。为了获得此类传递函数，一种解决方案就是采用具有升余弦滚降特性的奈奎斯特滤波器，它具有很多我们所期望的特征。

3.6.2 升余弦滚降奈奎斯特滤波

定义 升余弦滚降奈奎斯特滤波器的传递函数为：

$$H_e(f) = \begin{cases} 1, & |f| < f_1 \\ \frac{1}{2}\left\{1 + \cos\left[\frac{\pi(|f| - f_1)}{2f_\Delta}\right]\right\}, & f_1 < |f| < B \\ 0, & |f| > B \end{cases} \tag{3.69}$$

式中，B 为系统的绝对带宽，并且有参数：

$$f_\Delta = B - f_0 \tag{3.70}$$

以及

$$f_1 \triangleq f_0 - f_\Delta \tag{3.71}$$

上式中，f_0 为滤波器的 6 dB 带宽。滚降因子定义为：

$$r = \frac{f_\Delta}{f_0} \tag{3.72}$$

这种滤波器的特性如图 3.25 所示，对应的冲激响应为：

$$h_e(t) = \mathscr{F}^{-1}[H_e(f)] = 2f_0\left(\frac{\sin 2\pi f_0 t}{2\pi f_0 t}\right)\left[\frac{\cos 2\pi f_\Delta t}{1-(4f_\Delta t)^2}\right] \tag{3.73}$$

图 3.26 给出了滚降因子 $r=0$、$r=0.5$ 和 $r=1$ 时，升余弦滚降奈奎斯特滤波器的频率响应和冲激响应。$r=0$ 时的滤波器特性等价于最小带宽系统的特性，这里 $f_0=B$，并且冲激响应具有 $(\sin x)/x$ 型脉冲的形状。从图中可以看出，随着绝对带宽的增大（如 $r=0.5$ 或 $r=1$），有（1）对滤波器的要求逐渐放宽了，尽管 $h_e(t)$ 仍是非因果的；（2）对时钟定时精确度的要求逐渐放宽了，因为冲激响应的包络以远大于 $1/|t|$ 的速率衰减（当 t 比较大时，以 $1/|t|^3$ 的速率衰减）。

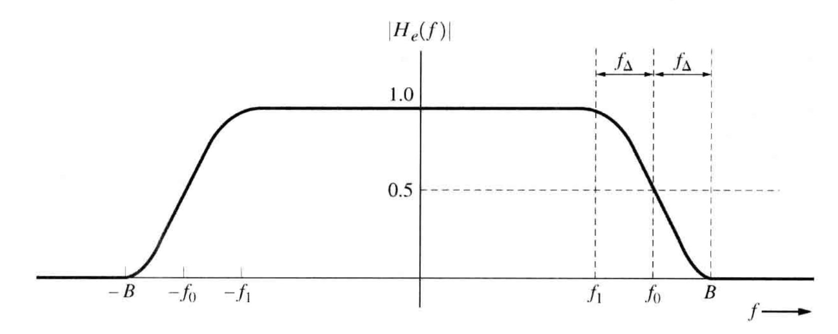


图 3.25　升余弦滚降奈奎斯特滤波器特性（计算过程参见 M 文件 Example3_14. m）

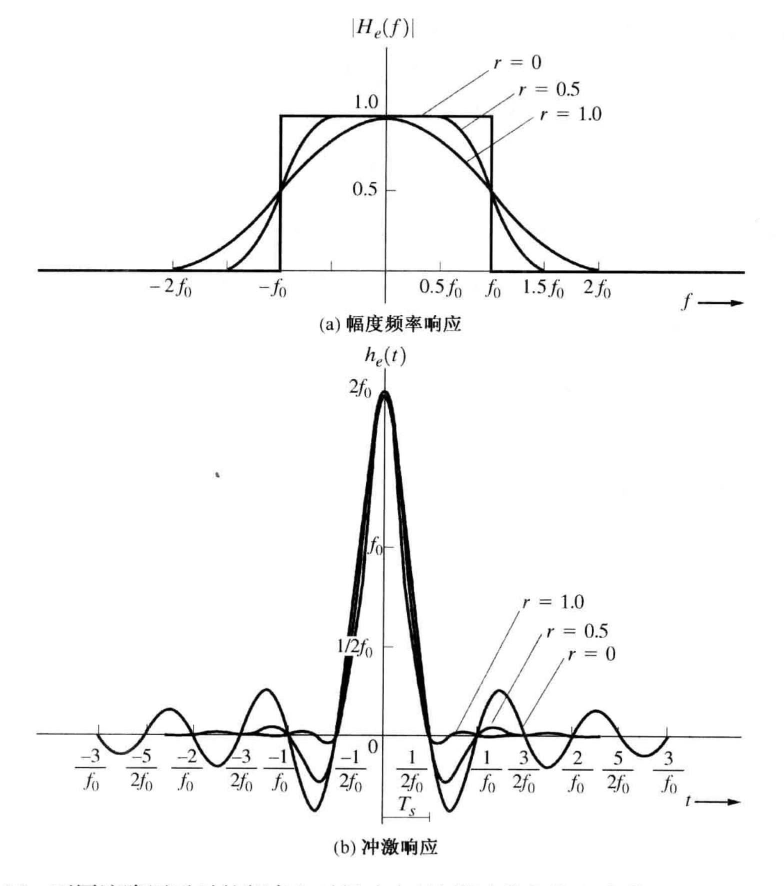


图 3.26　不同滚降因子时的频率和时间响应（计算过程参见 M 文件 Example3_14. m）

例题 3.14 升余弦滚降滤波器

画出升余弦滚降滤波器的幅值传递函数和冲激响应。将结果与图 3.26 进行比较。计算过程及结果参见 M 文件 Example3_14. m。

此外，假设具有极性 NRZ 码型的二进制数字信号(如例题 3.4 中的 PCM 信号)通过一个具有升余弦滚降滤波特性的通信系统。令滚降因子为 0.25，数字信号的比特率为 64 kbps。试确定滤波后数字信号的绝对带宽。

由式(3.74)可知，信号的绝对带宽为 $B=40$ kHz，这比滤波前数字信号的零点带宽 64 kHz 要小。

现在让我们来推导一个公式，它给出了升余弦滚降系统在无 ISI 时所能支撑的最大波特率。在图 3.26(b)中，当 $t=n/2f_0$时，系统的冲激响应为零，其中 $n\neq0$。因此，数据脉冲可以插入到系统冲激响应的每个零值点上，而不会引入 ISI。也就是说，参考式(3.66)，当 $\tau=0$ 时，如果选择符号时钟周期为 $T_s=1/(2f_0)$，那么升余弦滚降滤波器将满足无 ISI 的奈奎斯特第一准则。对应的波特率为 $D=1/T_s=2f_0$符号/秒。换句话说，升余弦滚降滤波器的 6 dB 带宽 f_0通常设计成符号率(波特)的 1/2。利用式(3.70)与式(3.72)，可得到系统所能支撑的最大波特率为：

$$D = \frac{2B}{1+r} \tag{3.74}$$

其中，B 为系统的绝对带宽，r 为系统的滚降因子。

例题 3.15 码间串扰和升余弦滚降滤波器

画出信道滤波器输入单极性 NRZ 信号时的系统输出波形图。假设包括输入数据脉冲成形、发送端、信道以及接收端在内的等效滤波器为升余弦滚降滤波器，其中滚降因子 $r=0.5$，输入的单极性 NRZ 信号的数据为[1 0 0 1 0 1 1 0 1 0]，比特率 $R_b=1$ Hz。计算信道的绝对带宽，并画出接收机输出端的波形图。计算过程及结果参见 M 文件 Example3_15. m。注意，在抽样时间 nT_b时刻(n 为整数)，无码间串扰现象。将所得结果与例题 3.13 进行比较。

升余弦滚降滤波器也称为奈奎斯特滤波器，它仅是满足奈奎斯特第一准则的一类滤波器中的一种，下面的定理给出了这类滤波器的定义。

定理 如果滤波器的有效传递函数满足下式，就称它为奈奎斯特滤波器：

$$H_e(f) = \begin{cases} \Pi\left(\dfrac{f}{2f_0}\right)+Y(f), & |f|<2f_0 \\ 0, & \text{否则} \end{cases} \tag{3.75}$$

其中，$Y(f)$是关于$f=0$ 轴偶对称的实函数，即有：

$$Y(-f)=Y(f), \quad |f|<2f_0 \tag{3.76a}$$

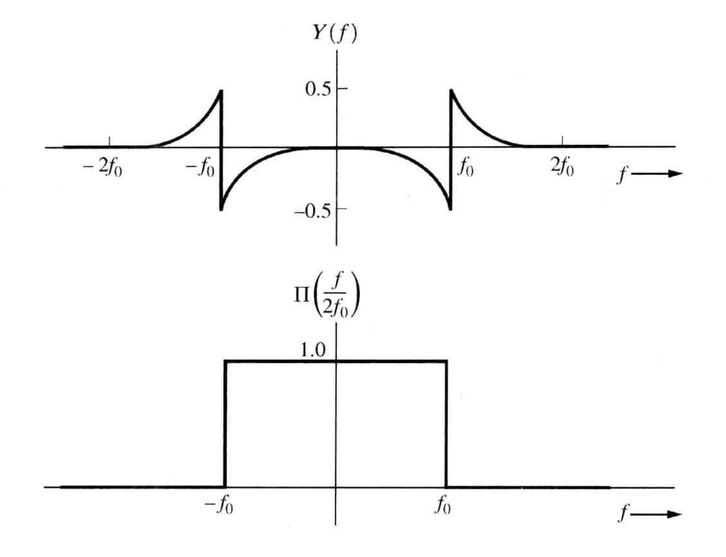
同时，$Y(f)$还关于$f=f_0$轴奇对称，即有：

$$Y(-f+f_0)=-Y(f+f_0), \quad |f|<f_0 \tag{3.76b}$$

于是，只要符号速率满足下式，系统的输出端就不存在码间串扰：

$$D=f_s=2f_0 \tag{3.77}$$

该定理的内容如图 3.27 所示。图中 $Y(f)$可以是满足式(3.76)给出的对称条件的任意实函数。于是，产生零 ISI 的滤波器特性有无穷多个。



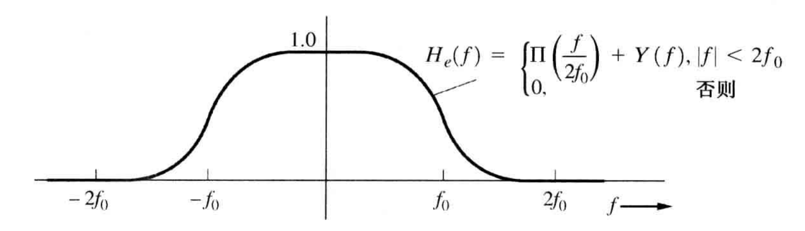


图 3.27　奈奎斯特滤波器特性

证明　我们只需证明当 $n \neq 0$ 时，这种滤波器的冲激响应在 $t = nT_s$ 处的值为零，其中 $T_s = 1/f_s = 1/(2f_0)$。对式(3.75)进行傅里叶反变换，可得下式：

$$h_e(t) = \int_{-2f_0}^{-f_0} Y(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}f + \int_{-f_0}^{f_0} [1 + Y(f)]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}f + \int_{f_0}^{2f_0} Y(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}f$$

或

$$h_e(t) = \int_{-f_0}^{f_0} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}f + \int_{-2f_0}^{2f_0} Y(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}f$$

$$= 2f_0\left(\frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0 t}\right) + \int_{-2f_0}^{0} Y(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}f + \int_{0}^{2f_0} Y(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}f$$

在上面的第一个积分式中，令 $f_1 = f + f_0$，在第二个积分式中令 $f_1 = f - f_0$，可得下式：

$$h_e(t) = 2f_0\left(\frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0 t}\right) + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}\int_{-f_0}^{f_0} Y(f_1 - f_0)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_1 t}\mathrm{d}f_1$$

$$+ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}\int_{-f_0}^{f_0} Y(f_1 + f_0)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_1 t}\mathrm{d}f_1$$

由式(3.76a)与式(3.76b)可知，$Y(f_1-f_0)=-Y(f_1+f_0)$，于是有：

$$h_e(t)=2f_0\left(\frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0 t}\right)+\mathrm{j}2\sin\omega_0 t\int_{-f_0}^{f_0}Y(f_1+f_0)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_1 t}\mathrm{d}f_1$$

式中，因为 $H_e(-f)=H_e^*(f)$，故冲激响应为实函数。并且它也满足奈奎斯特第一准则，因为当 $n\neq0$ 及 $\Delta\tau=0$ 时，在 $t=n/(2f_0)$ 处 $h_e(t)$ 的值为0。因此，如果我们在 $t=n/(2f_0)$ 时刻抽样，则输出信号中没有 ISI。

然而，这样的滤波器是非因果的。当然，我们可以使用一个线性相位特性为 $H_e(f)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T_d}$ 的滤波器，因为 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T_d}$ 因子是理想延时线的传递函数，所以只要将定时信号延迟 T_d秒，那么输出信号中将无 ISI。这将使滤波器冲激响应的峰值向右平移(沿着时间轴)，于是可以近似地认为滤波器是因果的。

在数字接收机中，除了减小 ISI 外，还要通过适当滤波来减小信道噪声的影响。正如将要在第6章中指出的那样，用于减小信道噪声影响的滤波器称为匹配滤波器。遗憾的是，如果接收机中的 $H_R(f)$ 采用匹配滤波器，则系统总的滤波特性 $H_e(f)$ 通常不能满足最小 ISI 时的奈奎斯特滤波特性。然而可以证明，如果进入接收机的是高斯噪声，那么将发送滤波器和接收滤波器设计成具有下述特性时，则可以同时使得 ISI 和信道噪声的影响最小[Sunde, 1969; Shanmugan, 1979; Ziemer 和 Peterson, 1985]：

$$|H_T(f)|=\frac{\sqrt{|H_e(f)|}\,[\mathcal{P}_n(f)]^{1/4}}{\alpha|H(f)|\sqrt{|H_c(f)|}}\tag{3.78a}$$

与

$$|H_R(f)|=\frac{\alpha\sqrt{|H_e(f)|}}{\sqrt{H_c(f)}\,[\mathcal{P}_n(f)]^{1/4}}\tag{3.78b}$$

式中，$P_n(f)$ 为接收机输入端噪声的 PSD，α 为任意的正数(例如，为了方便可以令 $\alpha=1$)。$H_e(f)$ 可以选择任意满足奈奎斯特第一准则的频率响应特性，$H(f)$ 由式(3.63)给出。$H_T(f)$ 和 $H_R(f)$ 可以具有任何适当的相位响应，只要整个系统的相位响应是线性的，这会使输出信号具有一个恒定的时延。当系统具有平坦的信道传递函数、平坦的噪声特性和升余弦滚降等效滤波器时，由式(3.78)给出的发送和接收滤波器将成为平方根升余弦滚降滤波器。

3.6.3 控制 ISI 的奈奎斯特第二准则与第三准则

用于 ISI 控制的奈奎斯特第二准则允许以受控的方式引入部分的 ISI，使得无噪声影响时，接收机可以消除这部分 ISI，并且无误地恢复出数据[Couch, 1993]。这种技术还允许以双倍的比特率，或者说，以一半的信道带宽传输信号。这一现象最早是20世纪初由报务员们发现的，并称之为“双倍打孔速度”[Bennett 和 Davey, 1965]。

在用于 ISI 控制的奈奎斯特第三准则中，通过选择 $h_e(t)$ 来消除 ISI 的影响，$h_e(t)$ 满足的条件为：在期望的符号间隔 T_s 内，$h_e(t)$ 脉冲下方的面积不为零。但在相邻的符号间隔内，$h_e(t)$ 脉冲下方的面积为零。检测数据时，接收端在每个期望的符号间隔 T_s 内计算接收波形下方的面积。现在已经找到了满足奈奎斯特第三准则的脉冲波形，但是它们在有信道噪声影响时的性能比前面所讨论的例题中的系统性能要差一些[Sunde, 1969]。

3.7　差分脉冲编码调制

在对音频或视频信号进行抽样时，常会发现相邻的样本值很接近，这意味着信号样本中存在着大量的冗余。当传输这些具有冗余度的样本值时，显然浪费了 PCM 系统的带宽和动态范围。减少冗余和降低信号带宽的一种方法是只传输相邻样本值的差值的 PCM 信号。简单地说，这就是差分脉冲编码调制(DPCM)。在接收端，利用以前的样本值和从差分系统上收到的当前的差分值就可以再生出当前的样本值。

此外，采用预测滤波器可以从以前的样本值中估算出当前的样本值。利用由抽头延迟线(一种斗链器件)组成的横向滤波器可以实现预测滤波器的功能，其原理如图 3.28 所示。如果通过设置滤波器的抽头增益 $\{a_l\}$，使得滤波器的输出就是由以前的样本值得到的当前样本值的估计值，则称这种滤波器为线性预测滤波器[Spilker，1977]。预测滤波器的最佳抽头增益是音频或视频信号相关特性的函数[Jayant 和 Noll，1984]。输出的样本值为：

$$z(nT_s) = \sum_{l=1}^{K} a_l y(nT_s - lT_s) \tag{3.79a}$$

或者，可以简单地记为：

$$z_n = \sum_{l=1}^{K} a_1 y_{n-l} \tag{3.79b}$$

式中，y_{n-l}表示在 $t=(n-l)T_s$ 时刻滤波器的输入样本值，横向滤波器中有 K 个延迟器件。

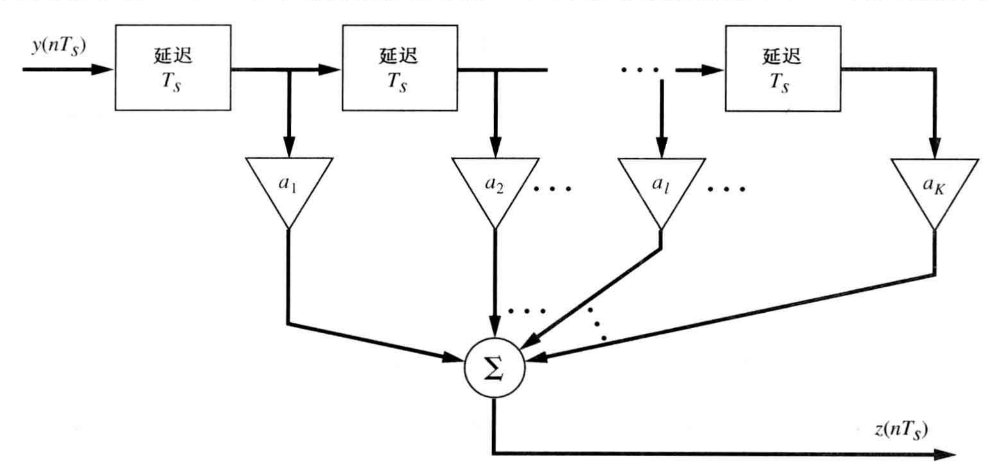


图 3.28　横向滤波器

线性预测滤波器可以在不同结构的差分编码器中产生 DPCM 信号，这里将讨论两种可能的结构。

第一种 DPCM 编码器的结构如图 3.29 所示。利用预测器获得差分脉冲幅度调制(DPAM)信号，然后对其进行量化和编码生成 DPCM 信号。接收输出端恢复出的信号为系统输入信号加上累积的量化噪声。当然，可以采用如图 3.30 所示的编码器结构以消除量化噪声的累积效应。

在如图 3.30 所示的第二种 DPCM 编码器的结构中，为了使恢复出的模拟信号中的量化噪声最小，发送端和接收端中的预测器对量化了的样本值进行预测。除了量化噪声，接收端输出的模拟信号与发送端输入的模拟信号是一样的。此外，在这种结构中量化噪声不会像在第一种结构中那样具有累积效应。

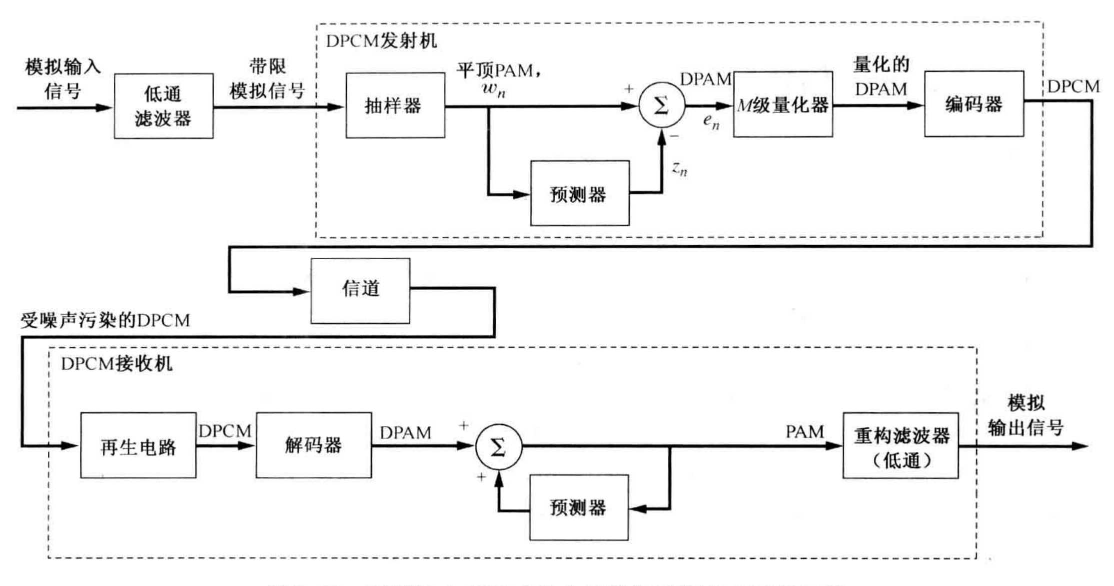


图 3.29 利用输入信号的样本值进行预测的 DPCM 系统

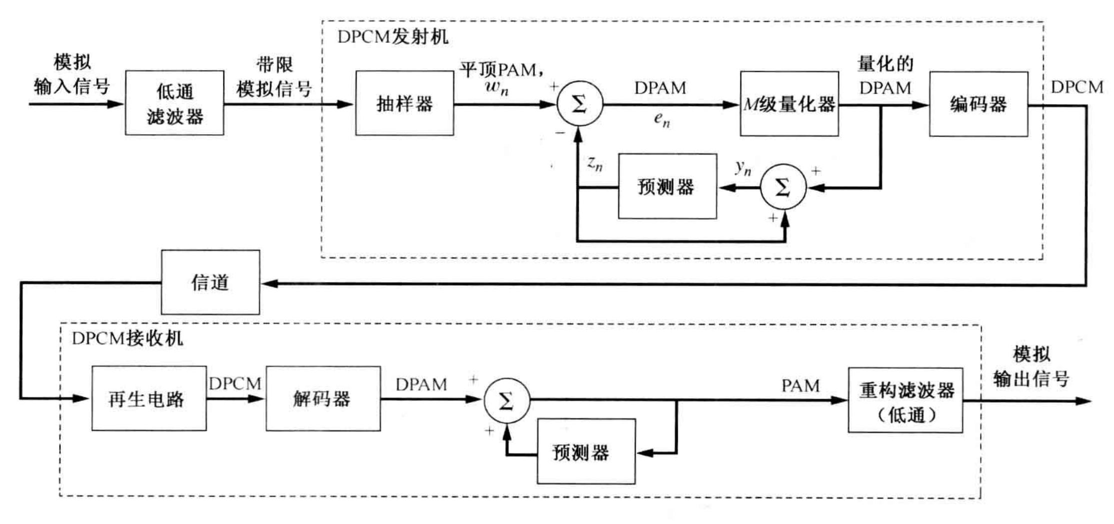


图 3.30 利用量化差分信号进行预测的 DPCM 系统

可以证明，DPCM 系统和 PCM 系统一样，也遵循 6 dB 原则[Jayant 和 Noll，1984]，即

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{dB}} = 6.02n + \alpha \tag{3.80a}$$

其中，对于 DPCM 语音信号有：

$$-3 < \alpha < 15 \tag{3.80b}$$

n 为一个 DPCM 码字中包含的比特数($M = 2^n$)。与压扩 PCM 系统不同，DPCM 系统的 α 值可以在更大的范围内变化，这取决于输入模拟信号的性质。式(3.80b)给出了输入模拟信号为音频(300 ~ 3400 Hz)电话信号时的 α 取值范围。DPCM 信号的质量可以与 PCM 信号的质量相比拟。由式(3.26b)可得，$\mu = 255$ 的 μ-律压扩 PCM 系统的 $\alpha = -10$ dB。因此，如果用 DPCM 取代 $\mu = 255$ 的 PCM，则系统的 SNR 值可以提高 25 dB。换句话说，在相同的 SNR 下，DPCM 每个样本所需的比特数要比 PCM 少 3 位或 4 位。这就是为什么电话 DPCM 系统通常以

$R=32$ kbps 或 $R=24$ kbps，而不是以压扩 PCM 系统所需的标准的 64 kbps 比特率工作的原因。

对带宽为 3.2 kHz 的音频信号的编码，CCITT 已经采纳了 32 kbps 的 DPCM 标准，它采用 8 千样本/秒的抽样速率，每个样本用 4 比特进行量化和编码[Decina 和 Modena，1988]。此外，对带宽为 7 kHz 的音频信号的编码，CCITT 已经采纳了 64 kbps 的 DPCM 标准(4 比特量化与 16 千样本/秒的抽样速率)。对 DPCM 系统进行详细的分析是困难的，它取决于输入信号的类型、抽样速率、量化电平、预测滤波器的级数以及预测器的增益系数。这类分析超出了本书的讨论范围，如果读者需要进一步研究，建议参考相关的参考文献[O'Neal，1966b；Jayant，1974；Flanagan et al.，1979；Jayant 和 Noll，1984]。

3.8　增量调制

从方框图的角度来看，增量调制(DM)是一种只有两个量化级的特殊 DPCM。如图 3.30 所示，当 $M=2$ 时，量化的 DPAM 信号是二进制的，由于编码器的功能是将多进制的 DPAM 信号转换成二进制码字，所以这里无需编码器。对于 $M=2$ 的情况，DPAM 信号就是 DPCM 信号，其中码字的长度为一个比特。因为 DM 系统中无需模数转换器(ADC)和数模转换器(DAC)，所以 DM 系统的成本低于 DPCM 系统($M>2$)，这也是 DM 方式的主要诱人之处——相对而言较为便宜。事实上，利用低成本的集成电路(例如 RC 低通滤波器)取代预测器还可以进一步减少 DM 系统的成本，如图 3.31 所示。

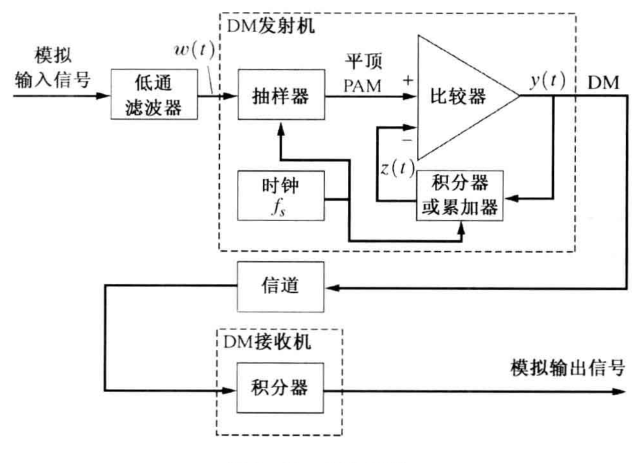


图 3.31　DM 系统

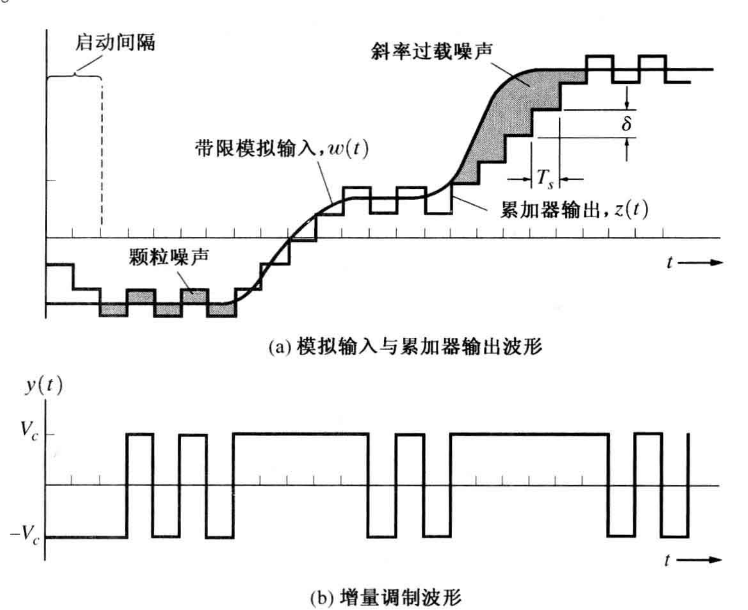
在图 3.31 所示的 DM 电路中，利用一个比较器来实现减法器和两级量化器的功能，输出为 $\pm V_c$(二进制)。此时的 DM 信号是极性信号。图 3.32 示出了与增量调制有关的一组波形。在图 3.32(a)中，画出了假定的模拟输入波形。如果平顶 PAM 信号的瞬时抽样值是在每个抽样周期开始时得到的，对应的累加器输出信号也如图 3.32(a)所示①。这里认为积分器充当累加器的作用，所以在 $t=nT_s$时刻，积分器的输出为：

① 抽样频率 $f_s=1/T_s$ 通常在 $2B_{\text{in}}<f_s<2B_{\text{channel}}$ 的频带范围内选择，其中 B_{in} 为输入模拟信号的带宽，B_{channel} 为信道的带宽。抽样频率的下限防止恢复出的模拟信号出现混叠现象，上限用于防止接收端 DM 信号中的 ISI。(对抽样频率 f_s 选择的进一步限制见例题 3.16。)

$$z_n = \frac{1}{V_c}\sum_{i=0}^{n}\delta y_i \tag{3.81}$$

式中，$y_i = y(iT_s)$，δ 为累加器的增益或量化台阶。对应的 DM 输出波形如图 3.32(b)所示。

在接收端，可以将 DM 信号转换回与系统输入端模拟信号近似的信号，利用接收机中的积分器可以完成上述转换过程。积分器产生的波形对应于发射机中累加器的输出波形[见图 3.32(a)]平滑之后的信号。



(a) 模拟输入与累加器输出波形

(b) 增量调制波形

图 3.32　DM 系统波形

例题 3.16　DM 系统的设计

当输入信号为正弦波时，求出预防产生斜率过载噪声所需量化台阶 δ 的值。

累加器输出信号的最大斜率为：

$$\frac{\delta}{T_s} = \delta f_s \tag{3.82}$$

当输入为正弦波形 $w(t) = A\sin(\omega_a t)$ 时，波形的斜率为：

$$\frac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t} = A\omega_a \cos \omega_a t \tag{3.83}$$

由上式可得，输入波形的最大斜率为 $A\omega_a$。于是，为了避免斜率过载，必须满足 $\delta fs > A\omega_a$，或者：

$$\delta > \frac{2\pi f_a A}{f_s} \tag{3.84}$$

但是，我们并不想使 δ 过分大于此值，因为那样会使颗粒噪声太大。

3.8.1　颗粒噪声与斜率过载噪声

由图 3.32(a)可以看出，累加器输出信号并不总能够跟踪上输入模拟信号的变化。量化误差信号可以分为两大类：斜率过载噪声和颗粒噪声。当量化台阶 δ 太小时，累加器输出信号很难跟踪上输入波形的快速变化，这时就会发生斜率过载噪声。量化台阶不管多大，都会出现颗粒噪声。但是随着量化台阶的减小，颗粒噪声也减小，所以，为了使颗粒噪声最小，应该使量化

台阶 δ 尽可能小。DM 系统中的颗粒噪声近似于 PCM 系统中的颗粒噪声，但斜率过载噪声却是一个新现象，这是由于对差分信号(而不是对信号自身)进行编码的缘故。这两种现象都会出现在前面讨论的 DPCM 系统中。

如果增大量化台阶 δ 的值，虽然可以减小斜率过载噪声，但却增大了颗粒噪声，因此，很显然量化台阶 δ 应该有一个最佳值，如图 3.33 所示。

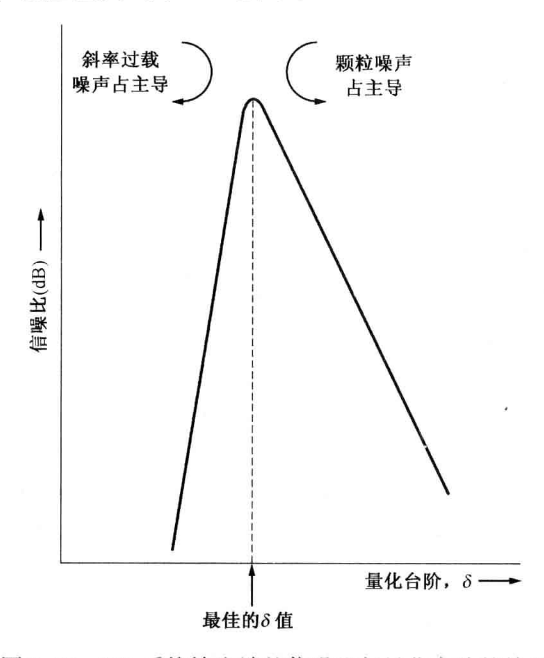


图 3.33　DM 系统输出端的信噪比与量化台阶的关系

DM 系统输出端的信噪比可以通过计算获得。试验表明颗粒噪声的谱均匀地分布在频带 $|f| \leqslant f_s$ 的范围内。我们还可以证明总的颗粒量化噪声总功率为 $\delta^2/3$(见 7.7 节的证明，其中把 PCM 的 $\delta/2$ 换为 DM 的 δ)。于是，噪声的 PSD 为 $\mathcal{P}_n(f) = \delta^2/(6f_s)$。在模拟信号带宽 $|f| \leqslant B$ 内，颗粒噪声的功率为：

$$N = \langle n^2 \rangle = \int_{-B}^{B} \mathcal{P}_n(f)\mathrm{d}f = \frac{\delta_2 B}{3f_s} \tag{3.85}$$

或者，由式(3.84)可得：

$$N = \frac{4\pi^2 A^2 f_a^2 B}{3f_s^3}$$

信号的功率为：

$$S = \langle w^2(t) \rangle = \frac{A^2}{2} \tag{3.86}$$

因此，当输入为正弦波测试信号时，DM 系统输出端的平均信号量化噪声功率比为：

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = \frac{3}{8\pi^2}\frac{f_s^3}{f_a^2 B} \tag{3.87}$$

其中，f_s 为 DM 系统的抽样频率，f_a 为输入正弦波形的频率，B 指接收系统的带宽。应该记住仅在输入信号为正弦波时，式(3.87)才有效。

对音频(VF)语音信号来说，如果 $f_a = 4$ kHz，那么由式(3.84)给出的条件显然是太严格了。

如果量化台阶满足下面的条件，则斜率过载现象是可以忽略不计的[deJager, 1952]

$$\delta \geqslant \frac{2\pi 800 W_p}{f_s} \tag{3.88}$$

式中，W_p指输入语音波形 $w(t)$的峰值(这是基于这样一个事实，即 VF 信号中处于中间频率 800 Hz 左右的信号成分占主导地位)。由式(3.88)和式(3.85)，可得在输入为 VF 类型的信号时 DM 系统的 S/N 值为：

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = \frac{\langle w^2(t)\rangle}{N} = \frac{3f_s^3}{(1600\pi)^2 B}\left(\frac{\langle w^2(t)\rangle}{W_p^2}\right) \tag{3.89}$$

式中，B 为语音信号的带宽，$(\langle w^2(t)\rangle/W^2)$ 为输入语音信号的平均功率与峰值功率之比。

上述结果可以用于设计 VF 增量调制系统。例如，假设所需的 SNR 至少为 30 dB，另外假定 VF 信号的带宽为 4 kHz，并且信号的平均功率与峰值功率之比为 1/2。于是，由式(3.89)可知，所需的抽样速率为 40.7 kbps，或者$f_s = 10.2B$。将这种 DM 系统与具有相同带宽(即比特率)的 PCM 系统进行比较是一件很有趣的事情。每个 PCM 码字所需的比特数 n 由 $R = (2B)n = 10.2B$ 决定，即 $n \approx 5$。那么，具有相同带宽的 PCM 系统的平均信号与量化噪声功率之比为30.1 dB(见表 3.2)。于是，在上述条件下，具有相同带宽的 PCM 系统与 DM 系统的 SNR 性能近似相同。此外，重复上述过程可知，如果所需的 SNR 值大于 30 dB，则 PCM 系统的 SNR 值将大于具有相同带宽的 DM 系统。另一方面，如果系统所需的 SNR 值小于 30 dB，则 DM 系统的性能优于(即具有更大的 SNR 值)相同带宽的 PCM 系统。注意，DM 系统的 SNR 值按照f_s^3的关系增大，即f_s每增大一倍，SNR 增大 9 dB。

也可以利用双重积分取代单重积分的方法来提高 DM 系统的 SNR 性能。在具有双重积分的 DM 系统中，SNR 值按照f_s^5的关系增大，即f_s每增大一倍，SNR 增大 15 dB[Jayant 和 Noll, 1984]。

3.8.2 自适应增量调制与连续可变斜率增量调制

当将颗粒噪声维持在一个可以接受的范围内时，为了减小斜率过载噪声，可以采用自适应增量调制(ADM)。在这种编码方式中，随着输入波形的变化，量化台阶是时间的函数。量化台阶开始保持在一个比较小的值上以减小颗粒噪声，直到斜率过载噪声开始占主导地位，然后量化台阶开始增大以减小斜率过载噪声。量化台阶的大小是可以自动调节的，例如，可以通过检测发送机输出端的 DM 脉冲来调整量化台阶的大小。当发送端输出的 DM 信号中包含一串具有相同极性的脉冲时，量化台阶将不断增大(见图 3.32)直到输出的 DM 脉冲的极性反转，接着量化台阶开始下降，如此往复。表 3.7 中列出了调整量化台阶时的一种可能算法，这里量化台阶的值以离散的方式变化着。当输出的 ADM 信号为交替的 1 和 0 时，或者出现连续的两个 1 或 0 时，量化台阶设为正常值δ。然而，如果输出的 ADM 信号中出现连续的三个 1 或 0 时，则量化台阶增大到 2δ；如果出现连续的四个 1 或 0，则量化台阶增大到 4δ。这种 ADM 系统的方框图如图 3.34 所示。

表 3.7 量化台阶算法

数据序列[a]				连续出现的二进制码元 1 或 0 的数目	量化台阶算法，$f(d)$
X	X	0	1	1	δ
X	0	1	1	2	δ
0	1	1	1	3	2δ
1	1	1	1	4	4δ

[a] X 表示该位可以取任何值。

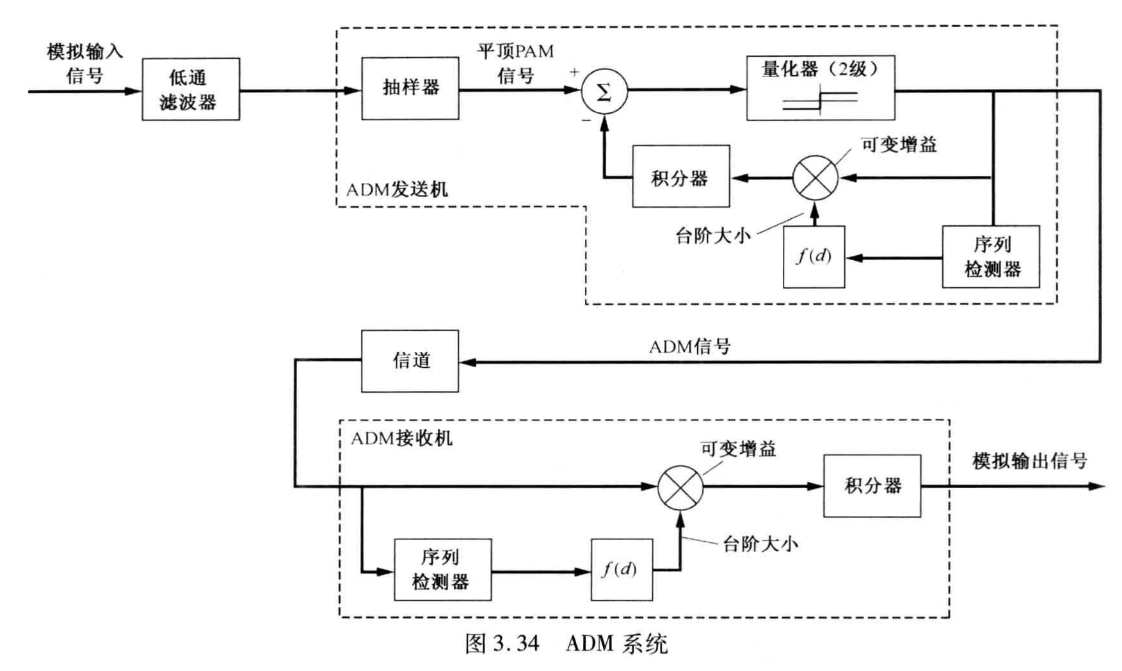


图 3.34　ADM 系统

当语音信号通过数字系统发送和接收时，有许多论文给出了采用 ADM 和其他数字技术时系统性能的试验记录[Jayant, 1974; Flanagan 等 1979]。ADM 技术的另一种变形是连续可变斜率增量调制(CVSD)，这里使用积分器替代 ADM 中的累加器，所以 $z(t)$ 是连续可变的，而不是像图 3.32(a)所示的那样离散跳跃。

大家可能会问这样问题：哪一种系统更好，PCM 还是 DM？当然，答案取决于比较的准则和需要传输的消息类型。如果设计的目标是获得一个成本相对较低的系统，则增量调制将是最佳的选择。然而，由于 ADC 芯片成本的不断下降，这将不是一个关键性的问题。如果设计的准则是获得高的输出 SNR，则 PCM 可能是最佳的选择[O'Neal, 1966a]。如果需要与现有的设备互联互通，则兼容性应该是首先要考虑的问题。在这一方面，PCM 具有优势，因为它是最早被采纳的标准，并且现在已有广泛的应用。

3.8.3　语音编码

数字语音编码器可以分为两大类：波形编码器和声码器。波形编解码器采用特定的算法对语音信号进行编码和解码，使得系统输出的波形尽可能逼近输入波形。声码器通过提取一组参数对语音信号进行编码，然后将这组参数数字化并传送出去。在接收端，利用收到的信息设置函数发生器和滤波器的参数，然后反过来合成语音信号输出。通常，声码器的输出波形并不逼近于输入波形，并且合成的语音听起来不太自然，尽管可以清楚地理解说话者所说的话，但是很难分辨出说话者是谁。对于波形编码器(例如 PCM、DPCM、DM 与 CVSD)，已经证明 VF 质量的语音信号最低能够以 24 kbps 的比特率进行编码。更先进的技术可以将所需的比特率降低到 8 kbps，甚至以 2 kbps 的比特率进行语音编解码也是可能的。为了获得低比特率的编解码器，可以采用的技术有线性预测(在 DPCM 中已有讨论)、自适应子带编解码以及矢量量化。自适应子带编解码按照语音的谱和听觉特征来分配比特数目。在矢量量化中，一次对一组样本进行编码，而不是对样本逐个地进行编码。采用这种技术的例子有码激励线性预测(CELP)编码及矢量和激励线性预测(VSELP)编码，它们用于数字蜂窝电话系统中，相关内容将在 8.8 节中讨论。

这些编码器都采用基于线性预测的分析和合成(LPAS)技术，它们将说话者的语音信号分成20 ms的段，以便进行分析和合成。接着编码器通过搜索码本激励图和滤波器参数的可能值，找出与语音分段最为匹配的合成波形。然后将规定这一最佳匹配编码器的参数以数据的方式发送到接收端。接收端利用收到的数据设置本地的语音合成器的参数，从而重建出语音信号。

人们力求使用更低比特率的编解码器的目的是为了减小数据传输的成本。然而，更低比特率的编解码器通常在计算上有着更高的复杂度，从而导致系统输出端重建的语音存在着更大的时延，并且语音质量更差。(有关语音编码器更详细的分析内容，请参考相关的参考文献[Gershio，1994；Spanias，1994；Budagavi 和 Gibson，1998]。)

3.9 时分复用[①]

定义 时分复用(TDM)是将来自几个信源的抽样值按时间顺序交织在一起，从而使得这些信源的信息可以在单个通信信道上串行传输。

图3.35示出了TDM的概念，图中的系统是将3个模拟信源复用到了一个PCM系统上。为了讨论方便，图中既给出了模拟输入的自然抽样，还给出了相应的门控TDM PAM波形。实际系统中，常用电子开关实现复接(抽样器)功能。本系统中，TDM PAM信号的脉冲宽度为$T_s/3=1/(3f_s)$，TDM PCM信号的脉冲宽度为$T_s/(3n)$，其中n为PCM码字中所用的比特数。这里$f_s=1/T_s$指复接器旋转的频率，对带宽最大的模拟信源，f_s仍满足奈奎斯特速率条件。在某些信源的带宽有着显著差别的应用中，具有较大带宽的信源可以连接到抽样器的几个开关位置上，使得它们比带宽较低的信源更多地被抽样到。

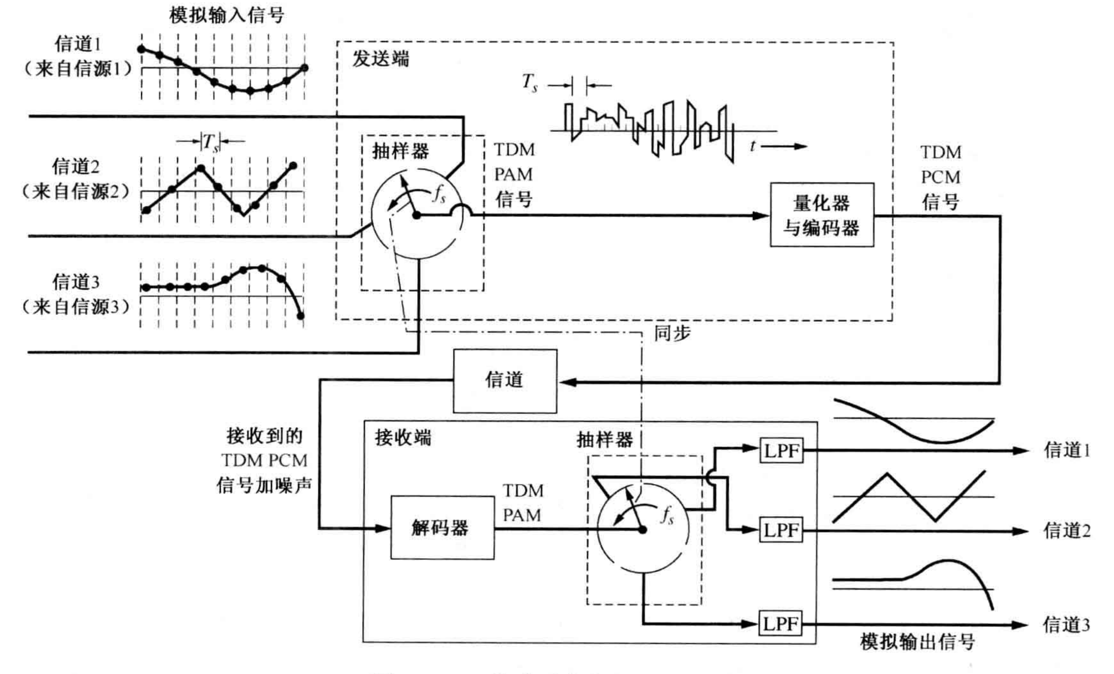


图3.35 3信道时分复用PCM系统

① 在这种方法中，许多用户共享一个公共信道或系统。其他的共享公共通信系统的方法将在8.5节中讨论多址技术时介绍。

在接收端，需要使分接器(抽样器)同步于输入的波形，从而保证能正确地进行分接，这称为帧同步。帧同步保证了对应于信源1的PAM样本将出现在信道1的输出端。低通滤波器用于从PAM样本中重构模拟信号。尽管系统维持着精确的位同步和帧同步，但是由于不理想的信道滤波特性引起的ISI将造成一个信道上的PCM样本出现在另一个信道上。通常称一个信道上的信号耦合到另一个信道上去的现象为串话。

3.9.1 帧同步

TDM接收端需要帧同步，以便能正确地将接收到的复用数据分类，并传送到相应的输出信道上。可以通过以下两种方法向接收端的分接器提供帧同步信号：发送端通过一个单独的信道传输帧同步信号；从TDM信号本身提取帧同步信号。因为第一种方法的实现过程显而易见，所以我们将集中精力讨论第二种方法。由于无需单独的信道，所以第二种实现方法具有更好的经济性。如图3.36所示，在具有N个信道的TDM系统中，可以将帧同步信号与信息字复用在一起传输，即在每帧的开始处传送一组特别的K位同步码。如图3.37所示，利用帧同步电路将再生的TDM信号与同步码$\mathbf{s}=(s_1, s_2, \cdots, s_K)$进行互相关运算，可以从受污染的TDM信号中恢复出帧同步信号。同步码向量$\mathbf{s}$的各元素记为s_1, s_2, ⋯, s_j, ⋯, s_K，是二进制码元1或0(对于TTL逻辑而言，二进制码元的1和0分别由+5 V和0 V表示)。再生TDM信号的当前位在时钟信号的驱动下进入移位寄存器的第一级，接着在下一个时钟脉冲到来时移入移位寄存器的下一级，所以再生的TDM信号最近的K个比特总是保存在移位寄存器中。移位寄存器下方的三角形中的s_j表示是否出现反相器，即如果s_j是二进制码元0，则移位寄存器的第j个输出引脚需要反相器；如果s_j是二进制码元1，则无需反相器。“符合检测器”是一个具有K个输入端的与门(AND)电路。

如果同步码出现在移位寄存器的各级中，则“符合检测器”的所有输入端均为二进制1码元，这时“符合检测器”的输出为二进制的码元1(即高电平)。否则，“符合检测器”的输出为二进制码元0(即低电平)。这样一来，仅当在T_b秒的时间间隔内，同步码字正确地排列在移位寄存器中时，“符合检测器”的输出才变为高电平。于是，帧同步器就恢复出了帧同步信号。

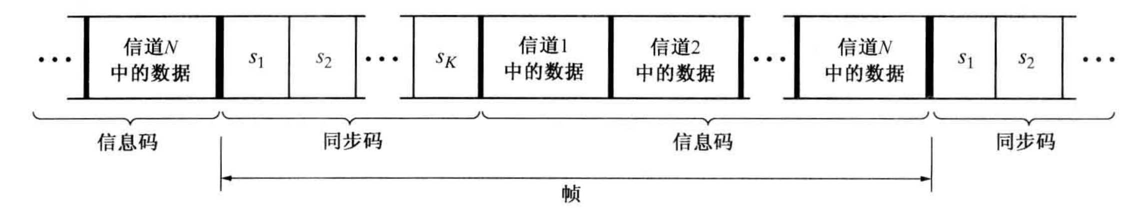


图3.36 TDM帧同步格式

如果连续的K个信息位碰巧与帧同步码相同，则将出现假帧同步脉冲。对以相同的概率出现码元1和0的二进制TDM数据流来说，发生假帧同步脉冲的概率等于数据流中出现同步码的概率，即：

$$P_f=\left(\frac{1}{2}\right)^K=2^{-K} \tag{3.90}$$

在设计帧同步器时，可以利用上式确定同步码所需的比特数K，使得出现假帧同步的概率符合相应的规定。另外，也可以采用更复杂的技术，例如孔径窗口技术，来减小出现假同步的概率[Ha, 1986]。此外，还可以对信息位进行编码，使得信息码流中不出现与同步码相同的比特串。

因为“符合检测器”的输出是同步码与储存在移位寄存器中的TDM数据最近的K个比特的互相关值，所以选择的同步码的自相关函数$R_s(k)$应具有下面的性质，即$R_s(0)=1$，且当$k\neq0$时，$R_s(k)\approx0$。伪噪声(PN)(将在5.13节中讨论)序列具有这种几乎理想的性质。例如，如果允许的假同步概率为$P_f=4\times10^{-5}$，则由式(3.90)可以得到需要$K=15$位的同步码。也就是说，接收机中的帧同步电路需要15级的移位寄存器。发射机中利用4级移位寄存器便可以产生15位的PN同步码。

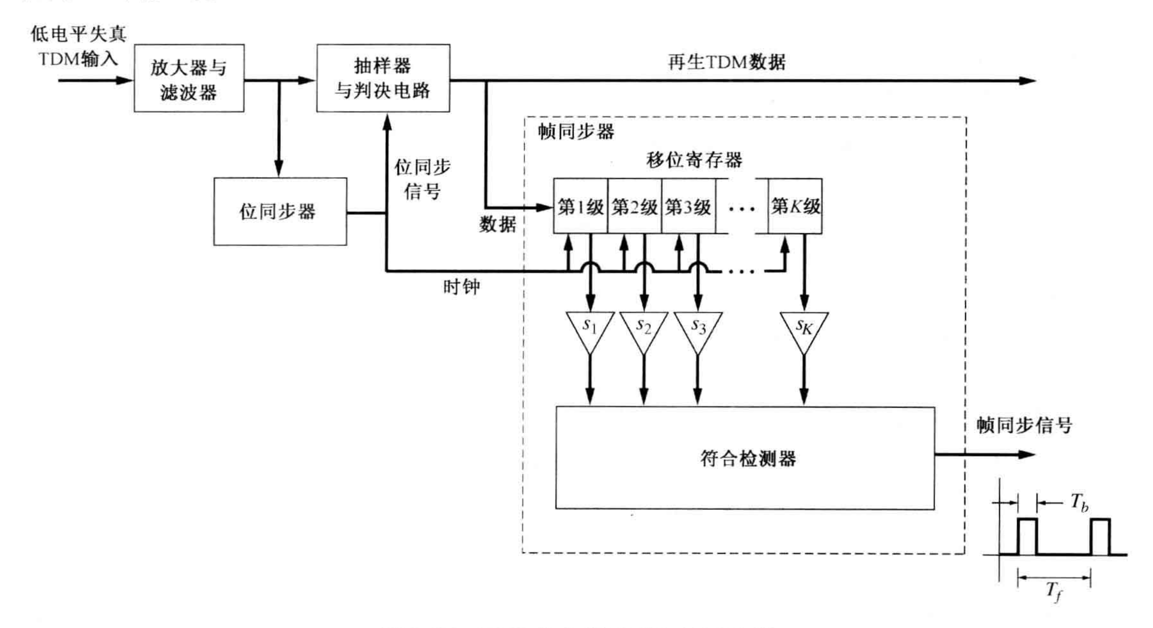


图3.37 TDM接收机前端的帧同步器

3.9.2 同步与异步线路

就位同步而言，传输系统可以设计成在同步或者异步串行数据线下工作。同步系统中，每个设备的内部时钟电路在相当长的一段时间内都具有相对的稳定性，并且各个设备的时钟同步于系统的主时钟。每一位数据都在同步于主时钟的定时脉冲的驱动下进行传输。同步信号既可以通过单独的线路传输，也可以内嵌在数据信号中(例如采用曼彻斯特线路码)。另外，同步传输还需要更高一级的同步，以允许接收机确定一组数据的开始与结束，这是通过采用前面讨论的帧同步来实现的。

异步系统中，定时仅仅对每个符号(或码字)内部的各个比特是精确的。因为每个符号都包含一位启动接收机时钟的“起始位”和一到两位停止接收机时钟的“终止位”，所以也称这种定时信号为起止信号。通常，当信号的速率低于300 bps时，采用两位“终止位”；而当$R>300$ bps时，采用一位“终止位”。于是，对于异步数据线路而言，接收机中的时钟是非周期启动的，并且无需同步于主时钟。通常，接收机中的时钟频率都足够精确，以维持在一个码字的持续时间内有正确的比特定时。对于键盘一类的终端，因为打字员不可能均匀地键入字符，并且键入字符的速率远远低于数据通信系统的传输速率，所以这种非周期性的操作模式是非常理想的。这些异步终端常常使用7位ASCII码。一个完整的字符中包含有一位“起始位”、7位ASCII码、一位奇偶校验比特和一个“终止位”(在$R\geq300$ bps时)，从而使得总的字符长度为10比特。在异步TDM系统中，来自不同信源的数据以字符为单位进行交织，而不是以比特为单位进行交织。

因为同步传输系统无需起止位，所以它具有更高的效率。然而，同步传输模式需要将定时信号与数据一起传送到接收端，并且接收机要同步于这一定时信号。

来自于不同的终端或信源的数据可以利用“智能”TDM 系统集中起来，这种 TDM 系统能够提供速率、码型与协议的转换。在大型计算机的输入端，称这样的 TDM 系统为前端处理机，它们的硬件通常由微型机或小型机组成。通常，当出现数据时，“智能”TDM 系统以“悬空”的方式连接至数据输入线，而在无数据出现时，它们暂时性地与数据输入线断开。例如，当键盘上无任何活动时，它与系统是断开的(尽管对于用户来说，它在物理上并没有与系统断开)，而当需要发送一个字符或者一组数据时，它又重新连接至系统上。于是，复接器输出的数据速率远远低于所有数据输入线传输能力之和。这种技术称为统计复用，它允许更多的终端在线地连接在系统之上。

复接器可以分成以下三种类型。第一类 TDM 型的复接器可以连接至同步线上。第二类 TDM 型的复接器可以连接至准同步线上，此时，输入数据源各自的时钟在频率上并不是准确同步的，所以来自不同信源的数据在比特率上存在着一些抖动。另外，在某些应用中，输入数据流的时钟速率并非是一个合理的值。在这种情况下，TDM 输出信号必须以大于正常值的时钟速率进行定时，以适应不同步输入的数据。当定时脉冲到来时，如果复接器中没有新的输入比特(由于不同步的缘故)，则将在 TDM 输出数据流中插入填充比特。图 3.38 示出了位交织复接器中所采用的填充策略。填充比特可以是二进制码元 1、0 或者某种交替的码型，具体取决于系统设计者的选择。第三类 TDM 型的复接器可以连接至异步信源，以得到高速的异步输出(无需填充比特)或者高速的同步输出(需要填充比特)。

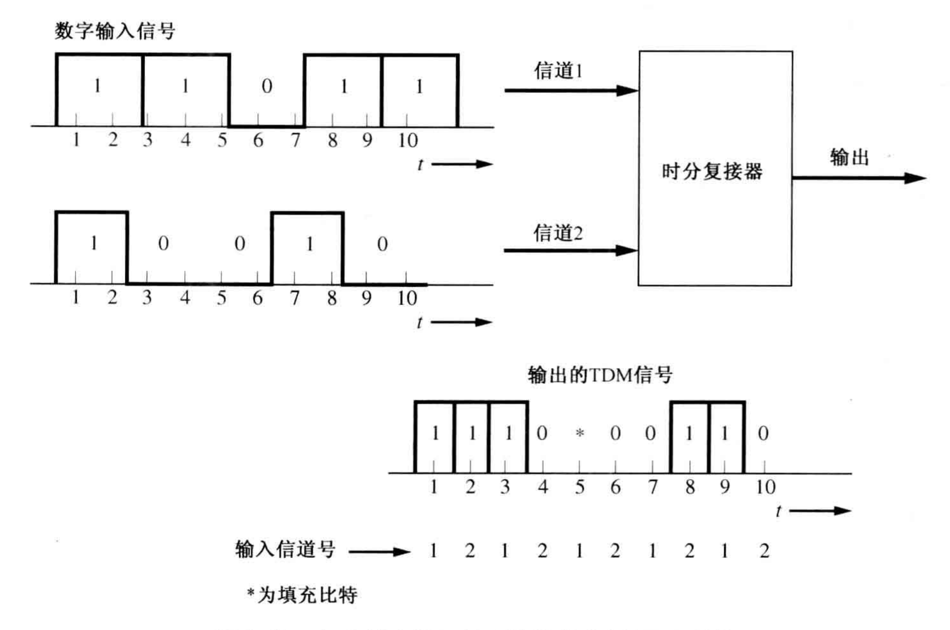


图 3.38　具有填充脉冲的两信道位交织 TDM 系统

例题 3.17　时分复接器的设计

设计一个可以容纳 11 个信源的 TDM 复接器，假设各信源具有以下特性：

信源 1：模拟信号，2 kHz 带宽。

信源 2：模拟信号，4 kHz 带宽。

信源 3：模拟信号，2 kHz 带宽。

信源 4 ~ 11：数字信号，同步于 7200 bps。

现在假设将模拟信源转换为 4 比特的 PCM 码，并且为了简单起见，进一步假定系统通过单独的信道提供帧同步信号以及采用同步 TDM 线路。为了满足奈奎斯特速率，模拟信源 1、模拟信源 2 和模拟信源 3 分别需要以 4 kHz、8 kHz 和 4 kHz 的频率抽样。如图 3.39 所示，这可以通过让转接器以 $f_1=4$ kHz 的速率旋转并且每次旋转对信源 2 抽样两次来实现。此时，转接器输出端将产生 16 千样本/秒的 TDM PAM 信号，由于每个模拟样本值转换成了 4 比特的 PCM 码，所以 ADC 输出的 TDM PCM 信号的速率为 64 kbps。再利用第二个以 $f_2=8$ kHz 的速率旋转的转接器，可以使 ADC 输出的数据与来自数字信源的数据混合在一起。此时，64 kbps 的 PCM 信号占用转接器 16 个接线柱中的 8 个，这种连接可以提供 64 kbps 的有效抽样速率。转接器剩下的 8 个接线柱分别由 8 个数字信源占用，为每个数字信源提供 8 kbps 的数据传输速率。因为来自数字信源的数据流的速率为 7.2 kbps，所以需要插入填充脉冲以将数据速率提高到 8 kbps。

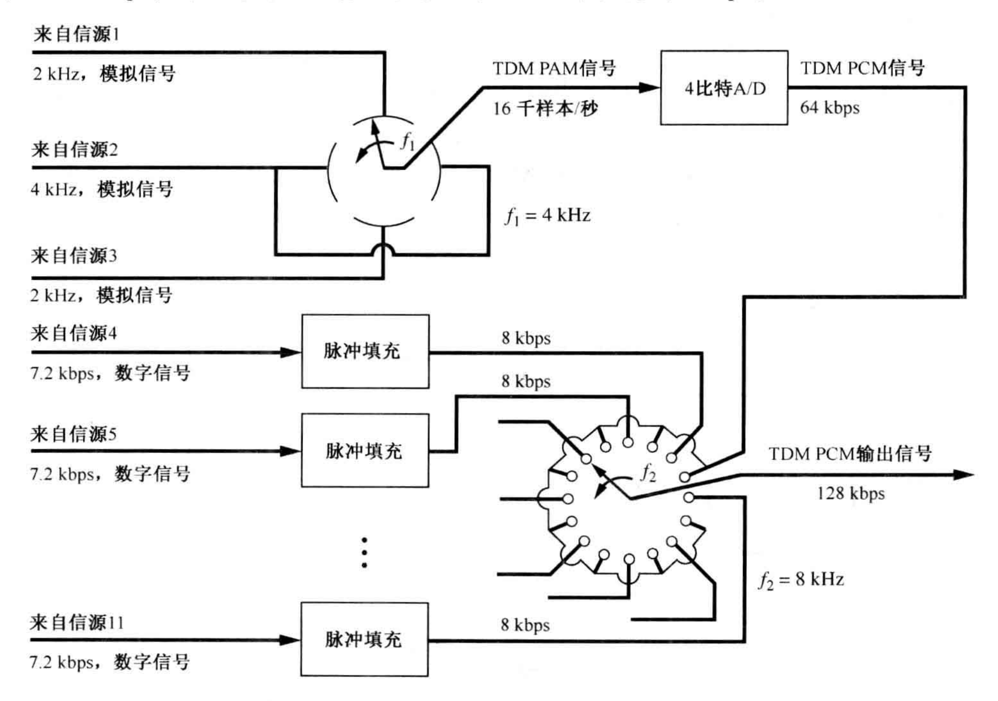


图 3.39 例题 3.17 描述的具有模拟和数字信号输入的 TDM 系统

上述的例题表明了 TDM 系统的主要优点是：它可以容易地复接模拟信源和数字信源。但遗憾的是，如果不减少模拟信号转换成数字信号过程产生的冗余的话，那么这些信号将会占用数字系统的绝大部分传输容量。

3.9.3 TDM 体系标准

实际系统中，TDM 可以分成两大类。第一类 TDM 系统由与数字计算机系统一起使用的复接器组成，复接器用于将来自几个信源的数字信号混合起来以便在高速线路上以 TDM 方式传送到主机。这类复接器的输出速率已经被标准化成 1.2 kbps、2.4 kbps、3.6 kbps、4.8 kbps、7.2 kbps、9.6 kbps、14.4 kbps、19.2 kbps 与 28.8 kbps，直到 10 Mbps 与 100 Mbps。

第二类 TDM 系统被公共传媒公司[例如美国电话与电报公司(AT&T)]所采用，系统将不同

信源的数据组合成高速数字 TDM 信号，以便在收费网络上传输。但遗憾的是，北美和日本采用了不同于世界上其他地方所采用的标准。AT&T 公司最早采用了北美和日本的标准，而 ITU 下属的 CCITT 则采用了另一种标准。图 3.40 给出了北美的 TDM 体系标准[James 和 Muench, 1972][①]。电话工业界已经将此体系标准的传输比特率标准化成了 1.544 Mbps、6.312 Mbps…等系列，并用 DS-1 代表数字信号类型 1，DS-2 代表数字信号类型 2，等等，如表 3.8 所列。在图 3.40 中，假定所有的输入线都为数字(二进制)流，图中圆括号里的数字为可以用这些数字信号来表示的音频(VF)模拟信号的数量。高次群复接器的输入并不都是低次群复接器的输出。例如，一路模拟电视信号可以直接转换成 DS-3 数据流(44.73 Mbps)。类似地，DS 数据流可以承载来自不同信源的混合信息，这些信源包括视频、音频和计算机等。

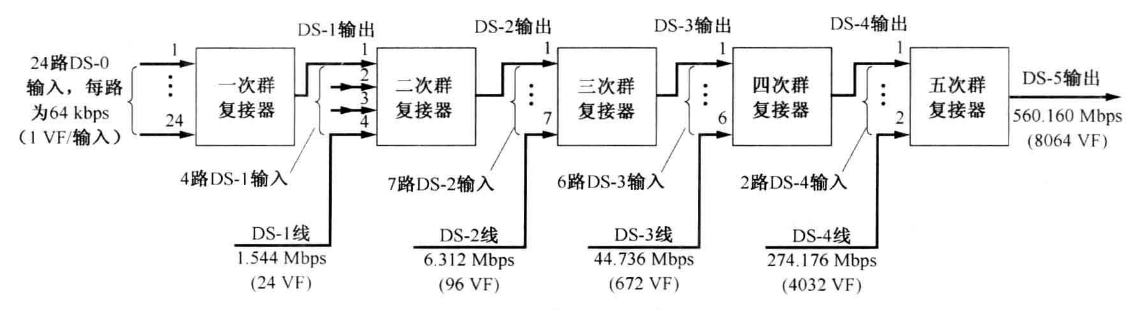


图 3.40 北美数字 TDM 体系标准

使用何种传输媒介承载各次群取决于所要传输的是几次群以及在特定的地区使用特定媒介的经济性(见表 3.8)。例如，高次群可以通过同轴电缆或光缆传输，也可以通过无线微波或卫星传输。单个 DS-1 信号通常在一对双绞线上传输。(每对双绞线用于一个方向上的传输。)通常称这类利用双绞线对传输 DS-1 信号的系统为 T1 载波系统(从 1962 年 AT&T 公司开始开发它时就有此称呼)[Andrews, 2011]。在 T1 系统上传输 DS-1 信号非常流行，这是因为 T1 系统的成本相对比较便宜并且有着很好的维护记录(在下一节将更详细地讨论 T1 系统)。表 3.9 列出了 T 载波数字基带系统的标准。表 8.2 与表 3.9 类似，只不过前者列出的是公共载波带通系统的传输能力。与 T1 系统对应的 CCITT TDM 标准如图 3.41 所示，这一标准广泛应用于除北美和日本以外的世界其他地区[Irmer, 1975]。

表 3.8 北美 TDM 标准

数字信号编号	比特率，R(Mbps)	64 kbps 的 PCM VF 信道数目	所用的传输媒介
DS-0	0.064	1	双绞线
DS-1	1.544	24	双绞线
DS-1C	3.152	48	双绞线
DS-2	6.312	96	双绞线，光缆
DS-3	44.736	672	同轴电缆，无线，光缆
DS-3C	90.254	1344	无线，光缆
DS-4E	139.264	2016	无线，光缆，同轴电缆
DS-4	274.176	4032	同轴电缆，光缆
DS-432	432.000	6048	光缆
DS-5	560.160	8064	同轴电缆，光缆

① 对于一次群和二次群而言，日本的 TDM 体系标准与北美的是相同的，但是在三次群、四次群和五次群上，两者是不同的。对于三次群，日本的标准为 32.064 Mbps(480 VF)；四次群为 97.728 Mbps(1440 VF)；五次群为 397.200 Mbps(5760 VF)。Jacobs 简单地讨论并总结了各种标准之间的不同点[1986]。

表 3.9 T 载波基带数字传输系统标准

系统	比特率(Mbps)	系统容量		媒介	线路码	中继距离(英里)	系统最大距离(英里)	系统误码率
		数字信号编号	语音信道数					
T1	1.544	DS-1	24	双绞线	双极性 RZ	1	50	10^{-6}
T1C	3.152	DS-1C	48	双绞线	双极性 RZ	1	—	10^{-6}
T1D	3.152	DS-1C	48	双绞线	双重二进制 NRZ	1	—	10^{-6}
T1G	6.443	DS-2	96	双绞线	四进制 NRZ	1	200	10^{-6}
T2	6.312	DS-2	96	双绞线[a]	B6ZS[b] RZ	2.3	500	10^{-7}
T3	44.736	DS-3	672	同轴电缆	B6ZS[b] RZ	c	c	c
T4	274.176	DS-4	4032	同轴电缆	极性 NRZ	1	500	10^{-6}
T5	560.160	DS-5	8064	同轴电缆	极性 NRZ	1	500	4×10^{-7}

[a] 当中继距离为 12 000 英尺时，需要专用的双线电缆。因为 T2 系统不能够使用标准的交换电缆，所以它没有 T1 系统那么通用。

[b] BnZS 指二进制 n 连 0 替代码，这里用特定的 3 进制码替代双极性线路码中的 n 连 0 长串，以便能够维持同步[Fike 和 Friend，1984；Bic，Duponteil 和 Imbeaux，1991]。

[c] 只用于中心电话局，以构建高次群，并不用于局与局之间的传输。

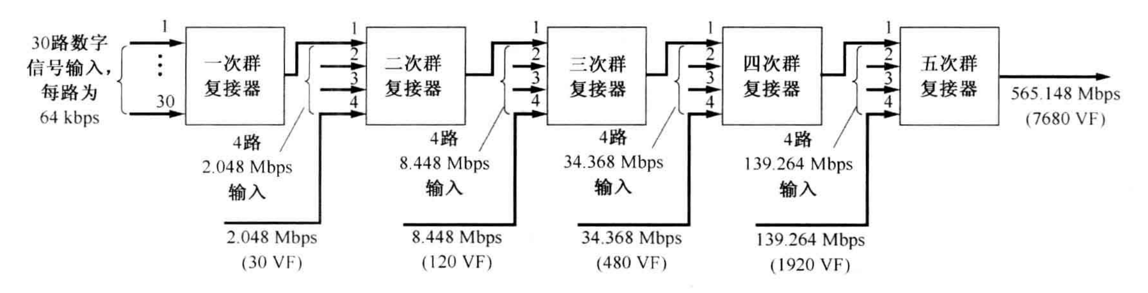


图 3.41 CCITT 数字 TDM 体系标准

随着高比特率光纤通信系统的不断发展，起初的 TDM 标准很显然已经不能满足新的需求了。Bellcore(Bell 通信研究中心)大约在 1985 年提出了一种新的 TDM 标准，称之为同步光网络(SONET)。1989 年 CCITT 采纳了这一标准，使之发展成为了一个国际上的通用标准。表 3.10 列出了这种 SONET 标准。OC-1 信号是一种光信号，它是线速率为 51.84 Mbps 的二进制电信号对激光源进行调制所形成的，称这种二进制电信号为同步传输信号——一次群(STS-1 信号)。其他 OC-N 信号的线速率正好是 OC-1 速率的 N 倍，并且是由 STS-N 电信号对激光源进行调制所形成的。STS-N 信号是通过将 N 路 STS-1 信号进行字节交织(扰码)获得的(在 8.7 节中将给出有关光纤通信系统更多的细节)。

表 3.10 SONET 信号体系标准

OC 等级	STS 等级	线速率(Mbps)	等效话路数		
			DS-3s	DS-1s	DS-0s
OC-1	STS-1	51.84	1	28	672
OC-3	STS-3	155.52	3	84	2016
OC-9	STS-9	466.56	9	252	6048
OC-12	STS-12	622.08	12	336	8064
OC-18	STS-18	933.12	18	504	12 096
OC-24	STS-24	1244.16	24	672	16 128
OC-36	STS-36	1866.24	36	1008	24 192
OC-48	STS-48	2488.32	48	1344	32 256
OC-192	STS-192	9953.28	192	5376	129 024
OC-768	STS-768	89 813.12	768	21 504	516 096
OC-3072	STS-3072	159 252.48	3072	86 016	2 064 384

电话工业界还提供了一种全数字网络，它将语音和数据集成在一起，并在每个用户和电话公司设备之间的单路电话线上传输。其中一种方法称为综合业务数字网(ISDN)；另一种方法就是被称为 G. Lite 的数字用户线(DSL)技术，它在单路双绞线上为用户提供“永远在线”的 1.5 Mbps速率的数据通路(用于 Internet 接入)和标准的 VF 电话信号通道(有关这些技术的细节，请参阅8.3节)。

3.9.4　T1 PCM 系统

对于电话语音业务，图3.40中的一次群 TDM 复接器将由 TDM PCM 系统取代，它将24路 VF 模拟电话信号转换成1路 DS-1(1.544 Mbps)数据流。用 AT&T 公司的术语来说，这称为 D 型信道组或者数字载波中继(DCT)单元。T1 线路是一种双绞线电话线，用于承载 DS-1(1.544 Mbps)数据流，系统中采用两路双绞线，一路用于信息的发送，另一路用于信息的接收。如果利用 T1 线路连接两个位于不同地点的电话设备，则大约每隔1英里就需要一个中继器。

T1 系统是由 Bell 实验室开发的，用于 VF 业务的近程数字通信，最大传输距离为50英里。24路 VF 模拟信号中的每一路都采用8 kHz 的抽样速率，这意味着每帧的长度为1/(8 kHz) = 125 μs，如图3.42所示。目前，每个模拟样本通常编为一个8比特的 PCM 码字，所以每帧有 8×24 = 192 个比特数据，加上用于帧同步的一个比特，总共为193比特。于是，T1 数据速率为(193 比特/帧)×(8000 帧/秒) = 1.544 Mbps，对应的每个比特的持续时间为0.6477 μs。信令是组合在 T1 帧格式中进行传输的，每隔6帧，用信令比特取代 T1 信号24路信道中每路的第8位(最低位)。所以，24路信道每路的信令数据速率为(1 比特/6 帧)×(8000 帧/秒) = 1.333 kbps。用于偶数帧的成帧位跟随在序列001110之后，而用于奇数帧的成帧位跟随在序列101010之后，所以可以分辨出在第8位(每路信道)上具有信令信息的帧。T1 线路上的数字信号是由双极性 RZ 波形(见图3.15)表示的，接100 Ω 的负载时其峰值电平为±3 V。这样一来，无论数据序列如何，T1 线路上都不存在直流成分。在对 VF PAM 样本进行编码时，采用了本章前面讨论的$\mu = 255$的压缩特性。因为 T1 系统的数据速率为1.544 Mbps，线路码是双极性的，故第一零点带宽为1.544 MHz，功率谱的峰值出现在频率772 kHz 处，如图3.16(d)所示。如果信道滤波器的传递函数是升余弦滚降类型的，且$r = 1$，则信道的绝对带宽将为1.544 MHz。在以前，当双绞线仅用于模拟信号的传输时，常常使用加感线圈(电感器)以改善信道的频率(幅度)响应。但这会使得信道具有非线性的相位响应，从而引入 ISI。所以，当用这些线路来承载 T1 业务时，必须将加感线圈去掉。

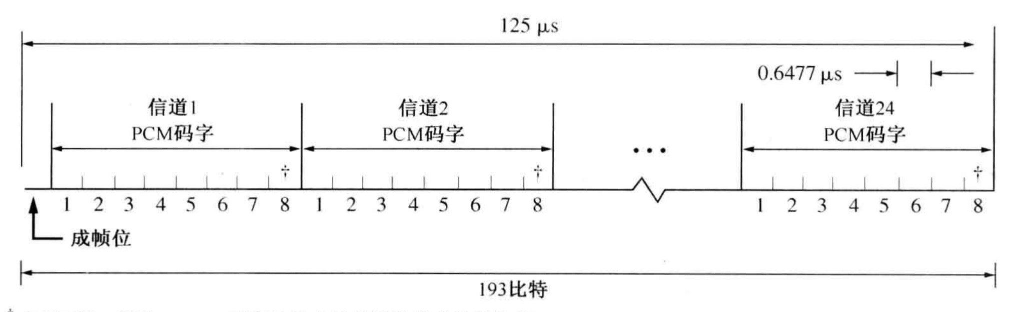


图3.42　T1 系统 TDM 帧格式

表3.9中给出了 T1G 标准，它使用 $M = 4$ 进制的极性 NRZ 信号，而不是二进制信号。这里，

用+3 V表示二进制比特11，+1 V表示01，-1 V表示00，-3 V表示10[Azaret等，1985年]。于是，可以通过3.221 Mbaud的信号获得6.443 Mbps的数据速率，其零点带宽为3.221 MHz，这近似于T1C系统3.152 MHz的零点带宽。使用标准的双绞线(每个方向上用一对)且每隔1英里设置一个中继器，就可以支撑这一带宽。

光纤系统有着更大的带宽，并且每信道的成本也相对低廉。例如，FT-2000光纤TDM系统(见表8.2与表8.6)具有32 256路VF信道的容量，WaveStar系统则具有625万路VF信道的容量。

3.10 分组传输系统

TDM是一种同步传递模式(STM)技术。也就是说，每个数据源都被分配了一个特定的时隙，并且有着不变的(固定的)数据速率。在许多应用中，因为当信源没有任何数据需要发送时，必须插入填充比特以与分配的数据速率相匹配，所以固定的数据速率分配在成本上是不经济的。例如，用户或许会发送一个较大的文件(此时需要较大的数据速率)，接着键入一些参数(此时只需要较低的数据速率)。STM系统并不能有效地适应这种具有突发性的数据源，而分组系统却可以有效地满足这些要求。

分组传输系统将来自信源的数据进行分组，每个分组都有一个分组头，它包含该分组的目的地址。通过将许多用户的分组合并成一个高速数据流，使得这些用户可以共享一个高速信道。网络中的路由器读出分组头中的地址信息，并将它们发送到恰当的目的地。为了适应高速率的信源，在给定的时间间隔内，网络将发送更多的来自这些信源的分组，相比较而言，对于低速率的信源则只有少量的分组进入网络。

当信源具有突发性数据时，分组网络可以有效地分配网络资源。然而，由于需要传输分组头信息，所以增加了网络的开销。当信源具有固定的数据速率(即信源没有突发性业务)时，STM网络的传输效率更高。

需要强调的是，与采用电路交换方式的传输系统(例如3.9节中讲述的TDM)相比，采用分组交换方式的传输系统(例如使用Internet协议的互联网)应用越来越广泛。未来经济的电话传输系统是采用VoIP(将语音信号以IP数据包的形式在互联网中传输)的方式。

3.11 脉冲时间调制：脉宽调制与脉位调制

脉冲时间调制(PTM)是一类信号调制技术，它将模拟信号的样本值编码为数字信号时间轴上的信息。PTM类似于将在第5章中讨论的角度调制。(正如我们已经看到的那样，PAM、PCM与DM等技术是将样本值编码为数字信号的幅度特性。)

PTM的两种主要类型是脉宽调制(PWM)和脉位调制(PPM)(见图3.43)。PWM也称为脉冲持续期调制(PDM)。在PWM中，模拟波形的样本值用于确定脉冲信号的宽度。对模拟波形既可以采用瞬时抽样，也可以采用自然抽样，图3.44给出了采用瞬时抽样生成PWM信号的技术，而图3.45则给出了采用自然抽样生成PWM信号的技术。在PPM中，模拟样本值决定窄脉冲相对于定时时刻的位置，图3.44与图3.45同时也给出了生成PPM信号的技术。从图中可以看出，利用单稳态多谐振荡器电路可以简单地由PWM信号获得PPM信号。在某些有关PTM信号的著作中，也常常将图中的比较器电平V_r称为分界电平。

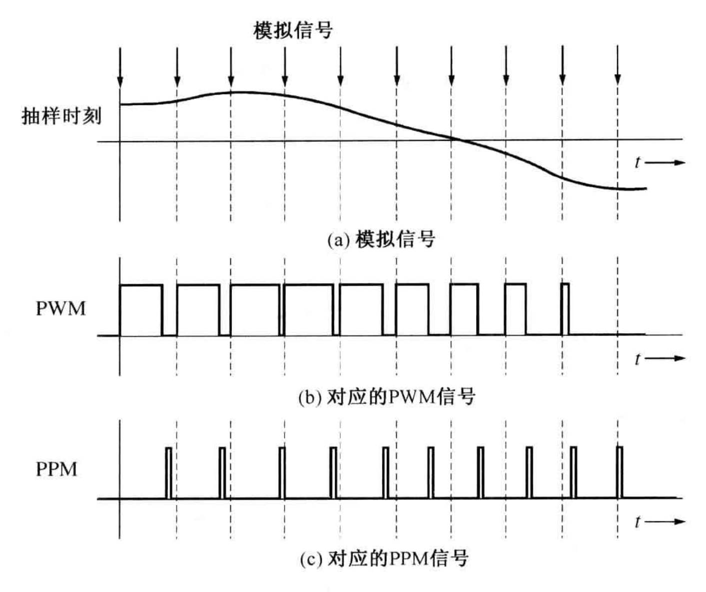


图 3.43　脉冲时间调制信号

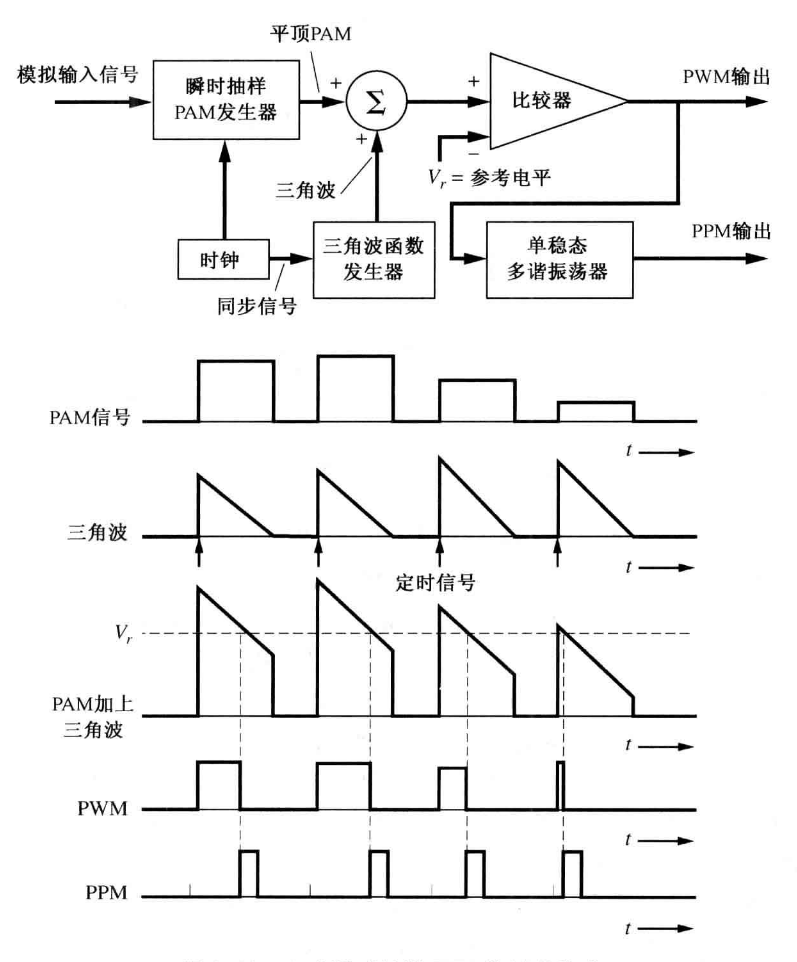


图 3.44　生成瞬时抽样 PTM 信号的技术

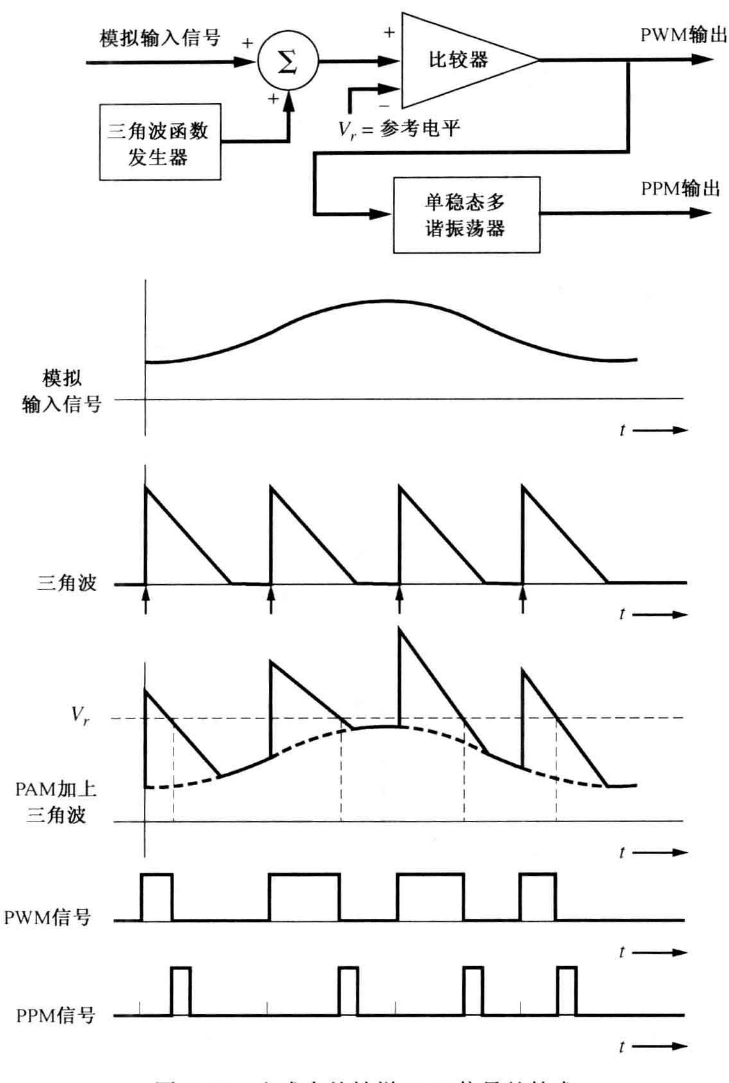


图 3.45　生成自然抽样 PTM 信号的技术

通过接收系统(见图 3.46)，可以将 PWM 信号或者 PPM 信号转换回对应的模拟信号。对 PWM 进行检测时，利用 PWM 信号去启动或停止积分器的积分。也就是说，积分器先复位到 0，当 PWM 脉冲由低电平变为高电平时，积分器开始积分，直到 PWM 脉冲重新变为低电平，积分器才停止积分。如果积分器的输入连接到一个恒压源上，则其输出将为去顶斜波。当 PWM 脉冲变为低电平之后，去顶斜波的幅度正好等于对应的 PAM 样本值。在定时时刻，利用抽样与保持电路将积分器的输出选通到 PAM 输出线上(稍微在积分器复位到 0 之前)。然后利用低通滤波器将 PAM 信号转换成模拟信号。同理，利用时钟脉冲复位积分器到 0 并且启动积分器，也可以将 PPM 信号转换成 PAM 信号，PPM 脉冲则用于停止积分器的积分，斜波的最终电平值就是用于再生模拟信号的 PAM 样本值。

脉冲时间调制信号并不常用于通信系统中，因为它需要较宽的信道带宽，特别是 PPM 信号。然而，在许多数字通信终端设备内部却常常可以发现 PTM 信号。由于 PTM 调制的非线性特征，所以要计算 PTM 信号的频谱是非常困难的[Rowe，1965]。PTM 信号的主要优点是相对

于 PAM 信号而言的，PTM 信号具有更好的抗加性噪声的能力，并且它比 PCM 信号更易于产生和检测，因为后者需要 ADC 电路。

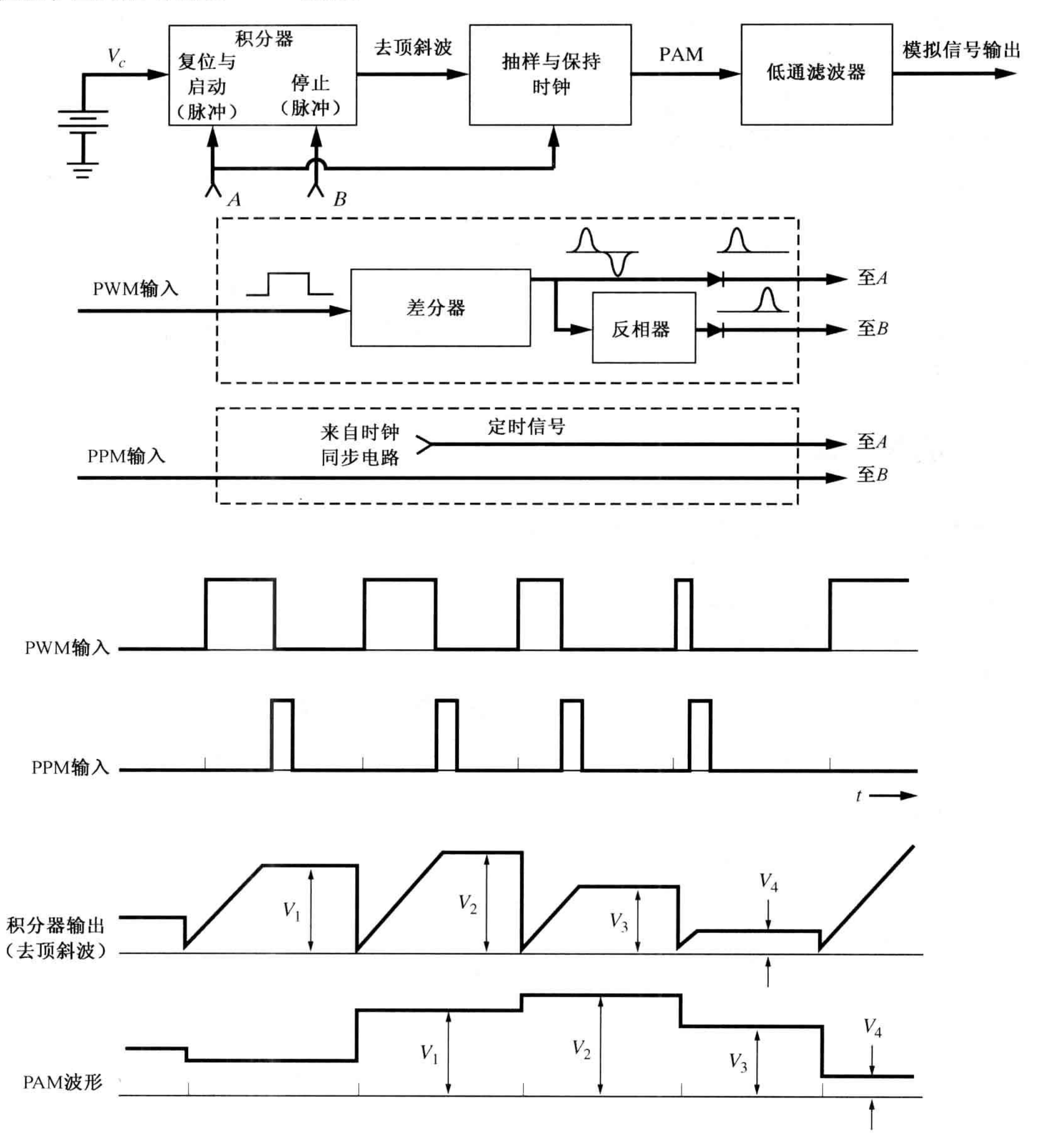


图 3.46　PWM 信号和 PPM 信号的检测

3.12　小结

在本章介绍数字基带信号的过程中，我们主要讨论了四个问题：(1)如何利用数字信号来表示模拟波形中的信息；(2)如何计算线路码的频谱特性；(3)由于通信信道的要求，需要对数字信号进行滤波，它是如何影响接收机对数字信号的恢复的[即码间串扰(ISI)问题]；(4)如何利用时分复用(TDM)技术将来自几个信源的信息组合成一路数字信号。同时我们还给出了 TDM 通信系统的北美标准和世界标准。

PCM 是一种模拟信号到数字信号的转换方式，它包含以下三个基本操作：(1)对带限模拟信号抽样；(2)将模拟样本量化成 M 个离散值；(3)将每个量化的样本值编码成 n 位二进制码字，其中 $M=2^n$。在接收机输出端恢复出的信号中存在以下两类噪声：(1)由于采用 M 个允许值逼近样本值所造成的量化噪声；(2)由于接收机中比特检测错误所引起的噪声，这是信道噪声或不恰当的信道频率响应引入的 ISI 所造成的。如果原始的模拟信号不是严格带限的，则由于混叠效应还会在接收机输出端的信号中引入第三类噪声分量。

在讨论不适当的信道滤波会引入 ISI 的过程时，我们考察了升余弦滚降奈奎斯特滤波器。我们发现在不会引入 ISI 时，传送数字信号所需的最小带宽等于信号波特率的一半。当信道带宽等于信号波特率时($r=1$)，则更可行。

在给定数据速率 R 的条件下，如果采用多进制信号技术，则可以减小所需的信道带宽。

本章主要研究了基带信号。在下一章，我们将讨论如何将基带信号调制到载波信号上去，以使信号的频谱集中在所需的频率，即载波频率上。

3.13 助学例题

SA3.1 PAM 信号的频谱与带宽 利用 8 kHz 的抽样速率将模拟波形 $w(t)$ 转换成平顶 PAM 信号，脉冲的宽度为 100 μs。假设 $W(f)=2\Lambda(f/B)$，其中 $B=3$ kHz。试：

(a)计算并画出 PAM 信号的振幅谱。

(b)计算 PAM 信号第一零点带宽的值。

解：

(a)将 $W(f)=2\Lambda(f/B)$ 代入式(3.10)，利用 M 文件计算并画出的频谱如图 3.47 所示。由图可看出 $W(f)$ 重复地出现在抽样频率的各次谐波上并被 $\tau\left(\frac{\sin\pi\tau f}{\pi\tau f}\right)$ 函数所加权(这是由矩形脉冲波形所造成的)。

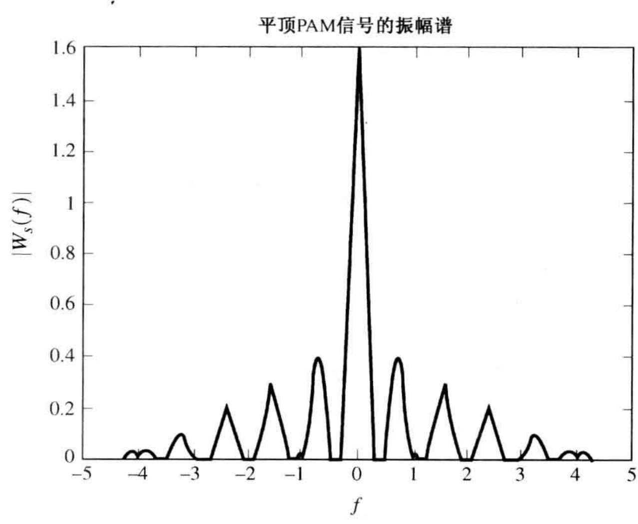


图 3.47 助学例题 SA3.1 的解答(见 M 文件 SA3_1.m)

(b)平顶 PAM 信号频谱的第一个零点出现在 $B=3$ kHz 处。对于该频谱来说，以 3 kHz 作为第一零点带宽并不合适，因为在更高的频率上的频谱值又变大了。在这种情况下，工程师们通常使用频谱的包络来确定零点带宽。于是，频谱的包络 $\tau\left(\frac{\sin\pi\tau f}{\pi\tau f}\right)$ 的第一零点带宽为 $B_{null}=1/\tau=1/100\ \mu s=10$ kHz。

SA3.2　PCM 信号带宽与 SNR　在一个语音通信系统中，利用7000 样本/秒的抽样速率和具有 64 个量化台阶的均匀量化器将带宽为 3200 Hz 的模拟音频（VF）信号转换成 PCM 信号。二进制的 PCM 数据通过一个受噪声干扰的信道传输到接收机端，接收机的误码率（BER）为10^{-4}。试问：

(a) 如果采用极性线路码，则 PCM 信号的零点带宽是多少？

(b) 接收机输出端恢复出的模拟信号的平均 SNR 值是多少？

解：

(a) 因为 $M=2^n$，所以 $M=64$ 个量化阶将产生 6 位的 PCM 码字。利用式(3.15b)，可得信号的零点带宽为：

$$B_{\text{null}} = nf_s = 6(7000) = 42\ \text{kHz}$$

注意：如果使用$(\sin x)/x$ 型的脉冲波形，则零点带宽为：

$$B_{\text{null}} = \frac{1}{2}nf_s = 21\ \text{kHz}$$

(b) 当 $M=64$，且 $P_e = 10^{-4}$ 时，由式(3.16b)得 SNR 值为：

$$\left(\frac{S}{N}\right) = \frac{M^2}{1+4(M^2-1)P_e} = \frac{4096}{1+1.64} = 1552 = 31.9\ \text{dB}$$

（注意：上式分母中的 1 表示量化噪声，1.64 表示恢复出的模拟信号中由于接收比特错误引起的噪声。本例中，两种噪声的影响几乎差不多。当 $M=64$ 时，如果 BER 小于 10^{-5}，则量化噪声将占主导地位；如果 BER 大于 10^{-3}，则由接收比特错误引起的噪声将占主导地位。）

SA3.3　NRZ 线路码的性质　如图 3.13 所示，单极性 NRZ 线路码可以转换成多进制信号在信道上传输。多进制信号中可能取值的数目为 32，并且信号由矩形脉冲组成，脉冲宽度为 0.3472 ms。对于多进制信号，试问：

(a) 波特率是多少？

(b) 等效的比特率是多少？

(c) 过零点带宽是多少？

(d) 对于单极性 NRZ 线性码，重复(a)～(c)的计算。

解：

(a) 因为在 $T_0=0.3472$ ms① 的时间内出现 $N=1$ 个脉冲，所以由式(3.28)，可得：

$$D = N/T_0 = 1/0.3472\ \text{ms} = 2880\ \text{baud}$$

(b) 因为 $L = 32 = 2^{\ell}$，所以 $\ell = 5$。利用式(3.34)，可得：

$$R = \ell D = 5(2880) = 14\,400\ \text{bps}$$

(c) 利用式(3.54)，可知零点带宽为：

$$B_{\text{null}} = R/\ell = D = 2880\ \text{Hz}$$

(d) 对于单极性 NRZ 线路码，在 $T_0=0.3472$ ms 的时间内出现 $N=5$ 个脉冲，所以：

$$D = 5/0.3472\ \text{ms} = 14\,400\ \text{baud}$$

因为单极性 NRZ 线路码是二进制的（即 $L = 2^{\ell}$ 或 $\ell = 1$），所以有 $R=D$，即 $R=14\,400$ bps。零点带宽为：

$$B_{\text{null}} = R/\ell = D = 14\,400\ \text{Hz}$$

SA3.4　RS-232 信号的带宽　个人电脑上的串口 RS-232 以 38 400 bps 的速率传输数据，并且采用极性 NRZ 线路码。现在假设二进制码元 1 和 0 以相同的概率出现，计算并画出这种 RS-232 信号的 PSD。使用 dB 作为 PSD 的幅度单位，并对其归一化，以使得 0 dB 出现在 PSD 图中的峰值处。讨论这种信号的带宽需求。

① 原书 226 页，此处为 $T_0=0.3452$ ms，有误，应为 $T_0=0.3472$ ms。——译者注

解：参考式(3.41)，并令 A^2T_b 等于 1，使得 0 dB 出现在 PSD 图中的峰值处。于是以 dB 为单位的 PSD 为：

$$\mathcal{P}_{\text{dB}}(f) = 10\log\left[\left(\frac{\sin \pi f T_b}{\pi f T_b}\right)^2\right]$$

式中，$T_b = 1/R$，$R = 38\ 400$ bps。

图 3.48 示出了以 dB 为单位的 RS-232 信号的 PSD。由图可以看出这种具有矩形脉冲形状的数字信号有很宽的频谱结构。尽管信号的零点带宽为 38 400 Hz($B_{\text{null}} = R$)，显得信号似乎有着相对较窄的谱结构，但这仅是一种假象。因为第一旁瓣的峰值(在频率 $f = 57\ 600$ Hz $= 1.5R$ 处)仅比主瓣峰值下降了 13.5 dB；第二旁瓣峰值(在频率 $f = 96\ 000$ Hz $= 2.5R$ 处)仅比主瓣峰值下降了 17.9 dB。功率谱仅仅以 $1/f^2$ 的关系衰减，即每倍频 6 dB。参考图 3.48 可知，可以用 $(1/\pi f T_b)^2$ 来描述此 PSD 的包络，这样我们需要用 $f = 386$ kHz $= 10.1R$(即数据速率的 10 倍)的带宽来传输衰减不超过 30 dB 的频率成分。于是，在使用矩形抽样脉冲时，信号的频谱是很宽的(在图 2.24 中，我们首次给出了这一特性)。

因此，对于那些在带限信道上传输数字信号的系统来说，需要采用某种恰当的滤波脉冲波形，以具有较好的带外衰减特性，从而不会引入 ISI。例如，由式(3.74)可知，对 $r = 0.5$ 的具有升余弦特性的滤波脉冲来说，在频率(绝对带宽)$B = \frac{1}{2}(1 + r)D = (0.5)(1.5)(38\ 400) = 28\ 800$ Hz $= 0.75R$ 处具有无穷大的衰减。参考图 3.26(a)，并利用式(3.69)可知，$r = 0.5$ 的升余弦谱在频率 $f = 20\ 070$ Hz $= 0.523R$ 处有 30 dB 的衰减，在频率 $f = 22\ 217$ Hz $= 0.579R$ 处有着 100 dB 的衰减。对于 30 dB 衰减带宽准则，采用 $r = 0.5$ 的升余弦脉冲时的带宽仅仅是矩形脉冲信号所需带宽的 1/19。

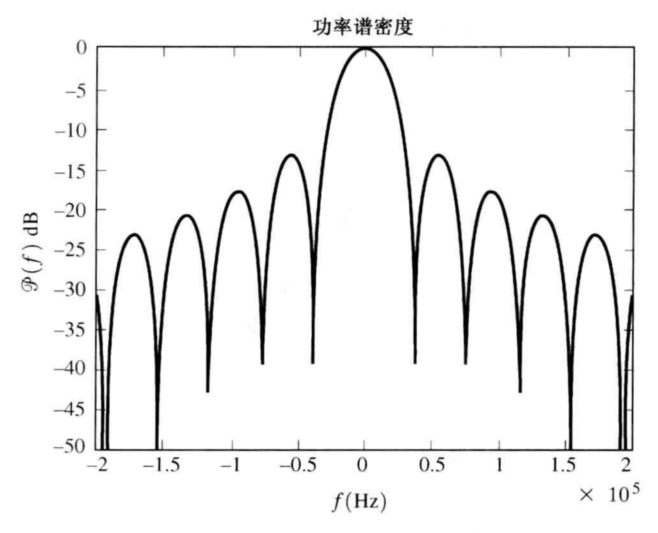


图 3.48 数据速率为 38 400 bps 的 RS-232 信号的 PSD(见 M 文件 SA3_4.m)

习题

3.1 证明：图 3.1(b)所示的开关波形的傅里叶级数的系数由式(3.5b)给出。

3.2 (a)画出用 4 kHz 的速率对频率为 1 kHz 的正弦波进行自然抽样所获得的 PAM 信号的波形。
(b)对于平顶 PAM 波形，重复(a)。

★ 3.3 模拟语音信号的频谱如图 P3.3 所示，以 10 kHz 的速率对这一波形进行抽样，且脉冲宽度为 $\tau = 50\ \mu$s。试找出自然抽样 PAM 波形频谱的表达式，并画出所得到的结果。

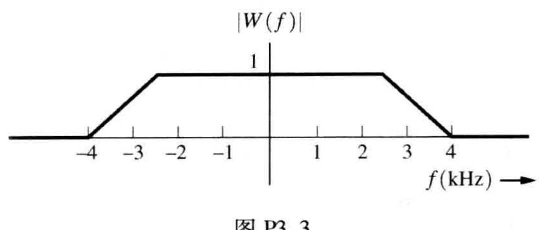


图 P3.3

★ 3.4　对习题 3.3，找出平顶 PAM 波形频谱的表达式，并画出所得到的结果。

3.5　(a)证明利用图 3.4 所给出的解调技术，可以从自然抽样 PAM 波形中恢复出模拟输入波形（它正比于原始的输入模拟波形）。

(b)找出这一解调技术所获得的比例常数 C，其中 $w(t)$ 指原始的波形，$Cw(t)$ 指恢复出的波形。注意，C 是 n 的函数，这里振荡器的频率为 nf_s。

3.6　图 3.4 示出了如何利用相乘检波器对自然抽样的 PAM 信号进行解调，并恢复出模拟波形的过程。证明：只要采用恰当的滤波器 $H(f)$，利用相乘检波器也可以对瞬时抽样的 PAM 信号进行解调并恢复出模拟波形。找出所需的滤波器 $H(f)$ 的特性。

★ 3.7　假设模拟信号具有图 P3.3 所示的频谱，并在交流耦合的 PAM 系统上传输。使用由式(3.46a)给出的曼彻斯特类型的 PAM 脉冲波形，抽样频率为 10 kHz。试找出曼彻斯特编码的平顶 PAM 波形的频谱，并画出所得到的结果。

3.8　在二进制 PCM 系统中，假设量化噪声电平不超过模拟信号峰-峰值电平的 $\pm P\%$ 。证明：每个 PCM 码字所需比特的数目必须满足：

$$n \geqslant [\log_2 10]\left[\log_{10}\left(\frac{50}{P}\right)\right] = 3.32\log_{10}\left(\frac{50}{P}\right)$$

(提示：参考图 3.8(c)。)

★ 3.9　模拟电压波形中的信息通过一个具有 ±0.1% 精度(满值)的 PCM 系统传输。模拟波形的绝对带宽为 100 Hz，且幅度范围为 -10 ~ +10 V。

(a)确定所需抽样速率的最小值。

(b)确定每个 PCM 码字所需的比特数目。

(c)确定 PCM 信号所需比特率的最小值。

(d)确定传输该 PCM 信号所需的绝对信道带宽的最小值。

3.10　用一个 700 MB 的 CD 来存储 PCM 数据。假设以 8 千样本/秒的抽样速率对音频(VF)信号进行抽样，编码后的 PCM 信号的平均 SNR 至少为 30 dB。问此硬盘可以存储多少分钟的 VF 信号所转换的 PCM 数据?

3.11　将一个带宽为 4.2 MHz 的模拟信号转换成二进制的 PCM 信号，以便在信道上传输。接收机输出端的信号峰值与量化噪声功率比至少为 55 dB。

(a)如果假设 $P_e=0$，并且不存在 ISI，求 PCM 码字所需的比特数目以及量化器所需的量化台阶数目。

(b)求等效的比特率。

(c)如果采用矩形脉冲波形，则所需的信道零点带宽是多少?

★ 3.12　压缩光碟(CD)播放器采用 16 位的 PCM，其中包括一位奇偶校验位，对模拟信号进行 8 倍过抽样。假设模拟信号的带宽为 20 kHz。

(a)求 PCM 信号的零点带宽。

(b)利用式(3.18)，确定以 dB 表示的峰值 SNR。

3.13　假设以 44.1 千样本/秒的速率对模拟立体音频的左右声道信号分别进行采样，得到音频 CD。每个样本值进行 16 位编码。问由此产生的复合数字信号速率是多少?

3.14 给定一个模拟信号，它的频谱成分在频带300 ~ 3000 Hz范围内，假设利用7 kHz的抽样频率生成PCM信号。请按照以下步骤设计一个PCM系统：

(a)画出PCM系统的方框图，其中包括发送机、信道与接收机。

(b)假设接收机输出端所需的峰值信号与噪声功率比至少为30 dB，并且使用极性NRZ信号，请计算所需均匀量化台阶的数目以及信道的零点带宽。

(c)讨论如何采用非均匀量化以提高系统的性能。

3.15 假设系统中不存在ISI，并且信道噪声不会引起误码(即$P_e = 0$)，系统的SNR由式(3.17a)和式(3.17b)确定。讨论$M = 4$、8或16时，在式(3.17a)和式(3.17b)给出的结果偏差0.1%之前，P_e可以取的最大值是多少。

★ 3.16 在一个PCM系统中，由于信道噪声所引起的误码率为10^{-4}。假设恢复出的模拟信号的峰值信号与噪声功率比至少为30 dB。

(a)确定将模拟信号编码成PCM信号所需的量化台阶的最小数目。

(b)如果原始的模拟信号的绝对带宽为2.7 kHz，那么采用极性NRZ码的PCM信号的零点带宽是多少？

3.17 参考图3.20中采用平方律器件的位同步器。如果馈送到系统输入端的为采用曼彻斯特编码的PCM信号，请画出位同步器中将出现的一些典型波形。讨论该位同步器在输入为曼彻斯特编码的PCM信号时，其性能是否优越于输入为极性NRZ码的PCM信号时的性能。

3.18 (a)画出$\mu = 10$时完整的压缩器特性，它处理的输入电压的动态范围为$-5 \sim +5$ V。

(b)画出对应的扩张器特性。

(c)画出16级非均匀量化器的特性，它对应于$\mu = 10$时的压缩特性。

3.19 20 log对于4位的PCM系统，计算并画出下述条件下的输出SNR(以dB为单位)值与相对输入电平(x_{rms}/V)之间的关系：

(a)使用$\mu = 10$压扩特性的PCM系统。

(b)使用均匀量化的PCM系统(无压扩)。

(c)实际中，哪一种PCM系统的性能更优越？为什么？

★ 3.20 当输入为正弦波且其峰值电平为V V时，考察采用$\mu = 255$压扩特性的PCM系统的性能。假设$M = 256$。

(a)确定该压扩PCM系统输出SNR的表达式。

(b)画出$(S/N)_{out}$(以dB为单位)与相对输入电平20 log(x_{rms}/V)之间的关系，并将获得的结果与图3.10进行比较。

3.21 一个多进制数字通信系统每隔0.8 ms向信道发送16种可能取的电平值中的一个。试问：

(a)每个电平值所对应的比特数是多少？

(b)波特率为多少？

(c)比特率为多少？

3.22 美国HDTV电台传送空中8电平RF(射频)信号(见8.9节)。如果该信号的波特(符号)率为10.76兆符号/秒，试计算这些信号的有效比特率。

3.23 一个多进制数字通信系统以1.5 Mbps的数据速率工作。试问：

(a)如果将4比特的码字编码成一个多进制电平以便在信道上传输，那么所需的信道带宽的最小值是多少？

(b)对于将8比特的码字编码成一个多进制电平的情况，重复(a)。

★ 3.24 考虑一个由二进制码元1和0交替变化组成的确定测试序列。试计算单极性NRZ信号的振幅谱(不是PSD)与T_b之间的关系，其中T_b为发送一位数据所需要的时间。如果将测试序列改成4个连续二进制1与4个连续二进制0交替变化的话，那么上述信号格式下的振幅谱将如何变化？

★ 3.25　如果将上题中的信号改为单极性 RZ 信号，脉冲宽度为 $\tau=\frac{3}{4}T_b$，重新计算习题 3.24。

3.26　考虑一个由二进制码元 1 和 0 组成的随机数据序列，其中 1 和 0 出现的概率均为 1/2。试计算单极性 NRZ 信号的 PSD，它将是发送一位数据所需时间 T_b 的函数。

试比较随机数据信号的 PSD 与习题 3.24 中确定数据信号的振幅谱之间的关系。上述情况下的频谱效率是多少？

3.27　如果将上题中的信号改为单极性 RZ 信号，其中脉冲宽度为 $\tau=\frac{3}{4}T_b$，试比较随机数据的 PSD 与习题 3.25 中确定数据的振幅谱之间的关系。上述情况下的频谱效率是多少？

3.28　考虑一个由二进制码元 1 和 0 组成的确定数据序列。试在以下类型的信号格式条件下，计算信号的振幅谱（不是 PSD），它将是发送一位数据所需时间 T_b 的函数。

(a) 极性 NRZ 信号。

(b) 曼彻斯特 NRZ 信号。

如果将确定数据序列改成四个连续二进制 1 与两个连续二进制 0 交替变化的话，那么上述两种信号格式下的振幅谱将如何变化？

★ 3.29　考虑一个由二进制码元 1 和 0 组成的随机数据序列，其中 1 和 0 出现的概率均为 1/2。试在以下类型的信号格式条件下，计算信号的 PSD，它将是发送一位数据所需时间 T_b 的函数。

(a) 极性 RZ 信号，其中脉冲宽度为 $\tau=\frac{1}{2}T_b$。

(b) 曼彻斯特 RZ 信号，其中脉冲宽度为 $\tau=\frac{1}{4}T_b$。这些信号的第一零点带宽是多少？上述各种情况下的频谱效率是多少？

3.30　试找出双极性 NRZ 与双极性 RZ（脉冲宽度为 $\frac{1}{2}$Tb）线路码的 PSD 表达式，假设峰值电平为 ±3 V。当 $R=1.544$ Mbps 时，画出相应的 PSD 图形。

★ 3.31　在图 3.16 中，我们给出了几种线路码的 PSD，这些 PSD 都是在假定信号具有单位功率的条件下获得的，从而不同信号的 PSD 可以在相同的传输功率这一基础上进行比较。现在假设信号的峰值电平取单位值（即 $A=1$），试重新推导出这些线路码的 PSD 表达式。画出这些 PSD，从而在相同的峰值信号电平这一基础上对它们进行比较。

3.32　利用式(3.36)，确定线路码的 PSD 中出现 δ 函数时所需的条件，并讨论这将对设计位同步器产生什么样的影响？[提示：考察式(3.43)和式(6.70d)。]

3.33　考虑一个由二进制码元 1 和 0 组成的随机数据序列，其中 1 和 0 出现的概率均为 1/2。假设将该数据编码为极性码类型的波形，使得每一位数据的脉冲形状可以由下式给出：

$$f(t)=\begin{cases}\cos\left(\dfrac{\pi t}{T_b}\right), & |t|<T_b/2\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

其中，T_b 是发送一位数据所需要的时间。

(a) 画出此波形的示意图。

(b) 找出此波形的 PSD 表达式，并将结果画出。

(c) 此类二进制信号的频谱效率是多少？

3.34　假设差分编码器输入端的数据流为 01101000101。试根据编码器初始状态的不同，找出编码器输出端可能出现的两种差分编码数据流。

3.35　画出一个实用的差分编码与解码系统方框图。假设参考位为二进制码元 1，试通过对序列 001111010001 的编码与解码过程来解释该系统是如何工作的？并证明该系统不会出现错误传播现象。

3.36 设计一个用于极性 RZ 线路码，包括位同步器在内的再生中继器，并说明该再生中继器是如何工作的。(提示：参考图 3.19 以及有关位同步器的讨论。)

3.37 通过以下步骤来设计一个用于曼彻斯特 NRZ 线路码的位同步器：

(a)画出简易的方框图。

(b)解释位同步器是如何工作的。

(c)指出位同步器的滤波器必须满足的条件。

(d)将用于曼彻斯特 NRZ 线路码的位同步器与用于极性 NRZ 线路码的位同步器进行比较，并指出它们各自的优缺点。

3.38 图 3.22(c)示出了一个八进制信号。假设此线路码通过一个信道，该信道将对信号进行滤波并且引入了噪声。

(a)画出接收到的波形的眼图。

(b)设计一种可以用于此种线路码的接收机以及相应的符号同步器。

(c)解释所设计的接收机是如何工作的。

★ 3.39 模拟波形中的信息首先编码为二进制的 PCM 信号，然后将其转换成八进制信号以便在信道上传输。假设模拟信号的带宽为 2700 Hz，并且要求接收机输出端再生的模拟信号的精度为 ±1%(满值)。

(a)确定 PCM 信号的最小比特率。

(b)确定多进制信号的最小波特率。

(c)确定传输此 PCM 信号所需的最小绝对信道带宽。

★ 3.40 将数据速率为 9600 bps 的二进制波形转换成八进制波形，以便在一个具有升余弦滚降奈奎斯特滤波特性的信道上传输。信道在 2.4 kHz 以外的频率上具有条件相位响应。

(a)多进制信号的波特率是多少?

(b)信道滤波器的滚降因子是多少?

3.41 假设要考查一个具有矩形 RZ 脉冲形状的 $L=64$ 进制波形的频谱性质，脉冲形状由下式给定：

$$f(t) = \Pi\left(\frac{2t}{T_s}\right)$$

其中，T_s指发送一个多进制符号所需的时间。

(a)当每个多进制符号以相同的概率出现，并且多进制波形的峰值信号电平为 +10 V 时，确定其 PSD 的表达式。

(b)零点带宽是多少?

(c)频谱效率是多少?

3.42 在使用极性信号的二进制通信系统中，将系统总的冲激响应设计成式(3.67)给出的$(\sin x)/x$型函数的形式，这样输出中不会有 ISI。假设数据的比特率为 $R=f_s=300$ bps。

(a)极性信号的带宽是多少?

(b)当输入二进制数据为 01100101 时，画出系统输出端的极性信号的波形图。请问从该极性波形中可以分辨出数据来吗?

★ 3.43 式(3.67)给出了无 ISI 通信系统一种可能的非因果冲激响应。为了使它逼近因果系统，选择：

$$h_e(t) = \frac{\sin \pi f_s(t - 4\times 10^{-3})}{\pi f_s(t - 4\times 10^{-3})}\,\Pi\left(\frac{t - 4\times 10^{-3}}{8\times 10^{-3}}\right)$$

式中，$f_s=1000$。

(a)在 PC 上，利用傅里叶变换计算 $H_e(f)$，并画出$|H_e(f)|$波形。

(b)这一近似因果系统的带宽是多少? 将其与式(3.67)与式(3.68)给出的非因果滤波器的带宽进行比较。

3.44 从式(3.69)开始，证明升余弦滚降滤波器的冲激响应由式(3.73)给出。

3.45　考虑由式(3.69)和式(3.73)给出的升余弦滚降奈奎斯特滤波器。

(a)画出在 $r=0.75$ 情况下的 $|H_e(f)|$ 波形，并像图 3.25 那样指出 f_1、f_0 和 B。

(b)在 $r=0.75$ 的情况下，以 $1/f_0$ 为横坐标的单位画出 $h_e(t)$。注意，必须按照图 3.26 的模式画图。

3.46　当输入为极性 NRZ 信号时，找出 $r=0.5$ 的升余弦滚降信道输出端波形的 PSD。假设二进制信号码元 1 和 0 出现的概率相同，并且信道带宽足以预防出现 ISI。

★ 3.47　式(3.66)给出了无 ISI 的条件(奈奎斯特第一准则)。当 $C=1$ 且 $\tau=0$ 时，利用该公式证明，在下列条件下，仍然满足消除 ISI 的奈奎斯特第一准则。

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} H_e\left(f+\frac{k}{T_s}\right)=T_s \quad \text{或} \quad |f|\leqslant \frac{1}{2T_s}$$

3.48　利用习题 3.47 的结果，说明下面的滤波器特性是否满足消除 ISI 的奈奎斯特第一准则($f_s=2f_0=2/T_0$)。

(a) $H_e(f)=\dfrac{T_0}{2}\Pi\left(\dfrac{1}{2}fT_0\right)$。

(b) $H_e(f)=\dfrac{T_0}{2}\Pi\left(\dfrac{2}{3}fT_0\right)$。

3.49　假定一个脉冲传输系统总的升余弦滚降奈奎斯特滤波特性由式(3.69)给定。

(a)确定由式(3.75)给出的奈奎斯特函数 $Y(f)$，它对应于升余弦滚降奈奎斯特滤波特性。

(b)在 $r=0.75$ 的情况下，画出 $Y(f)$。

(c)画出另一种非升余弦滚降类型的 $Y(f)$，并确定所得到的奈奎斯特滤波特性的绝对带宽。

★ 3.50　将模拟信号转换成 PCM 信号，采用二进制极性 NRZ 线路码。信号在绝对带限于 4 kHz 的信道上传输。假设 PCM 量化器具有 16 个量化台阶，且总的等效系统传递函数具有 $r=0.5$ 的升余弦滚降型特性。

(a)确定此系统在不会引入 ISI 的条件下所能支持的最大 PCM 比特率。

(b)求该模拟信号允许的最大带宽。

3.51　当采用四进制极性 NRZ 线路码时，重做习题 3.50。

★ 3.52　等效比特率为 2400 bps 的多进制数据在一个系统上传输，采用具有矩形脉冲形状的四进制线路码。假设总的传输系统(即发射机、信道与接收机)具有 $r=0.5$ 的升余弦滚降奈奎斯特滤波特性。

(a)求接收到的信号的波特率。

(b)求该传输系统的 6 dB 带宽。

(c)求系统的绝对带宽。

3.53　假定要设计一个传输音频信号的 PCM 通信系统，输入的音频信号带宽为 3400 Hz，并且输出端所需的 SNR 至少为 40 dB。试确定在 $\mu=255$ 的压扩 PCM 信号条件下，该设计所需的比特率。

3.54　如果上题中的信号为 DPCM 信号，重新计算习题 3.53。

讨论习题 3.53 和习题 3.54 中哪个系统可用到你的设计中，并说明为什么?

3.55　参考图 3.32 给出的典型 DM 波形。请画出一个不同于图中所示的模拟波形，并画出对应的 DM 波形和积分器输出波形，在图中标出何处斜率过载噪声起主导作用，何处颗粒噪声起主导作用。

3.56　为了测试一个 DM 系统，在系统的输入端馈送峰-峰值为 1 V 的 10 kHz 正弦波信号，并以 10 倍于奈奎斯特速率的抽样速率对信号进行抽样。

(a)为了预防出现斜率过载噪声并且使颗粒噪声最小所需的量化台阶为多大?

(b)求颗粒噪声的 PSD。

(c)如果接收机的输入端带限于 200 kHz，那么平均信号与量化噪声功率比是多少?

3.57 假设输入到 DM 系统的信号为 $0.1t^8-5t+2$。DM 的量化台阶为 1 V，抽样器的抽样速率为 10 样本/秒。试画出在 0～2 s 的时间间隔内的输入波形、DM 调制器的输出波形和积分器的输出波形，并在图中标出颗粒噪声区和斜率过载噪声区。

3.58 当采用按照 DM 输入序列中连续二进制码元 1 或 0 的数量来选择量化台阶值的自适应增量调制器时，重做习题 3.57。假设连续出现 4 个或 4 个以上相同二进制码元时的量化台阶值为 1.5 V，出现 3 个相同二进制码元时的量化台阶值为 1.0 V，出现 2 个或者更少个相同二进制码元时的量化台阶值为 0.5 V。

★ 3.59 设计一个增量调制器用于传输模拟波形中的信息，模拟波形具有 1 V 的峰-峰值，并且带宽为 3.4 kHz。假设传输波形的信道在 1 MHz 以上的频段有着极差的频率响应。

(a)请为一正弦波测试信号选择适当的量化台阶和抽样速率，并利用所选择的参数讨论系统的性能。

(b)假设 DM 系统用于传输模拟语音信号中的信息，请在抽样频率为 25 kHz 的条件下选择适当的量化台阶，并在该条件下讨论系统的性能。

3.60 模拟信号 $w_1(t)$ 和 $w_2(t)$ 分别带限于 3 kHz 和 9 kHz，采用 TDM 技术将这两种信号复接到一个 PAM 类型的系统上进行传输。

(a)确定每种信号所需的最小抽样频率，并设计出能用于这些信号的 TDM 复接器和分接器。

(b)画出 $w_1(t)$ 与 $w_2(t)$ 的某些典型波形，并画出对应的 TDM PAM 波形。

★ 3.61 采用瞬时抽样 PAM 的方式将 3 种波形时分复用于一个信道上。假设 PAM 脉冲的宽度非常窄，并且在 0.15 s 的时间间隔内对每个模拟波形抽样一次。当输入的模拟波形为以下信号时，画出(组合出)TDM 波形。

$$w_1(t) = 3\sin(2\pi t)$$

$$w_2(t) = \Pi\left(\frac{t-1}{2}\right)$$

与

$$w_3(t) = -\Lambda(t-1)$$

3.62 设有 23 路模拟信号，每路均带限于 3.4 kHz，以 8 kHz 的抽样频率对其进行抽样，并与 1 路同步信道(8 kHz)一起复用为 TDM PAM 信号。将此 TDM 信号在 $r=0.75$ 的升余弦滚降奈奎斯特滤波特性的信道上传输。

(a)画出系统的方框图，并指出复接器的工作频率 f_s 以及 TDM PAM 信号总的脉冲速率。

(b)计算信道所需的绝对带宽。

★ 3.63 将两个平顶 PAM 信号时分复用为一路 TDM PAM 信号以便在一个信道上传输。第一个 PAM 信号是从具有矩形频谱 $W_1(f)=\Pi(f/2B)$ 的模拟信号抽样获得的，第二个 PAM 信号是从具有三角形频谱 $W_2(f)=\Lambda(f/2B)$ 的模拟信号抽样获得的，其中，$B=3$ kHz。

(a)确定每种信号所需的最小抽样频率，并设计出能复合这些信号的 TDM 复接器和分接器。

(b)计算并画出 TDM PAM 信号的振幅谱。

3.64 在使用 TDM 脉冲编码调制时，重做习题 3.62。其中对每路模拟输入信号采用 8 位量化器生成 PCM 码字，并且同步信道上使用 8 位的同步字。

3.65 设计一个 TDM PCM 系统，它可以容纳 4 路 300 bps 的同步数字输入和一路带宽为 500 Hz 的模拟信号输入。假设模拟样本转换成 4 位的 PCM 码字。画出类似于图 3.39 的设计方框图，并指出图中各重要参考点上的数据速率。请解释该系统是如何工作的。

★ 3.66 设计一个 TDM 系统，它可以容纳两路 2400 bps 的同步数字输入和一路带宽为 2700 Hz 的模拟信号输入。假设以 1.11111 倍于奈奎斯特速率的抽样速率对模拟信号进行抽样，并且将模拟样本转换成 4 位的 PCM 码字。画出设计方框图，并指出图中各重要参考点上的数据速率。请解释该 TDM 系统是如何工作的。

3.67　在将传输线 1% 的传输能力保留用于同步的目的时，找出以下哪些设备可以适应 T1 类型的 TDM 线？

(a)110 bps 的电传打字机终端。

(b)8000 bps 的语音编解码器。

(c)9600 bps 的计算机输出端口。

(d)64 kbps 的 PCM VF 线。

(e)144 kbps 的 ISDN 终端。

如果每种终端在平均 10% 的时间内是被占用的，那么上述设备中适应 T1 类型的 TDM 线又是哪些呢？

3.68　假设对一正弦波以 4 倍于奈奎斯特速率的抽样速率进行瞬时抽样。

(a)画出对应的 PWM 信号。

(b)画出对应的 PPM 信号。

3.69　讨论为什么 PPM 系统需要同步信号，而 PAM 和 PWM 无需同步信号也可以正确地进行检测。

★ 3.70　比较采用 PPM 信号和 PCM 信号发送消息时所需的带宽。假设数字信源每发送一个字符需要 8 位数据，即信源可以发送 256 种不同的消息(字符)。又假设信源以 10 字符/秒的速率发送消息。利用维数定理 $N/T_0 = 2B$，确定传输消息所需的最小带宽 B。

(a)确定由信源信息编码成的 PCM 信号所需的最小带宽。

(b)确定由信源信息编码成的 PPM 信号所需的最小带宽。

第4章　带通信号传输原理及电路

本章要点

- 复包络及已调信号
- 带通信号的频谱
- 非线性失真
- 通信电路(混频器、锁相环、频率合成器及检波器)
- 发射机和接收机
- 软件无线电

本章主要讨论带通信号传输技术。正如第1章中指出的那样，带通信号是将模拟或数字基带信号调制到载波上而获得的。这是很有趣的一章，因为它揭示了带通信号传输的基本原理。本章中使用了复包络，它可代表任何一种带通信号。本章中讨论的内容都是理解第5章和第8章中介绍的数字及模拟通信系统的基础知识。本章中还讨论了组成通信系统的主要单元电路，包括滤波器、线性及非线性放大器、混频器、上下变频器、调制器、检波器及锁相环。本章最后还讨论了发射机、接收机及软件无线电。

4.1　带通波形的复包络表示

模拟和数字带通信号的一般表示是什么？如何表示已调信号？如何表示带通噪声？这些都是本节将回答的问题。

4.1.1　基带、带通及调制

定义　基带波形是指其频谱强度在原点(即$f=0$)附近不为零，而在其他频率值上可忽略不计的波形。

定义　带通波形是指其频谱强度在某一频率$f=\pm f_c$，$f_c \gg 0$附近频带上不为零，而在其他频率值上可忽略不计的波形。f_c称为载波频率。

对于带通波形，某些情况下出于数学上的方便，f_c可取为任意值。在另一些情况下，如调制时，f_c是发射机振荡电路的信号频率，也就是分配给发射机的工作频率。对于AM广播站，其值为850 kHz。

在通信系统中，信息源信号通常是基带信号，例如，数字电路产生的晶体管-晶体管逻辑电路(TTL)波形，话筒产生的音频(模拟)信号。通信工程师的任务就是建立一个系统，将源信号$m(t)$中的信息传送到目的地。如图4.1所示，这通常包括一个带通信号$s(t)$，其带通频谱集中于$\pm f_c$附近。f_c应选择为使$s(t)$能通过该通信信道(无论是有线还是无线信道)。

定义　调制是指通过改变信号的幅度或相位或者两者均改变，将源信息加载到载频为f_c的带通信号上的过程。这个带通信号称为已调信号$s(t)$。源基带信号称为调制信号$m(t)$。

本章后续部分将给出调制是如何确切完成的例子。这个定义表明，调制可以视作一个映射过程，即将源信息映射到带通信号 $s(t)$ 上去的过程。带通信号将在信道上传输。

已调信号在信道上传输时会有噪声干扰。结果接收机的输入 $r(t)$ 是一个带通的信号加噪声波形（见图 4.1）。接收机必须能将源端发送的信息恢复；$\tilde{m}$ 表示受噪声干扰的信号 m。

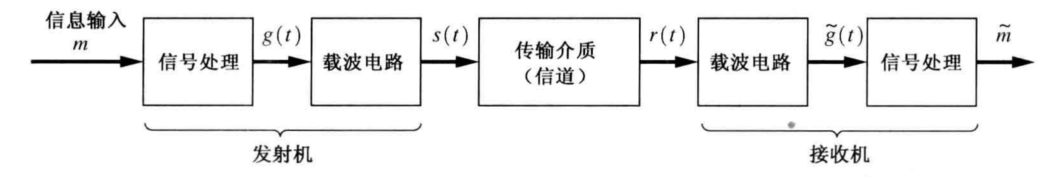


图 4.1　通信系统

4.1.2　复包络表示

所有带通波形，不论是已调信号、受扰信号或噪声，都可根据下述定理表达成较简单的形式。设 $v(t)$ 代表带通波形：当 $s(t)\equiv v(t)$ 时，$v(t)$ 代表信号；当 $n(t)\equiv v(t)$ 时，$v(t)$ 代表噪声；当 $r(t)\equiv v(t)$ 时，$v(t)$ 代表信道输出端经过滤波的信号加噪声，或者任何其他类型的带通波形。①

定理　任何物理可实现带通信号均可表示成：

$$v(t) = \mathrm{Re}\{g(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c t}\} \tag{4.1a}$$

式中，$\mathrm{Re}\{\cdot\}$ 表示 $\{\cdot\}$ 的实部，$g(t)$ 称为 $v(t)$ 的复包络，f_c 是载波频率（单位为赫兹），$\omega_c = 2\pi f_c$。另外两个等效表达式为：

$$v(t) = R(t)\cos[\omega_c t + \theta(t)] \tag{4.1b}$$

和

$$v(t) = x(t)\cos\omega_c t - y(t)\sin\omega_c t \tag{4.1c}$$

其中，

$$g(t) = x(t) + \mathrm{j}y(t) = |g(t)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\angle g(t)} \equiv R(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta(t)} \tag{4.2}$$

$$x(t) = \mathrm{Re}\{g(t)\} \equiv R(t)\cos\theta(t) \tag{4.3a}$$

$$y(t) = \mathrm{Im}\{g(t)\} \equiv R(t)\sin\theta(t) \tag{4.3b}$$

$$R(t) \triangleq |g(t)| \equiv \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \tag{4.4a}$$

且

$$\theta(t) \triangleq \underline{/g(t)} = \arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right) \tag{4.4b}$$

证明　任何物理可实现波形（不一定是周期的）都可在所有时间上，即 $T_0\to\infty$ 上由复傅里叶级数表示为：

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t},\quad \omega_0 = 2\pi/T_0 \tag{4.5}$$

---

① 符号 ≡ 表示“等价于”，符号 ≜ 表示“定义”。

由于物理可实现波形是实函数，则 $c_{-n}=c_n^*$。由 $\text{Re}\{\cdot\}=\frac{1}{2}\{\cdot\}+\frac{1}{2}\{\cdot\}^*$ 得：

$$v(t)=\text{Re}\left\{c_0+2\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{jn\omega_0 t}\right\} \tag{4.6}$$

由于 $v(t)$ 是带通波形，n 取 0 附近值时 c_n 值很小，可忽略。特别地，$c_0=0$。因此，引入一个任意参数 f_c，式(4.6)变成[①]：

$$v(t)=\text{Re}\left\{\left(2\sum_{n=1}^{n=\infty}c_n e^{j(n\omega_0-\omega_c)t}\right)e^{j\omega_c t}\right\} \tag{4.7}$$

由此得到式(4.1a)，其中

$$g(t)\equiv 2\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{j(n\omega_0-\omega_c)t} \tag{4.8}$$

由于 $v(t)$ 是带通波形，频谱集中在 $f=f_c$ 附近，只有 n 值在 $\pm nf_0\approx f_c$ 范围内的傅里叶系数 c_n 不为零。因此，由式(4.8)可知，$g(t)$ 的频谱集中在 $f=0$ 附近。也就是说，$g(t)$ 是基带波形。

波形 $g(t)$ 及由此得到的 $x(t)$、$y(t)$、$R(t)$ 及 $\theta(t)$ 都是基带波形。除了 $g(t)$ 外，其他都是实波形。$R(t)$ 是非负实波形。式(4.1)是低通－带通的转换过程。式(4.1a)中的因子 $e^{j\omega_c t}$ 将基带信号 $g(t)$ 的频谱从基带向上搬移(转换)至载波频率 f_c。在通信术语中，这称为将基带信号 $g(t)$ 中的频率向上外差至 f_c。复包络 $g(t)$ 通常是时间的复函数，它是对矢量概念的一个概括。也就是说，如果 $g(t)$ 是复常数，则 $v(t)$ 是频率为 f_c 的纯正弦波形。而这个复常数就是代表该正弦信号的矢量。如果 $g(t)$ 不是常数，则 $v(t)$ 就不是纯正弦波形。因为 $g(t)$ 中的变化使得 $v(t)$ 的幅度和相位随时间变化。

将复包络表示成直角坐标系中的两个实函数，得到：

$$g(x)\equiv x(t)+jy(t)$$

式中，$x(t)=\text{Re}\{g(t)\}$，$y(t)=\text{Im}\{g(t)\}$。$x(t)$ 称为 $v(t)$ 的同相分量，$y(t)$ 称为 $v(t)$ 的正交分量。同样，由 $R(t)$ 和 $\theta(t)$ 表示的 $g(t)$ 的极坐标形式由式(4.2)给出。直角坐标和极坐标间的转换由式(4.3)和式(4.4)给出。$R(t)$ 和 $\theta(t)$ 都是实波形。$R(t)$ 通常非负。$R(t)$ 称为 $v(t)$ 的幅度调制(AM)，$\theta(t)$ 称为 $v(t)$ 的相位调制(PM)。

例题 4.1 同相正交形式的已调信号

令 $x(t)=\cos(2\pi t)$，且 $y(t)$ 为下式定义的脉冲信号：

$$y(t)=\begin{cases}0, & t<1\\ 1, & 1\leqslant t\leqslant 2\\ 0, & t>2\end{cases}$$

利用式(4.1a)，画出在时间 $0<t<4$ s 内生成的已调信号。假设载波频率是 10 Hz。解题过程及结果见 M 文件 Example4_01.m。

带通波形的复包络表示的好处是不言而喻的。在现代通信系统中，带通信号通常被分开送入两个信道。一个传送 $x(t)$，称为 I(同相)信道；一个传送 $y(t)$，称为 Q(正交)信道。在带通信号的计算机模拟中，如果采用复包络 $g(t)$ 代替带通信号 $v(t)$，则采样率可达到最小。这是因为 $g(t)$ 是带通信号的等效基带信号。

---

① 由于 Re{·}中变量的频率均为正值，可知复函数 $2\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{jn\omega_0 t}$ 是上半复 t 平面的分析函数。由于该函数是复变量的分析函数，因此会出现一些有趣的特性。

4.2　已调信号的表示方法

调制是将源信息 $m(t)$(调制信号)加载到带通信号 $s(t)$(已调信号)上的过程。因此，已调信号就是带通信号的一个特例。已调信号由下式给出：

$$s(t) = \mathrm{Re}\{g(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c t}\} \tag{4.9}$$

式中，$\omega_c = 2\pi f_c$，f_c 是载波频率。复包络 $g(t)$ 是调制信号 $m(t)$ 的函数，即

$$g(t) = g[m(t)] \tag{4.10}$$

因此，$g[\cdot]$ 是对 $m(t)$ 进行一个映射操作，如图 4.1 所示。

表 4.1 是关于调制问题的一个总结。表中给出了幅度调制(AM)、抑制载波双边带调制(DSB-SC)、相位调制(PM)、频率调制(FM)、抑制载波单边带 AM(SSB-AM-SC)、单边带 PM(SSB-PM)、单边带 FM(SSB-FM)、单边带包络检波(SSB-EV)、单边带平方律检波(SSB-SQ)以及正交调制(QM)的映射函数 $g[m]$ 的例子。第 5 章中对数字和模拟已调信号有更详细的讨论。如果 $m(t)$ 是数字基带信号，如晶体管 - 晶体管逻辑(TTL)电路的输出，则可获得数字已调带通信号。

显然，可以使用表 4.1 没有列出的其他 $g[m]$ 函数。现在的问题是：它们有用吗？人们在寻找易于实现、能产生所需谱特性的 $g(t)$。而且，在接收端需要求出反函数 $m[g]$。反函数在所使用的域上必须是单值对应而且易于实现的。映射应抑制尽可能多的噪声，以使 $m(t)$ 能以较少的失真被恢复出来。

表 4.1　不同类型调制的复包络函数[1]

调制类型	映射函数 $g(m)$	对应正交调制	
		$x(t)$	$y(t)$
AM	$A_c[1+m(t)]$	$A_c[1+m(t)]$	0
DSB-SC	$A_c m(t)$	$A_c m(t)$	0
PM	$A_c \mathrm{e}^{\mathrm{j}D_p m(t)}$	$A_c \cos[D_p m(t)]$	$A_c \sin[D_p m(t)]$
FM	$A_c \mathrm{e}^{\mathrm{j}D_f \int_{-\infty}^{t} m(\sigma)\mathrm{d}\sigma}$	$A_c \cos\left[D_f \int_{-\infty}^{t} m(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right]$	$A_c \sin\left[D_f \int_{-\infty}^{t} m(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right]$
SSB-AM-SC[2]	$A_c[m(t) \pm \mathrm{j}\hat{m}(t)]$	$A_c m(t)$	$\pm A_c \hat{m}(t)$
SSB-PM[2]	$A_c \mathrm{e}^{\mathrm{j}D_p[m(t) \pm \mathrm{j}\hat{m}(t)]}$	$A_c \mathrm{e}^{\mp D_p \hat{m}(t)} \cos[D_p m(t)]$	$A_c \mathrm{e}^{\mp D_p \hat{m}(t)} \sin[D_p m(t)]$
SSB-FM[2]	$A_c \mathrm{e}^{\mathrm{j}D_f \int_{-\infty}^{t} [m(\sigma) \pm \mathrm{j}\hat{m}(\sigma)\mathrm{d}\sigma]}$	$A_c \mathrm{e}^{\mp D_f \int_{-\infty}^{t} \hat{m}(\sigma)\mathrm{d}\sigma} \cos\left[D_f \int_{-\infty}^{t} m(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right]$	$A_c \mathrm{e}^{\mp D_f \int_{-\infty}^{t} \hat{m}(\sigma)\mathrm{d}\sigma} \sin\left[D_f \int_{-\infty}^{t} m(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right]$
SSB-EV[2]	$A_c \mathrm{e}^{\{\ln[1+m(t)] \mp \mathrm{j}\hat{\ln}\lvert 1+m(t)\rvert\}}$	$A_c[1+m(t)\cos\{\hat{\ln}[1+m(t)]\}$	$\pm A_c[1+m(t)]\sin\{\hat{\ln}[1+m(t)]\}$
SSB-SQ[2]	$A_c \mathrm{e}^{(1/2)\{\ln[1+m(t)] \mp \mathrm{j}\hat{\ln}\lvert 1+(t)\rvert\}}$	$A_c \sqrt{1+m(t)}\cos\left\{\frac{1}{2}\hat{\ln}[1+m(t)]\right\}$	$\pm A_c \sqrt{1+m(t)}\sin\left\{\frac{1}{2}\hat{\ln}[1+m(t)]\right\}$
QM	$A_c[m_1(t) + \mathrm{j}m_2(t)]$	$A_c m_1(t)$	$A_c m_2(t)$

[1]：$A_c > 0$，是常数，它设定由式(4.17)算得的信号能量值；L 指线性；NL 指非线性；$[\hat{\cdot}]$ 是 $[\cdot]$ 的希尔伯特变换(即 $-90°$ 相移)(见 5.5 节及附录 A 的 A.7 节)。

[2]：上面的符号对应上单边带信号，下面的符号对应下单边带信号。

[3]：严格来说，AM 信号并非线性的，因为载波项不满足线性(叠加)条件。

(续表)

调制类型	对应幅度和相位调制			
	$R(t)$	$\theta(t)$	线性度	备注
AM	$A_c\|1+m(t)\|$	$\begin{cases}0, & m(t)>-1\\180°, & m(t)<-1\end{cases}$	L[3]	包络检波时，需要 $m(t)>-1$
DSB-SC	$A_c\|m(t)\|$	$\begin{cases}0, & m(t)>0\\180°, & m(t)<0\end{cases}$	L	需要相干检波
PM	A_c	$D_p m(t)$	NL	D_p 是相位偏移常数(rad/V-s)
FM	A_c	$D_f\int_{-\sigma}^{t} m(\sigma)\mathrm{d}\sigma$	NL	D_f 是频率偏移常数(rad/V)
SSB-AM-SC[2]	$A_c\sqrt{[m(t)]^2+[\hat{m}(t)]^2}$	$\arctan[\pm\hat{m}(t)/m(t)]$	L	需要相干检波
SSB-PM[2]	$A_c e^{\pm D_p\hat{m}(t)}$	$D_p m(t)$	NL	
SSB-FM[2]	$A_c e^{\pm D_f\int_{-\infty}^{t}\hat{m}(\sigma)\mathrm{d}\sigma}$	$D_f\int_{-\infty}^{t} m(\sigma)\mathrm{d}\sigma$	NL	
SSB-EV[2]	$A_c\|1+m(t)\|$	$\pm\widehat{\ln}[1+m(t)]$	NL	为使 ln(·)为实值，$m(t)>-1$
SSB-SQ[2]	$A_c\sqrt{1+m(t)}$	$\pm\frac{1}{2}\widehat{\ln}[1+m(t)]$	NL	为使 ln(·)为实值，$m(t)>-1$
QM	$A_c\sqrt{m_1^2(t)+m_2^2(t)}$	$\arctan[m_2(t)/m_1(t)]$	L	用于 NTSC 制式彩色电视机；需要相干检波

[1]：$A_c>0$，是常数，它设定由式(4.17)算得的信号能量值；L 指线性；NL 指非线性；$[\hat{\cdot}]$是$[\cdot]$的希尔伯特变换(即 $-90°$相移)(见5.5节及附录A的A.7节)。

[2]：上面的符号对应上单边带信号，下面的符号对应下单边带信号。

[3]：严格来说，AM 信号并非线性的，因为载波项不满足线性(叠加)条件。

4.3 带通信号的频谱

带通信号的频谱与其复包络的频谱有直接关系。

定理 如果带通波形可由下式表示：

$$v(t)=\mathrm{Re}\{g(t)e^{j\omega_c t}\} \tag{4.11}$$

则带通波形的频谱为：

$$V(f)=\tfrac{1}{2}[G(f-f_c)+G^*(-f-f_c)] \tag{4.12}$$

且波形的 PSD 为：

$$\mathcal{P}_v(f)=\tfrac{1}{4}[\mathcal{P}_g(f-f_c)+\mathcal{P}_g(-f-f_c)] \tag{4.13}$$

式中，$G(f)=\mathcal{F}[g(t)]$，$\mathcal{P}_g(f)$是 $g(t)$ 的 PSD。

证明

$$v(t)=\mathrm{Re}\{g(t)e^{j\omega_c t}\}=\tfrac{1}{2}g(t)e^{j\omega_c t}+\tfrac{1}{2}g^*(t)e^{-j\omega_c t}$$

则

$$V(f)=\mathcal{F}[v(t)]=\tfrac{1}{2}\mathcal{F}[g(t)e^{j\omega_c t}]+\tfrac{1}{2}\mathcal{F}[g^*(t)e^{-j\omega_c t}] \tag{4.14}$$

若利用表2.1中的$\mathcal{F}[g^*(t)]=G^*(-f)$及表2.1中傅里叶变换的频率变换性质，上式变为：

$$V(f) = \frac{1}{2}\{G(f-f_c) + G^*[-(f+f_c)]\} \tag{4.15}$$

此即式(4.12)。

例题 4.2　正交已调信号的频谱

使用 FFT，计算并画出例题 4.1 中描述的 QM 信号的幅度谱。

解： 解题过程及结果见 M 文件 Example4_02.m。那么所得结果是否正确呢？利用式(4.15)，正弦信号应该在 9 Hz 和 11 Hz 处产生冲激函数。利用式(4.15)和图 2.6(a)，矩形脉冲应该产生一个中心位于载波频率 $f_c = 10$ Hz 处，零点间隔为 1 Hz 的 $|\mathrm{Sa}(x)|$ 型频谱。注意，傅里叶变换的 FFT 近似值不能给出频谱中冲激函数的精确值(已在 2.8 节中讨论过)。然而，通过估计傅里叶级数系数，FFT 可以用来获得冲激函数的精确值。例如，可参见助学例题 SA4.1。

要得到 $v(t)$ 的 PSD，首先计算 $v(t)$ 的自相关函数：

$$R_v(\tau) = \langle v(t)\, v(t+\tau)\rangle = \langle \mathrm{Re}\{g(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c t}\}\,\mathrm{Re}\{g(t+\tau)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c(t+\tau)}\}\rangle$$

运用等式(见习题 2.74)：

$$\mathrm{Re}(c_2)\,\mathrm{Re}(c_1) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(c_2^* c_1) + \frac{1}{2}\mathrm{Re}(c_2 c_1)$$

式中，$c_2 = g(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c t}$，$c_1 = g(t+\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c(t+\tau)}$，得到：

$$R_v(\tau) = \langle \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\{g^*(t)g(t+\tau)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_c t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c(t+\tau)}\}\rangle + \langle \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\{g(t)g(t+\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c(t+\tau)}\}\rangle$$

注意，$\langle\ \rangle$ 和 $\mathrm{Re}\{\ \}$ 都是线性操作符，可改变操作符顺序而不影响结果，则 $v(t)$ 的自相关函数可写为：

$$R_v(\tau) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\langle g^*(t)\,g(t+\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c\tau}\rangle\} + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\langle g(t)\,g(t+\tau)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega_c t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c\tau}\rangle\}$$

或

$$R_v(\tau) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\langle g^*(t)g(t+\tau)\rangle\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c\tau}\} + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\langle g(t)g(t+\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega_c t}\rangle\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c\tau}\}$$

但 $\langle g^*(t)g(t+\tau)\rangle = R_g(\tau)$。由于 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega_c t} = \cos 2\omega_c t + \mathrm{j}\sin 2\omega_c t$ 比 $g(t)g(t+\tau)$ 振荡快得多，上式右边的第 2 项可忽略。也就是说 f_c 远大于 $g(t)$ 的频率，因此该积分可忽略。这是微积分学 [Olmster, 1961] 中的 Riemann-Lebesque 引理的应用。因此 $v(t)$ 的自相关函数可简化为：

$$R_v(\tau) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{R_g(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c\tau}\} \tag{4.16}$$

对式(4.16)进行傅里叶变换(即运用 Wiener-Khintchine 定理)，得到其 PSD。注意，若将式(4.11)中的 t 换成 τ，则它与式(4.16)有相同的数学形式。其傅里叶变换与式(4.12)形式相同。故有：

$$\mathcal{P}_v(f) = \mathcal{F}[R_v(\tau)] = \frac{1}{4}[\mathcal{P}_g(f-f_c) + \mathcal{P}_g^*(-f-f_c)]$$

但因 PSD 是实函数，$\mathcal{P}_g^*(f) = \mathcal{P}_g(f)$，故得式(4.13)。

4.4　功率的计算

定理　带通波形 $v(t)$ 的全部平均归一化功率为：

$$P_v = \langle v^2(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{P}_v(f)\,\mathrm{d}f = R_v(0) = \frac{1}{2}\langle |g(t)|^2\rangle \tag{4.17}$$

这里归一化是指负载等于 1 Ω。

证明　将 $v(t)$ 代入式(2.67)，得到：

$$P_v = \langle v^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_v(f)\,df$$

但是 $R_v(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{P}_v(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_v(f) e^{j2\pi f\tau} df$，故：

$$R_v(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_v(f)\,df$$

同样，由式(4.16)，有：

$$R_v(0) = \tfrac{1}{2}\operatorname{Re}\{R_g(0)\} = \tfrac{1}{2}\operatorname{Re}\{\langle g^*(t) g(t+0) \rangle\}$$

或

$$R_v(0) = \tfrac{1}{2}\operatorname{Re}\{\langle |g(t)|^2 \rangle\}$$

但由于 $|g(t)|$ 总是实函数，则

$$R_v(0) = \tfrac{1}{2}\langle |g(t)|^2 \rangle$$

另一种功率量度称为峰值包络功率(PEP)，它是发射机中的有用指标。

定义 峰值包络功率(PEP)是指 $|g(t)|$ 在其峰值处保持为常数时得到的平均功率。

这等价于计算峰值为 $A_p = \max[v(t)]$ 的未调制射频正弦信号的平均功率，如图5.1(b)所示。

定理 归一化 PEP 由下式给出：

$$P_{\text{PEP}} = \tfrac{1}{2}[\max |g(t)|]^2 \tag{4.18}$$

将上述定义代入式(4.17)可证明定理。正如第5章和第8章所述，PEP 在确定 AM、SSB 和电视发射机的功率容量时很有用。

例题 4.3 幅度调制信号

计算幅度调制信号的幅度谱。由表4.1知 AM 信号的复包络为：

$$g(t) = A_c[1 + m(t)]$$

因此复包络的谱为：

$$G(f) = A_c\delta(f) + A_c M(f) \tag{4.19}$$

由式(4.9)，可得 AM 信号的波形为：

$$s(t) = A_c[1 + m(t)]\cos\omega_c t$$

由正弦信号调制的 AM 信号的波形，参见 M 文件 Example4_3.m。

再由式(4.12)，可得 AM 信号的频谱为：

$$S(f) = \tfrac{1}{2}A_c[\delta(f - f_c) + M(f - f_c) + \delta(f + f_c) + M(f + f_c)] \tag{4.20a}$$

式中，因 $m(t)$ 为实函数，故有 $M^*(f) = M(-f)$，且 $\delta(f) = \delta(-f)$（δ 函数定义为偶函数）。假设调制信号 $m(t)$ 的幅度谱为三角函数，如图4.2(a)所示。这个谱可以是低频部分被加重了的模拟音频信号源的谱。因而由式(4.20a)可得到 AM 的频谱如图4.2(b)所示。注意到因为 M①$(f-f_c)$ 和 $M^*(-f-f_c)$ 没有相互重叠，故幅度谱为：

$$|S(f)| = \begin{cases} \tfrac{1}{2}A_c\delta(f-f_c) + \tfrac{1}{2}A_c|M(f-f_c)|, & f > 0 \\ \tfrac{1}{2}A_c\delta(f+f_c) + \tfrac{1}{2}A_c|M(-f-f_c)|, & f < 0 \end{cases} \tag{4.20b}$$

$g(t) = A_c[1 + m(t)]$ 中的1会导致频谱在 $f = \pm f_c$ 处产生冲激函数，其中 f_c 是被分配的载波频

---

① 此处原文为 G，有误。——译者注

率。由式(4.17)，可以得到总的平均信号功率为：

$$P_s = \frac{1}{2}A_c^2\langle|1 + m(t)|^2\rangle = \frac{1}{2}A_c^2\langle 1 + 2m(t) + m^2(t)\rangle$$
$$= \frac{1}{2}A_c^2[1 + 2\langle m(t)\rangle + \langle m^2(t)\rangle]$$

如果假设图 4.2(a)所示的调制信号的直流分量为零，则信号的平均功率变为：

$$P_s = \frac{1}{2}A_c^2[1 + P_m] \tag{4.21}$$

其中，$P_m = \langle m^2(t)\rangle$ 为调制信号 $m(t)$ 的功率，$\frac{1}{2}A_c^2$ 是载波功率，$\frac{1}{2}A_c^2P_m$ 是 $s(t)$ 边带中的功率。

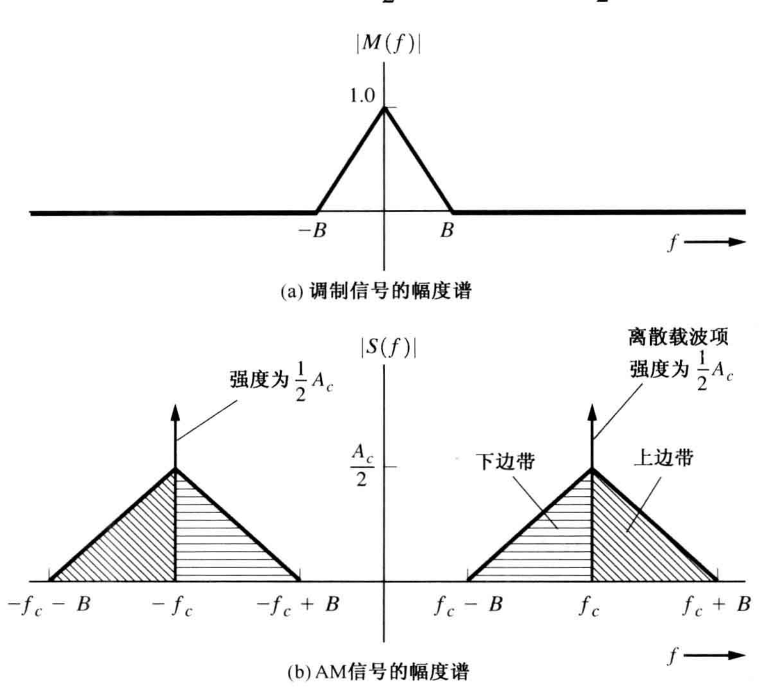


图 4.2　AM 信号的频谱

4.5　带通滤波和线性失真

4.5.1　等效低通滤波器

2.6 节讨论了处理线性滤波器问题的传输函数的一般方法。这里，将提出一个更简捷的方法来模拟带通滤波器，即采用具有复值冲激响应的等效低通波波器。如图 4.3(a)所示，$v_1(t)$ 和 $v_2(t)$ 是输入和输出带通波形，对应复包络为 $g_1(t)$ 和 $g_2(t)$。带通滤波器的冲激响应 $h(t)$ 也可由其对应的复包络 $k(t)$ 表示。另外，如图 4.3(a)所示，由式(4.11)和式(4.12)可知，带通滤波器的频域函数 $H(f)$ 可由 $K(f)$ 表示。图 4.3(b)示出了一个典型的带通频率响应函数($|H(f)|$)。

定理　带通滤波器的输入、输出和冲激响应的复包络的关系为：

$$\frac{1}{2}g_2(t) = \frac{1}{2}g_1(t) * \frac{1}{2}k(t) \tag{4.22}$$

式中，$g_1(t)$ 是输入信号的复包络，$k(t)$ 是冲激响应的复包络。同样有：

$$\frac{1}{2}G_2(f) = \frac{1}{2}G_1(f)\frac{1}{2}K(f) \tag{4.23}$$

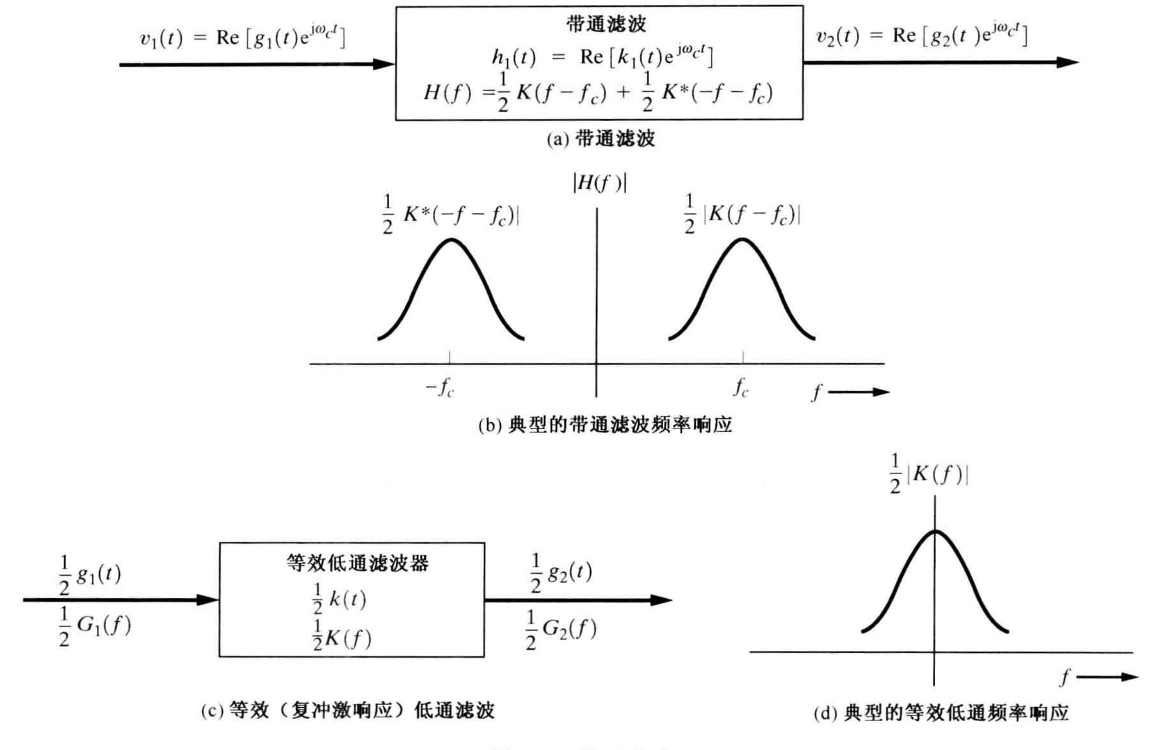


图 4.3　带通滤波

证明　已知输出信号的的频谱为：

$$V_2(f) = V_1(f)H(f) \tag{4.24}$$

由于 $v_1(t)$、$v_2(t)$ 和 $h(t)$ 均是带通波形，其波形的频谱与其复包络频谱的关系由式(4.15)表示，故式(4.24)可写为：

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}[G_2(f-f_c) + G_2^*(-f-f_c)]\\&\quad= \tfrac{1}{2}[G_1(f-f_c) + G_1^*(-f-f_c)]\tfrac{1}{2}[K(f-f_c) + K^*(-f-f_c)]\\&\quad= \tfrac{1}{4}[G_1(f-f_c)K(f-f_c) + G_1(f-f_c)K^*(-f-f_c)\\&\qquad+ G_1^*(-f-f_c)K(f-f_c) + G_1^*(-f-f_c)K^*(-f-f_c)]\end{aligned} \tag{4.25}$$

但是，因 $G_1(f-f_c)$ 在 $-f_c$ 附近的频域上为零，而 $K^*(-f-f_c)$ 非零，故 $G_1(f-f_c)K^*(-f-f_c)=0$。也就是说，因为 $G_1(f)$ 和 $K(f)$ 仅在 $f=0$ 附近有非零谱(即基带，如图 4.3(d) 所示)，故 $G_1(f-f_c)$ 和 $K^*(-f-f_c)$ 间没有频谱混叠。同样，$G_1^*(-f-f_c)K(f-f_c)=0$。因此，式(4.25)变为：

$$\begin{aligned}&[\tfrac{1}{2}G_2(f-f_c)] + [\tfrac{1}{2}G_2^*(-f-f_c)]\\&\quad= [\tfrac{1}{2}G_1(f-f_c)\tfrac{1}{2}K(f-f_c)] + [\tfrac{1}{2}G_1^*(-f-f_c)\tfrac{1}{2}K^*(-f-f_c)]\end{aligned} \tag{4.26}$$

即 $\frac{1}{2}G_2(f) = \frac{1}{2}G_1(f)\frac{1}{2}K(f)$，这与式(4.23)等价。将式(4.23)两端取傅里叶逆变换，即得式(4.22)。

这个定理表明，任何一个带通滤波器系统都可用如图 4.3(c) 所示的等效低通滤波器来描述

和分析。图 4.3(d)示出了一个典型的等效低通频率响应特性。描述等效低通滤波器的公式通常比带通滤波器的简单得多，因此等效低通滤波器的系统模型非常有用。由于在等效低通滤波器特性中高频分量很小，因此在计算机编程时可以据此用采样来模拟带通通信系统(这将在 4.6 节中讨论)。正如习题 4.17 和图 P4.17 所示，具有复冲激响应的等效低通滤波器可用具有实冲激响应的 4 个低通滤波器实现。但是，如果带通滤波器的频率响应是关于 $f=f_c$ Hermitian 对称的，则只需要两个具有实冲激响应的低通滤波器即可实现。

线性带通滤波器使输出的相位调制 $\theta_2(t)=\angle g_2(t)$ 发生变化，成为输入复包络的幅度调制 $R_1(t)=|g_1(t)|$ 的函数，这称为 AM-PM 转换。同样，由于输入 $\theta_1(t)$ 上的 PM 调制，滤波器可以在输出的幅度调制 $R_2(t)$ 上产生变化，这称为 PM-AM 转换。

因为 $h(t)$ 表示线性滤波器，则 $g_2(t)$ 就是 $g_1(t)$ 线性滤波后的结果。然而，由于 $\theta_2(t)$ 和 $R_2(t)$ 是 $g_2(t)$ 的非线性函数，所以 $\theta_2(t)$ 和 $R_2(t)$ [它们分别为 $g_2(t)$ 的 PM 和 AM 部分]是 $g_1(t)$ 非线性滤波的结果。非线性失真的分析过程非常复杂。尽管出版了许多有关此方面的分析著作，但没有令人十分满意的。Panter[1965]在其著作中用了三章的篇幅对这些技术中的一部分进行了总结，并给读者推荐了一篇经典论文[Bedrosian 和 Rice,1968]。实际系统中出现的非线性现象会导致非线性失真和 AM-PM 转换效应。非线性效应可用包括幂级数在内的几种方法来分析，这将在本章后续的放大器一节中进行讨论。如果要分析带通系统的非线性效应，采用切比雪夫(Chebyshev)变换的傅里叶级数的方法比较有用[Spilker,1977]。

4.5.2　线性失真

在 2.6 节讨论了无失真传输的一般条件。对线性带通滤波器(信道)来说，一些不太严格的条件就可满足要求。保证带通信号无失真传输的信道传输函数为 $H(f)=|H(f)|e^{j\theta(f)}$。它需要满足以下要求：

- 幅度响应为常数，即

$$|H(f)| = A \tag{4.27a}$$

  式中，A 是一个正实常数。
- 相位响应的导数为常数，即

$$-\frac{1}{2\pi}\frac{d\theta(f)}{df} = T_g \tag{4.27b}$$

  式中，T_g 是常数，称为复包络延迟，更准确地说，称为群延迟，且 $\theta(f)=\angle H(f)$。

以上过程如图 4.4 所示。式(4.27a)等同于式(2.150a)的基本要求，但式(4.27b)没有式(2.150b)严格。即若式(2.150b)满足，则式(4.27b)也满足，式中 $T_d=T_g$；但是，若式(4.27b)满足，式(2.150b)不一定满足。这是因为式(4.27b)积分后得

$$\theta(f) = -2\pi f T_g + \theta_0 \tag{4.28}$$

式中，θ_0 是相移常数，如图 4.4(b)所示。若 θ_0 不为 0，式(2.150b)就不能满足。

由此可知，式(4.27a)和式(4.27b)是带通信号无失真传输的充分条件。由式(4.27a)和式(4.28)可得，信道(或滤波器)的传输函数为：

$$H(f) = Ae^{j(-2\pi f T_g+\theta_0)} = (Ae^{j\theta_0})e^{-j2\pi f T_g} \tag{4.29}$$

若带通信道的输入由下式表示：

$$v_1(t) = x(t)\cos\omega_c t - y(t)\sin\omega_c t$$

那么由式(4.29),并注意到 $e^{-j2\pi fT_g}$产生的 T_g 延迟，可得信道的输出为:

$$v_2(t) = Ax(t-T_g)\cos[\omega_c(t-T_g)+\theta_0] - Ay(t-T_g)\sin[\omega_c(t-T_g)+\theta_0]$$

再由式(4.28)可得:

$$v_2(t) = Ax(t-T_g)\cos[\omega_c t+\theta(f_c)] - Ay(t-T_g)\sin[\omega_c t+\theta(f_c)]$$

这里利用式(2.150b)，并将 $f=f_c$ 代入得:

$$\theta(f_c) = -\omega_c T_g + \theta_0 = -2\pi f_c T_d$$

因此，输出带通信号可描述为:

$$v_2(t) = Ax(t-T_g)\cos[\omega_c(t-T_d)] - Ay(t-T_g)\sin[\omega_c(t-T_d)] \tag{4.30}$$

式中，载波上的调制分量(即 x 和 y)有了群时延 T_g，载波分量有了载波时延 T_d。因为 $\theta(f_c)=-2\pi f_c T_d$，其中 $\theta(f_c)$ 为载波相移，故 T_d 也称为相位延迟。式(4.30)表明，带通滤波器将输入复包络(即输入信息)延迟了 T_g 时间，同时载波延迟了 T_d 时间。当式(4.27a)和式(4.27b)满足时，信息就是无失真传输。注意，除非 θ_0 为0，否则 T_g 不等于 T_d。

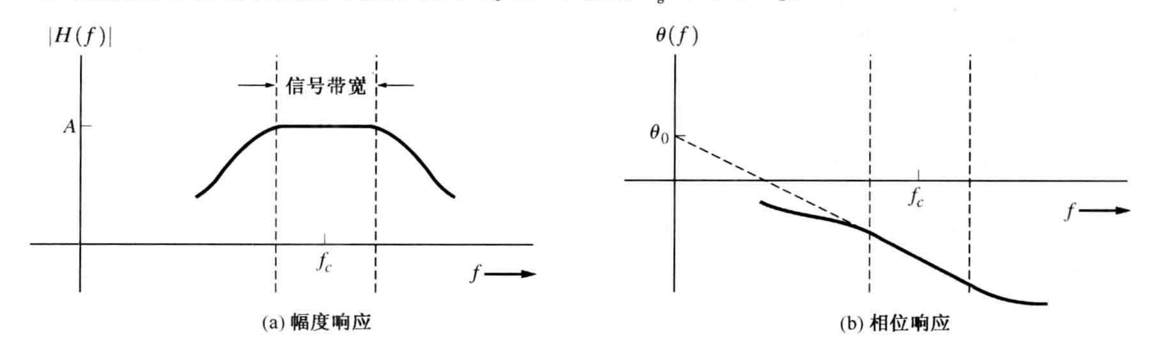


图4.4　无失真带通信道的传输特性

总体来说，不论是基带信号还是带通信号，其无失真传输的条件一般由式(2.150a)和式(2.150b)给出。然而，对带通信号来说，式(2.150b)过于严格，可用式(4.27b)代替。这时除非 $\theta_0=0$，否则 $T_d \neq T_g$，其中 T_d 为载波或相位延迟，T_g 为包络或群延迟。对无失真带通传输而言，只需要求传输函数在信号带宽上具有常数幅度和常数相位导数特性即可。

例题4.4　*RC* 低通滤波器的群时延

利用式(4.27b)，计算并绘制 *RC* 低通滤波器的群时延。将这个群时延与例题2.18中得到的 *RC* 低通滤波器的群时延进行比较。解题过程及结果见 M 文件 Example4_04.m。

4.6　带通信号的抽样定理

软件无线电系统中及通信系统仿真时要用到抽样的概念。若要求抽样速率等于或大于奈奎斯特速率($f_s \geq 2B$，B 是射频信号频谱中的最高频率值)，这个值有时不太合理。例如，考虑载波频率为 $f_c=6$ GHz 的卫星通信系统，它所需的抽样速率至少为12 GHz。幸运的是，对这种类型的信号(带通信号)，可以证明其抽样速率与绝对频率值无关而只依赖于信号的带宽。也就是说，可以从信号的复包络抽样值中重建信号。

带通信号抽样定理　若(实)带通波形的频谱在频率域 $f_1<|f|<f_2$ 上非零，其传输带宽 B_T 取为绝对带宽 $B_T=f_2-f_1$，则这个波形可从抽样值中重建的条件是抽样速率为:

$$f_s \geqslant 2B_T \tag{4.31}$$

例如，式(4.31)表明如果前面讨论的 6 GHz 带通信号的带宽为 10 MHz，则只需要 20 MHz 的抽样速率而不是 12 GHz。这样可节省 3 个数量级的抽样速率。

对式(4.31)带通信号抽样定理的证明可通过对带通波形的正交表达式(2.158)和式(2.160)采用奈奎斯特抽样定理得到，即

$$v(t) = x(t)\cos\omega_c t - y(t)\sin\omega_c t \tag{4.32}$$

令 f_c 为带宽的中心，则 $f_c=(f_2+f_1)/2$。由式(4.3)[①]知，$x(t)$ 和 $y(t)$ 均为基带信号，绝对带限于 $B=B_T/2$。又由式(2.160)知表示基带信号所需的抽样速率为 $f_b \geqslant 2B=B_T$。式(4.32)变为：

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\left[x\left(\frac{n}{f_b}\right)\cos\omega_c t - y\left(\frac{n}{f_b}\right)\sin\omega_c t\right]\left[\frac{\sin\{\pi f_b[t-(n/f_b)]\}}{\pi f_b[t-(n/f_b)]}\right] \tag{4.33}$$

对一般情况而言，抽样值 $x(n/f_b)$ 和 $y(n/f_b)$ 是相互独立的，每个 n 值都能得到两个抽样值。因此，$v(t)$ 的总的抽样速率为 $f_s=2f_b \geqslant 2B_T$。这就是式(4.31)带通抽样频率的要求。x 和 y 的抽样值由 $v(t)$ 在 $t\approx(n/f_b)$ 处抽样得到。这里，要略微调整 t 的值，使在 x 和 y"准确"的抽样时间 t 上分别有 $\cos\omega_c t=1$，$\sin\omega_c t=-1$。也就是说，对 $t\approx(n/f_b)$[②]，当 $\cos\omega_c t=1$(即 $\sin\omega_c t=0$)时，$v(n/f_b)=y(n/f_b)$；当 $\sin\omega_c t=-1$(即 $\cos\omega_c t=0$)时，$v(n/f_b)=y(n/f_b)$。如式(4.76)所示，可以采用两个正交乘积检波器先产生 $x(t)$ 和 $y(t)$，然后对 $x(t)$ 和 $y(t)$ 基带信号分别以速率 f_b 抽样，总的等效抽样速率仍是 $f_s=2f_b\geqslant 2B_T$。

在该定理的应用中，假设带通信号 $v(t)$ 是由式(4.33)重建的。因为抽样值不是以均匀间隔 T_s 成对选取的(x 和 y 分量)，这就意味着对 $v(t)$ 采用了非均匀间隔同步抽样。只要 f_1 或 f_2 是 f_s 的谐波，$v(t)$ 自身的均匀间隔样本就可以以 $2B_T$ 的最小抽样频率均匀抽样[Hsu,1999;Taub 和 Schilling,1986]。否则，就需要以不小于 $2B_T$ 又不大于 $4B_T$ 的抽样频率[Hsu,1999;Taub 和 Schilling,1986]进行抽样。这种情况发生在采用冲激脉冲抽样时[见式(2.173)]，这是因为必须合理选择 f_s 的值，使得当带通频谱转换为 f_s 的各次谐波时，在 $f_1<f<f_2$ 带宽上没有频谱混叠。

带通维数定理　假设带通波形只在频率区间 $f_1<|f|<f_2$ 上非零，其传输带宽 $B_T \ll f_1$ 取为绝对带宽 $B_T=f_2-f_1$，且 B_{T1}。则该波形在 T_0 秒区间上可由下式给出的 N 个独立信息完全确定：

$$N = 2B_T T_0 \tag{4.34}$$

式中，N 称为确定该波形所需的维数。

我们经常用计算机来仿真分析通信系统。带通维数定理表明，在 T_0 秒区间上对宽度为 B_T Hz的带通信号进行表示时，至少需要有 $N=2B_TT_0$ 个抽样值。有关带通信号抽样定理的更多细节描述请见助学例题 SA4.5 中的讨论。

4.7　接收信号加噪声

考虑带通信号的表示和信道的滤波作用，可得到接收端信号加噪声的模型。参考图 4.1，发射机的输出信号为：

---

① 此处原书为式(4.8)，似有误。——译者注

② 原书为 n/f_s，有误。——译者注

$$s(t) = \mathrm{Re}[g(t)e^{j\omega_c t}]$$

式中, $g(t)$是所采用某种类型的调制信号的复包络(见表4.1)。若信道是线性时不变的, 则接收端得到的信号加噪声为:

$$r(t) = s(t) * h(t) + n(t) \tag{4.35}$$

式中, $h(t)$是信道的冲激响应, $n(t)$是接收机输入端的噪声。此外, 若信道还是无失真的, 其传输函数由式(4.29)给出, 则接收机输入端的信号加噪声为:

$$r(t) = \mathrm{Re}[Ag(t - T_g)e^{j(\omega_c t + \theta(f_c))} + n(t)] \tag{4.36}$$

式中, A 为信道增益(通常是小于 1 的正数), T_g 是信道群延迟, $\theta(f_c)$是由信道引起的载波相移。实际系统中, T_g 和 $\theta(f_c)$的值通常是不知道的。因此, 若接收机需要 T_g 和 $\theta(f_c)$的值去检测传输的信息的话, 接收机电路(如数字信号传输中的比特同步器)必须估计接收载波相位 $\theta(f_c)$ 和群延迟的值。假设由于忽略这些效应引起接收机电路产生错误的话, 则可以认为输入接收机的信号和噪声为:

$$r(t) = \mathrm{Re}[g(t)e^{j\omega_c t}] + n(t) \tag{4.37}$$

其中的信道滤波效应(如果有的话)包括在复包络 $g(t)$的改变之中。$g(t)$中的常数 A_c(见表4.1)也可改变以体现信道的衰减效应。有关这一过程的更详细的内容见 8.6 节中的讨论。

4.8 滤波器及放大器分类

4.8.1 滤波器

滤波器是接收输入波形, 改变其频谱, 产生输出波形的设备。对滤波器有几种分类方法: 一种是根据结构来分, 如是否采用 LC 元件或石英晶体元件。另一种是根据实现滤波器的函数来分, 如巴特沃思和切比雪夫响应(见后面的定义)。本节将讨论这两种分类方法。

滤波器采用储能元件获得频率鉴别能力。对任何实际滤波器来说, 储能元件都不是理想的。例如, 实际电感器除电感外, 还具有串联电阻; 实际电容器除电容外, 还具有并联(泄漏)电阻。那么, 一个很自然的问题是: 电路元件或滤波器的品质因数 Q 是什么? 遗憾的是, 在技术文献中, 存在着两种不同的定义滤波器品质的方法。第一种定义方法与电路的储能效率有关[Ramo, Whinnery 和 vanDuzer, 1967, 1984], 品质因数定义为:

$$Q = \frac{2\pi(\text{在一个周期内存储的最大能量})}{\text{每周期内的损耗能量}} \tag{4.38}$$

这时, 储能元件越接近理想, Q 值越大。即理想电感 L 和理想电容 C 的品质因数为无限大。第二种定义方法与电路的频率选择性有关, 品质因数定义为:

$$Q = \frac{f_0}{B} \tag{4.39}$$

式中, f_0 为谐振频率, B 为 3 dB 带宽。这时品质因数 Q 越大, 频率选择性越好, 这是因为对给定的f_0 来说, 带宽将变小。

总的说来, 式(4.38)计算得到的 Q 值与式(4.39)得到的 Q 值不同。但是对于由电压源驱动的 RLC 串联谐振电路和电流源驱动的 RLC 并联谐振电路[Nilsson, 1990]来说, 两种方法得到的 Q 值是相同的。对带通滤波器的应用来说, 频率选择性是所需的品质, 因此常用到定义式(4.39)。而且, 式(4.39)在实验室中易于测量。如果设计一个中心频率为f_0, 3 dB 带宽为 B 的无源滤波器

(不一定是单调谐电路)，每个电路元件都需要有一个比 f_0/B 大得多的 Q 值。因此，设计实际滤波器时，首先要回答以下问题：滤波器元件所需的 Q 值是多少？哪些元件具有这些 Q 值？表 4.2 回答了这些问题。表中根据滤波器中储能元件的类型将滤波器分类列出，并给出了元件的标准 Q 值。由于导线上的寄生电容和电感在高频段极大地影响频率响应，因此使用集总①电感和电容的滤波器在 300 MHz 以上频段不易实现。有源滤波器采用具有 RC 电路元件的运算放大器。因为运放在工作频段上必须有大的开环增益，所以这种滤波器只在 500 kHz 以下可实现。对甚低频滤波器，通常选择 RC 有源滤波器而非 LC 无源滤波器。这是因为在这一频率范围，LC 元件的体积较大而电感的 Q 值较小。有源滤波器的电阻和电容在芯片上要占据很大的位置，故不易在集成电路中实现。在集成电路(IC)设计中，使用开关电容可降低这一难度。这时电阻被由数字时钟信号控制的一组电子开关和电容器取代［Schaumann 等，1990］。

表 4.2　滤波器结构技术

结构类型	元件或滤波器描述	中心频率范围	固有品质因数 Q (标准)	滤波器应用[1]
LC(无源)		dc－300 MHz	100	音频、视频、IF 及 RF
滤波器 有源及开关电容		dc－500 kHz	200[2]	音频
晶体滤波器	石英晶体	1 kHz～100 MHz	100 000	IF
机械滤波器	换能器 杆 碟片	50～500 kHz	1000	IF
陶瓷滤波器	陶瓷碟片 电极	10 kHz～10.7 MHz	1000	IF
声表面波滤波器 (SAW)	一个区域 指状金属片 压电基底 指状交叉区域	10～800 MHz	[3]	IF 和 RF
传输线滤波器	$\lambda/4$	UHF 和微波	1000	RF
空腔滤波器		微波	10 000	RF

[1]：IF，中频；RF，射频(无线电频率)(参见 4.16 节)。

[2]：带通 Q 值。

[3]：取决于设计：$N=f_0/B$，N 是区域的个数，f_0 是中心频率，B 是带宽。有载品质因数为 18 000。

① 与在传输线中发现的连续分布的 RLC 元件相比，集总元件是指单个的电阻、电感和电容。

晶体滤波器由石英晶体元件制成。这些石英晶体元件作为串联谐振电路与由管脚引起的电容并联。因此，如同串联谐振一样，也可能实现并联谐振模式。工作频率在 100 MHz 以上时石英元件太小以至难以制造，低于 1 kHz 时元件体积过大。由于其元件的固有高品质因数 Q，晶体滤波器的性能很好，但晶体滤波器比 LC 滤波器和陶瓷滤波器贵得多。

机械滤波器通过机械系统的振动进行滤波。机械系统通常由沿一根杆间隔一定距离放置的一组碟片组成，杆的两端各有一个换能器。输入端的换能器将电信号转换为机械振动，输出端相反。每个碟片都是一个具有高品质因数 Q 值的并联谐振电路的机械等效。由于输入/输出换能器的效率不够高，因此机械滤波器通常有较高的插入损耗。

陶瓷滤波器由压电陶瓷碟片构成。碟片相对的两面各与一个电镀电极连接。陶瓷元件的性能同上述的晶体滤波器元件的性能相似。但陶瓷元件的 Q 值较低。陶瓷滤波器的优点是一般情况下能在比晶体滤波器耗费小的情况下提供足够好的性能。

声表面波滤波器(SAW)利用在压电基底表面上产生并传输的声波进行滤波。交叉的指状金属片覆盖在基底上。由于压电效应，指状金属片上的电压信号转换为声信号(或相反)。除了进行输入/输出耦合外，指状金属片的几何形状还决定了滤波器的频率响应(Dorf,1993,pp.1073-1074)。声表面波滤波器的插入损耗比晶体滤波器和陶瓷滤波器的略大一些。但 SAW 易于形成不同的传输函数特性和由可控衰减特性形成的宽带特性使其更受人青睐。在现代电视机的生产中，这个技术用于提供优良的 IF 放大特性。

SAW 装置还可接出抽头，形成工作在射频频段的横向滤波器。在低频端，可用电荷转移器件(CTD)形成横向滤波器[Gersho,1975]。

传输线滤波器利用传输线的开路或短路谐振性质进行滤波。这些滤波器在 UHF 和微波频段有用。这时波长足够小，可形成尺寸合理的滤波器。同样，空腔的谐振效应可用于形成工作在微波频段的滤波器。这时空腔的尺寸很小，可以实现。

滤波器还可以用实现它的传输函数的类型表征。用集总电路元件构成的线性滤波器的传输函数可写作以下两个多项式的商的形式：

$$H(f) = \frac{b_0 + b_1(\mathrm{j}\omega) + b_2(\mathrm{j}\omega)^2 + \cdots + b_k(\mathrm{j}\omega)^k}{a_0 + a_1(\mathrm{j}\omega) + a_2(\mathrm{j}\omega)^2 + \cdots + a_n(\mathrm{j}\omega)^n} \tag{4.40}$$

式中，a_i 和 b_i 均是元件值的函数，$\omega = 2\pi f$。参数 n 称为滤波器的阶数。改变各参数的值，即可获得所需的传输函数特性。表 4.3 列出了三种不同的滤波器特性及确定它们的最优化准则。如果需要采用最少的电路元件且使传输函数具有锐衰减特性，可采用切比雪夫滤波器。贝塞尔滤波器常用于数据传输，这是因为它在通带上能维持线性相位响应，从而可保持冲激波形。巴特沃思滤波器通常是切比雪夫和贝塞尔滤波器特性的折中。

表 4.3 一些滤波器特性

类　型	最优化准则	低通滤波器的传输特性[1]
巴特沃思滤波器	最大平顶化：当 $f \to 0$ 时，$\lvert H(f)\rvert$ 尽可能多使各次导数趋于0	$\lvert H(f)\rvert = \dfrac{1}{\sqrt{1+(f/f_b)^{2n}}}$
切比雪夫滤波器	对于在 $\lvert H(f)\rvert$ 的特性通带上给定的峰间波纹电压，$\lvert H(f)\rvert$ 衰	$\lvert H(f)\rvert = \dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 C_n^2(f/f_b)}}$ ε = 设计常数 $C_n(f)$ 是以下递减 程度是所有 n 阶滤波器中最快的。$C_n(x) = 2xC_{n-1}(x) - C_{n-2}(x)$ 归关系定义的 n 阶切比雪夫多项式 $C_0(x) = 1$ 和 $C_1(x) = x$

[1]：f_b 是滤波器截止频率。

（续表）

类　型	最优化准则	低通滤波器的传输特性
贝塞尔滤波器	尽量在通带上保持线性相位	$H(f)=\dfrac{K_n}{B_n(f/f_b)}$ K_n 是使 $H(0)=1$ 的常数，贝塞尔递归关系为 $B_n(x)=(2n-1)B_{n-1}(x)-x^2B_{n-2}(x)$， 其中 $B_0(x)=1$ 和 $B_1(x)=1+\mathrm{j}x$

[1]：f_b 是滤波器截止频率。

有关滤波器的讨论很多，在此不能一一尽述。例如，随着廉价微处理器的出现，数字滤波和数字信号处理变得越来越重要[Oppenheim 和 Schafer,1975,1989]。

更多的关于模拟滤波器在通信系统中的应用，见 owro 和 Stephen son[1979]。

4.8.2 放大器

为了便于分析，电子电路，特别是放大器，可分为两大类：非线性和线性放大器。2.6 节中定义了线性的含义。在实际应用中，甚至在小(电压和电流)信号电平上，所有电路在某种程度上都是非线性的，在大信号电平上非线性度更高。对线性电路分析通常在小信号前提下进行，因为信号若足够小，则可以极大地简化数学运算，而得到的结果也是精确的。

非线性放大器和线性放大器还可进一步分为有记忆电路和无记忆电路。有记忆电路具有电感和电容效应，使得当前时刻的输出是当前时刻输入和前一时刻输出的函数。若电路是无记忆的，则当前时刻输出仅是当前时刻输入的函数。

在初级电气工程课程中，最初假设电路是线性无记忆的(电阻性电路)；然后再假设它是线性有记忆的(*RLC* 电路)。线性有记忆放大器的传输函数可写成输出信号的傅里叶变换与输入信号的傅里叶变换的比值。如 2.6 节讨论的那样，无失真放大器的传输函数为 $Ke^{-j\omega_c T_d}$，式中，K 是放大器电压增益，T_d 是输出与输入波形间的延迟。如果线性放大器的传输函数不是这一形式，则输出信号相对于输入信号有线性失真。

4.9 非线性失真

除了线性失真外，实际放大器还产生非线性失真。为了在分析非线性效应的同时保持一个易于处理的数学模型，在以下分析中假设放大器是无记忆的。因此，在时间域上当前输出仅是当前输入的函数。若放大器是线性的，输入和输出之间的关系为：

$$v_0(t)=Kv_i(t) \tag{4.41}$$

式中，K 是放大器的电压增益。实际应用中，当输入信号幅度增大时，输出在某些值上饱和，如图 4.5 中的非线性输出-输入特性所示。输出-输入特性可由 $v_i=0$ 处的泰勒级数展开表示(即麦克劳林序列)：

$$v_0=K_0+K_1v_i+K_2v_i^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}K_nv_i^n \tag{4.42}$$

其中，

$$K_n=\frac{1}{n!}\left|\left(\frac{\mathrm{d}^nv_0}{\mathrm{d}v_i^n}\right)\right|_{v_i=0} \tag{4.43}$$

若 K_2、K_3…非零，输出信号会出现非线性失真。K_0 是输出直流偏置，K_1v_i 是 1 次(线性)项，$K_1v_i^2$ 是 2 次(平方律)项，等等。只要放大器是接近线性的，K_1 就比 K_2、K_3…大。

与放大器输出伴随产生的谐波失真是由在输入端加入的单音正弦测试音信号决定的。设输入的测试音信号可表示为:

$$v_i(t) = A_0 \sin \omega_0 t \tag{4.44}$$

2 次项输出为:

$$K_2(A_0 \sin \omega_0 t)^2 = \frac{K_2 A_0^2}{2}(1 - \cos 2\omega_0 t) \tag{4.45}$$

这表明 2 次失真产生了直流项 $K_2A_0^2/2$(附加于任何直流偏置上)和幅度为 $K_2A_0^2/2$ 的 2 次谐波失真项。一般来说,对单音信号输入,输出为:

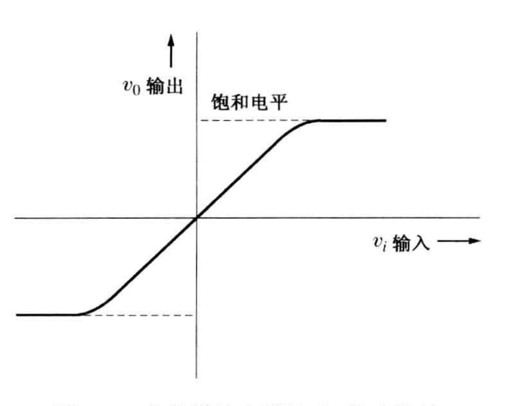


图 4.5 非线性放大器输出-输入特性

$$v_{out}(t) = V_0 + V_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) + V_2 \cos(2\omega_0 t + \varphi_2) + V_3 \cos(3\omega_0 t + \varphi_3) + \cdots \tag{4.46}$$

式中,V_n 是在频率 nf_0 Hz 处的输出峰值。由此可以定义全部谐波失真(THD)为:

$$\mathrm{THD}(\%) = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} V_n^2}}{V_1} \times 100 \tag{4.47}$$

放大器的 THD 可由失真分析测仪得,或由式(4.47)计算得到,其中 V_n 可由谱分析仪测得。

采用双音信号测试可得到放大器的互调失真(IMD)。若输入信号为:

$$v_i(t) = A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t \tag{4.48}$$

则 2 次项输出为:

$$K_2(A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t)^2 = K_2(A_1^2 \sin^2 \omega_1 t + 2A_1A_2 \sin \omega_1 t \sin \omega_2 t + A_2^2 \sin^2 \omega_2 t)$$

该式右边第 1 项和最后一项在频率 $2f_1$ 和 $2f_2$ 上产生谐波失真,交叉乘积项产生互调失真。只有两个输入项都存在时该项才存在,因此得名互调失真。那么 2 次互调失真为:

$$2K_2A_1A_2 \sin \omega_1 t \sin \omega_2 t = K_2A_1A_2\{\cos[(\omega_1 - \omega_2)t] - \cos[(\omega_1 + \omega_2)t]\}$$

显然,互调失真产生和频及差频。

3 次项输出为:

$$\begin{aligned} K_3 v_i^3 &= K_3(A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t)^3 \\ &= K_3(A_1^3 \sin^3 \omega_1 t + 3A_1^2 A_2 \sin^2 \omega_1 t \sin \omega_2 t \\ &\quad + 3A_1 A_2^2 \sin \omega_1 t \sin^2 \omega_2 t + A_2^3 \sin^3 \omega_2 t) \end{aligned} \tag{4.49}$$

该式右边得第 1 项和最后 1 项产生谐波失真,第 2 项为交叉乘积项,成为:

$$\begin{aligned} 3K_3A_1^2A_2 \sin^2 \omega_1 t \sin \omega_2 t &= \tfrac{3}{2}K_3A_1^2A_2 \sin \omega_2 t(1 - \cos 2\omega_1 t) \\ &= \tfrac{3}{2}K_3A_1^2A_2\{\sin \omega_2 t - \tfrac{1}{2}[\sin(2\omega_1 + \omega_2)t \\ &\quad - \sin(2\omega_1 - \omega_2)t]\} \end{aligned} \tag{4.50}$$

同样,式(4.49)的第 3 项为:

$$\begin{aligned} &3K_3A_1A_2^2 \sin \omega_1 t \sin^2 \omega_2 t \\ &= \tfrac{3}{2}K_3A_1A_2^2\{\sin \omega_1 t - \tfrac{1}{2}[\sin(2\omega_2 + \omega_1)t - \sin(2\omega_2 - \omega_1)t]\} \end{aligned} \tag{4.51}$$

式(4.50)和式(4.51)的最后两项是非谐波频率上的交调项。对带通放大器来说,若其 f_1 和 f_2

在通带内，且 f_1 很接近 f_2（即 $f_1 \approx f_2 \gg 0$），则在 $2f_1+f_2$ 和 $2f_2+f_1$ 上产生的失真项通常落在通带外，不会产生影响。但 $2f_1-f_2$ 和 $2f_2-f_1$ 项会落在通带内，与所需的频率 f_1 和 f_2 很接近，这些是用在发射机和接收机中的射频带通放大器要考虑的主要失真。

如式(4.50)和式(4.51)所示，想要得到输出信号随 A_1 和 A_2 线性变化，而互调失真(IMD)项的输出随 $A_1^2A_2$ 和 $A_1A_2^2$ 变化，因此若 A_1 或 A_2 增加得足够大的话，互调失真(IMD)将变得很大。当然，使互调乘积项成为问题所需的确切输入信号电平依赖于 K_3 和 K_1 的相对值。输入两个相同幅度的测试音信号（即 $A_1=A_2=A$），可计算得到放大器的 3 次截止点，该值可确定上述的输入电平值。理想线性放大输出的幅度为 K_1A，每个 3 次互调乘积项幅度为 $3K_3A^3/4$。理想输出与互调失真(IMD)输出的比值为：

$$R_{\text{IMD}} = \frac{4}{3}\left(\frac{K_1}{K_3A^2}\right) \tag{4.52}$$

如图 4.6 所示，输入截止点定义为使 R_{IMD} 为 1 的输入值。图中实线曲线由测量得到，即由两个正弦信号产生器产生测试音，用频谱分析仪测量理想输出（在 f_1 和 f_2 上）及互调失真乘积项（在 $2f_1-f_2$ 和 $2f_2-f_1$ 上）。截止点是将理想输出曲线和互调失真曲线(IMD)的线性部分（以分贝为单位）外推相交后得到的虚点。在进行测量时，理想输出（在 f_1 或 f_2 上的输出）实际已饱和。这是因为泰勒级数中的更高次项在 f_1 和 f_2 上的成分被从线性放大输出中除去。例如，若 K_3 为负，式(4.51)中在 f_1 上出现的主要项就被从在 f_1 上的线性放大成分上减去，因此产生了 f_1 上的正弦成分的饱和特性。对于具有如图 4.6 所示的非线性特性的放大器来说，射频输入的截止点出现在 −10 dBm。对于像警用步话机这样的接收机，其过载特性由 3 次截止点表征。其 dBm 值是对应于该截止点的天线输入端的射频信号电平。接收机工作时，输入信号电平应比该值小得多，以使接收机电路产生的不理想干扰交调信号保持在一个可接收的水平上。对发射机来说，截止点就是对应于该截止点的输出信号电平。

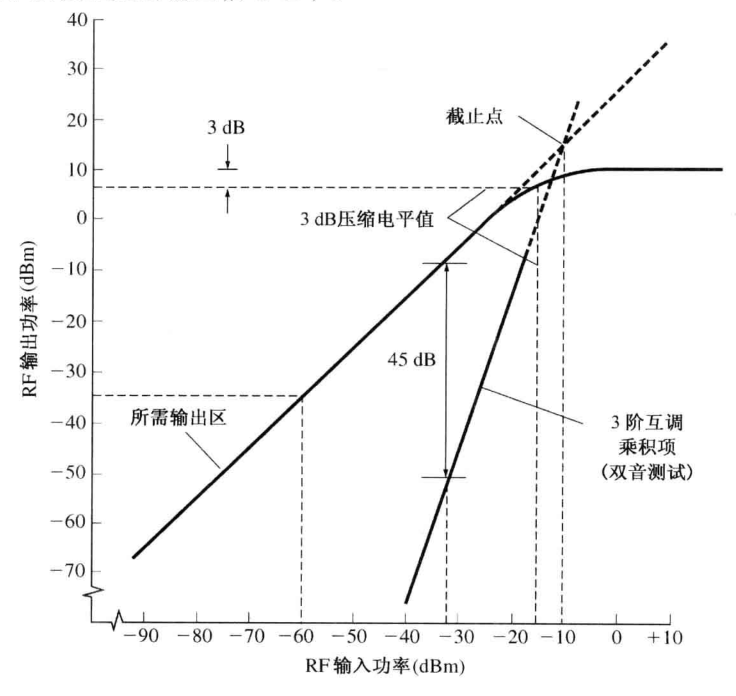


图 4.6　放大器的输出特性

图4.6也示出了放大器的其他特性。由于 -60 dBm 的输入产生 -35 dBm 的输出，因此在线性区域放大器的增益为25 dB。对 -15 dBm 的输入，输出被压缩了3 dB。因此，只有输入值小于 -15 dBm 时，放大器才称为是线性的。而且，若要三次互调失真乘积项比理想输出低至少45 dB[①] 的话，则输入值应低于 -32 dBm。

非线性放大器输出端的失真乘积项中的另一项称为交叉调制。当分析双音测试信号产生的三次乘积项时即可得交叉调制。如式(4.50)和式(4.51)所示，$\frac{3}{2}K_3A_1^2A_2\sin\omega_2 t$ 和 $\frac{3}{2}K_3A_1A_2^2\sin\omega_1 t$ 就是交叉调制。让我们来分析一下 $\frac{3}{2}K_3A_1^2A_2\sin\omega_2 t$ 这一项。若令输入信号 $A_1\sin\omega_1 t$ 的幅度有所变化，使其就像AM信号 $A_1[1+m_1(t)]\sin\omega_1 t$ 一样，式中 $m_1(t)$ 是调制信号，则三次失真乘积项为：

$$\frac{3}{2}K_3A_1^2A_2[1+m_1(t)]^2\sin\omega_2 t \tag{4.53}$$

因此，在载频 f_1 上的AM信号变为了一个频率为 f_2 的失真调制信号。也就是说，如果两个信号通过一个在输出端具有三次失真乘积项的放大器，而两信号之一是AM调制，则另一个信号的放大输出由于失真调制而出现某种程度的幅度调制。这种现象称为交叉调制。

无源电路和有源电路一样可能具有非线性特性，因此会产生失真产物。例如，假设两个AM广播站在具有金属屋顶且顶上有生锈的结合点的谷仓和房屋附近信号很强。屋顶起到天线的作用，接收和再辐射射频(RF)能量，而生锈的结合点起到二极管(非线性无源电路)的作用。在谐波频率和互调频率上的信号会被发射出来并干扰其他的通信信号。而且，交叉调制乘积项也会被发射出来。也就是说，一个广播站产生的失真调制，会被调谐在其他广播站频率上的广播接收机(位于生锈屋顶附近)听到。

当放大器用于产生大功率信号，如在发射机中时，理想的情况是使放大器具有高效率以降低功率耗费，减少冷却设备消耗的能量。放大器的效率定义为输出信号功率与输入直流信号功率的比值。根据偏置电平及使用的电路结构不同，放大器可分为若干类。其中几类为：A类、B类、C类、D类、E类、F类、G类、H类和S类[Krauss, Bostian 和 Raab, 1980; Smith, 1998]。对A类放大器，应将其放大级偏置调整到使在输入测试音的整个周期内电路上都有电流流动。对B类放大器，其偏置设置到使在外加信号周期的180°内电路里有电流流动。因此，若将B类放大器用于基带信号线性放大，如高保真系统中的音频功率放大时，需将两个放大器连接成推拉结构，以使每个放大器在输入信号的各半个周期上交替地传输电流。在B类带通信号的线性放大过程中，带宽只占工作频率很小的百分比。由于调谐电路可在输入信号的另半个周期上提供输出电流，因此只需要一个有源器件。对C类放大器，偏置的设置使得(集电极或阳极)电流以脉冲形式传送，其脉宽通常远小于输入信号周期的一半。遗憾的是，当使用C类放大器工作时，就算放大器具有调谐电路功能，能在信号周期的非传送部分提供电流的带通射频放大，也不可能进行线性放大。因此，如果试图用C类放大器或其他类型的非线性放大器放大AM信号，输出端必定会产生失真。但是，由于非线性放大器保持了输入信号的过零点，因此具有实常数包络的射频信号，如FM信号，就可无失真地放大。

在电流传输时间内信号功率耗费在器件本身上，导致放大器效率很低。因此，C类放大器效率主要是由有源器件的导通角决定的。C类放大器效率最高，理想情况下效率因子为100%。B类放大器的效率为 $\pi/4\times 100=78.5\%$ 或更少。A类放大器的效率为50%或更少[Krauss, Bostian 和 Raab, 1980]。因为C类放大器效率最高，它通常用于放大常数包络信号，如用于广播的

① 原文为45 dBm，有误。—— 译者注

FM 信号。在专门电路中，D 类、E 类、G 类、F 类、H 类和 S 类放大器通常采用转换技术以获得高效率[Krauss，Bostian 和 Raab，1980；Smith，1998]。

许多种微波放大器(如行波管)是基于速度调制原理工作的。输入微波信号馈入一个慢波结构，它降低了微波信号的传输速度，使其略低于直流电子束的速度。这使动能从电子束转移到微波信号上，因此放大了信号。在这种放大器中，放大机制并不是电流的接通和断开，因此不能被分为 B 类或 C 类。行波管(TWT)在合适的驱动电平上工作时是线性放大器。若驱动电平增加，则效率(射频输出/直流输入)增加，但放大器就成为非线性的了。在这种情况下，为使交调失真不产生影响，应采用常数包络信号如 PSK 和 PM。这经常是卫星转发器(通信卫星中的发射机)的工作模式，通信卫星上太阳能电池价格昂贵，输出功率有限。这在第 8 章的卫星通信一节中还有更详细的讨论。

4.10 限幅器

限幅器是具有饱和输出特性的非线性电路。图 4.5 给出软饱和限幅器特性。图 4.7 给出硬(理想)限幅器特性以及输入波形未滤波时的输出。理想限幅器转移函数等价于具有零参考值的理想比较器的输出-输入特性。图 4.7 中的波形展示了输入信号的幅度变化是如何在输出信号中消失的。带通限幅器是其后跟有一带通滤波器的具有饱和特性的非线性电路。对于理想带通限幅器，由于方波信号的谐波都被滤除，因此滤波输出波形为正弦波。总的来说，利用式(4.1b)，任何带通输入信号(甚至已调信号加噪声)都可用下式表示：

$$v_{in}(t) = R(t)\cos[\omega_c t + \theta(t)] \tag{4.54}$$

式中，$R(t)$是等效实包络，$\theta(t)$是等效相位函数。理想带通限幅器相应的输出为：

$$v_{out}(t) = KV_L\cos[\omega_c t + \theta(t)] \tag{4.55}$$

式中，K 是方波的基波值($4/\pi$)乘以输出(带通)滤波器的增益。该式表明，任何出现在限幅器输入端的 AM 信号，在其输出端都不会出现，但保留了相位函数(即输入的过零点特性保留在输出中)。限幅器经常用于为角度调制设计的接收系统中，如 PSK、FSK 及模拟 FM 系统中，用以消除由于信道噪声或信号衰减引起的接收机输入信号实包络上的变化。

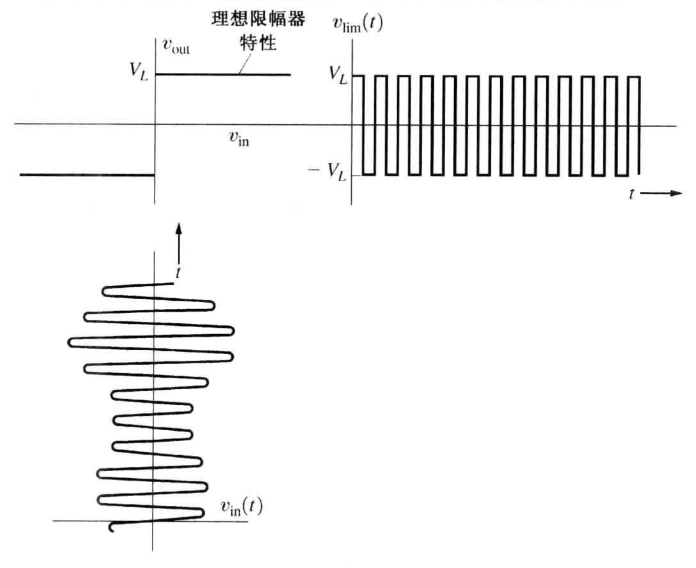


图 4.7 理想限幅器特性及输入波形和未滤波输出波形

4.11 混频器、上变频器和下变频器

理想混频器是数学上起到将两个输入信号相乘作用的电路。通常，其中一个信号是由本地振荡器产生的正弦波，如图4.8所示。

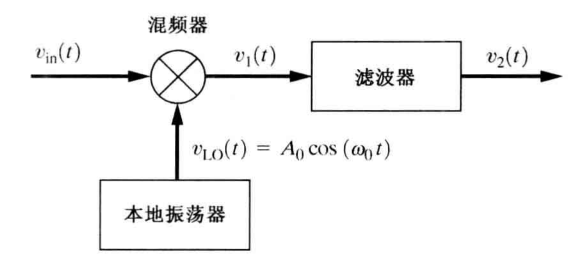


图4.8 后接滤波器的上变频或下变频混频器

混频器用于将输入信号的频率平移。假设输入信号为带通信号，其非零频谱在$f=f_c$附近，那么信号可表示为：

$$v_{in}(t) = \mathrm{Re}\{g_{in}(t)e^{j\omega_c t}\} \tag{4.56}$$

式中，$g_{in}(t)$是输入信号的复包络。理想混频器输出信号为：

$$\begin{aligned} v_1(t) &= [A_0\mathrm{Re}\{g_{in}(t)e^{j\omega_c t}\}]\cos\omega_0 t \\ &= \frac{A_0}{4}[g_{in}(t)e^{j\omega_c t} + g_{in}^*(t)e^{-j\omega_c t}](e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \\ &= \frac{A_0}{4}[g_{in}(t)e^{j(\omega_c+\omega_0)t} + g_{in}^*(t)e^{-j(\omega_c+\omega_0)t} + g_{in}(t)e^{j(\omega_c-\omega_0)t} + g_{in}^*(t)e^{-j(\omega_c-\omega_0)t}] \end{aligned}$$

或

$$v_1(t) = \frac{A_0}{2}\mathrm{Re}\{g_{in}(t)e^{j(\omega_c+\omega_0)t}\} + \frac{A_0}{2}\mathrm{Re}\{g_{in}(t)e^{j(\omega_c-\omega_0)t}\} \tag{4.57}$$

式(4.57)表明，频谱在$f=f_c$附近的输入带通信号已转换(频移)为两个输出带通信号，一个位于上变频频段$f_u=f_c+f_0$，一个位于下变频频段$f_d=f_c-f_0$。如图4.8所示，滤波器用于选择上变频分量或下变频分量。这种混频器与滤波器联合起来消除混频器输出的某一分量的结构通常称为单边带混频器。选择上变频分量通常需要带通滤波器。但选择下变频分量时，根据f_c-f_0的值可采用基带滤波器或带通滤波器。例如，若$f_c-f_0=0$，则需要低通滤波器，输出频谱为基带谱。若$f_c-f_0>0$，且f_c-f_0大于$g_{in}(t)$的带宽，就需要带通滤波器。滤波器输出为：

$$v_2(t) = \mathrm{Re}\{g_2(t)e^{j(\omega_c-\omega_0)t}\} = \frac{A_0}{2}\mathrm{Re}\{g_{in}(t)e^{j(\omega_c-\omega_0)t}\} \tag{4.58}$$

对于这种$f_c>f_0$的情况，可知混频器输入信号$v_{in}(t)$上的调制信号在上、下混频信号中保留了下来。

若$f_c<f_0$，重写式(4.57)，可得：

$$v_1(t) = \frac{A_0}{2}\mathrm{Re}\{g_{in}(t)e^{j(\omega_c+\omega_0)t}\} + \frac{A_0}{2}\mathrm{Re}\{g_{in}^*(t)e^{j(\omega_0-\omega_c)t}\} \tag{4.59}$$

这是由于为了从物理概念上解释谱分量的位置，带通信号表达式指数上的频率应为正值。对这种$f_c<f_0$的情况，下变频信号的复包络是输入信号复包络的共轭。这等价于说两个边带相互交

换了，即输入信号频谱的上边带变成了输出下变频信号的下边带，反之亦然。这可从数学上参阅 $g^*(t)$ 的频谱证明，$g^*(t)$ 的频谱为：

$$\mathscr{F}[g_{in}^*(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g_{in}^*(t)e^{-j\omega t}dt = \left[\int_{-\infty}^{\infty} g_{in}(t)e^{-j(-\omega)t}dt\right]^* = G_{in}^*(-f) \tag{4.60}$$

式中，$-f$ 表明下边带相互交换。共轭表明相位谱反转。

总的来说，上变频器输出信号的复包络为：

$$g_2(t) = \frac{A_0}{2}g_{in}(t) \tag{4.61a}$$

式中，$f_u = f_c + f_0 > 0$。这表明输出和输入信号上的调制信号相同，但输出信号幅度是输入信号的 $A_0/2$ 倍。

对下变频，存在两种情况。当 $f_d = f_c - f_0 > 0$，即 $f_0 < f_c$ 时：

$$g_2(t) = \frac{A_0}{2}g_{in}(t) \tag{4.61b}$$

因为本地振荡器频率低于输入频率（即 $f_0 < f_c$），所以这称为具有低边输入的下变频。这里，除了相差 $A_0/2$ 倍外，输出信号上的调制信号和输入的相同。另一种情况是 $f_d = f_0 - f_c > 0$，其产生的输出复包络为：

$$g_2 = \frac{A_0}{2}g_{in}^*(t) \tag{4.61c}$$

因为 $f_0 > f_c$，这称为高边输入的下变频。这里下变频输出信号的上、下边带相对于输入信号的边带有一个反转（即输入 LSSB 信号变成输出 USSB 信号）。

对理想混频器，由于：

$$v_1(t) = (A\cos\omega_0 t)v_{in}(t)$$

可知它起到了线性时变电路元件的作用，其中 $A\cos\omega_0 t$ 是线性电路的时变增益。还应认识到，通信电路中采用的混频器（mixer）实际就是数学上的乘法器。不应将它与无线电和电视台中采用的音频混音器（mixer）混淆。音频混音器是一个具有多输入的求和放大器，它将来自多个源——如话筒、磁带组、CD 组的不同输入混合（相加）生成一个输出信号。不方便的是，mixer 一词根据上下文可表示完全不同的意思。在用于发射机和接收机时，它表示乘积操作，产生输入信号的频移。在音频系统中，它表示求和操作，将多个输入合成为一个输出信号。

在实际系统中，混频器的乘积操作可采用以下几种器件中的一种来实现：

1. 连续变化跨导器件，如双栅极场效应晶体管（FET）。
2. 非线性器件。
3. 具有离散时变增益的线性器件。

第一种实现方法中，当采用双栅极场效应晶体管做乘法时，$v_{in}(t)$ 通常接栅极 1，本地振荡器接栅极 2。在工作区域内，输出为：

$$v_1(t) = Kv_{in}(t)v_{LO}(t) \tag{4.62}$$

其中，$v_{LO}(t)$ 为本地振荡器电压。如果只有当两个输入波形，v_{in} 和 $v_{LO}(t)$ 要么非负要么非正时［即 $v_{in}(t) \sim v_{LO}(t)$ 特性曲线落在某一象限］才可得到式（4.62）的乘积，则称此乘法器为单象限型的。如果当 $v_{in}(t)$ 和 $v_{LO}(t)$ 之一是非负或非正，而另一个为任意值，才可得到乘积，则称

此乘法器是二象限型的。若不论 $v_{in}(t)$ 和 $v_{LO}(t)$ 符号如何，均可得到乘积，则称此乘法器是四象限型的。

第二种技术中，采用非线性器件，通过对两输入求和得到乘积，如图 4.9 所示。观察输出端的平方项，可得：

$$\begin{aligned} v_1(t) &= K_2(v_{in} + v_{LO})^2 + \text{其他} \\ &= K_2(v_{in}^2 + 2v_{in}v_{LO} + v_{LO}^2) + \text{其他} \end{aligned} \tag{4.63}$$

互乘积项给出所需的乘积结果：

$$2K_2 v_{in} v_{LO} = 2K_2 A_0 v_{in}(t) \cos \omega_0 t \tag{4.64}$$

若假设 $v_{in}(t)$ 是带通信号，则滤波器可使上变频项或下变频项通过。但是，如果不仔细选择 ω_c 和 ω_0，某些失真乘积项也可能落在输出通带上。

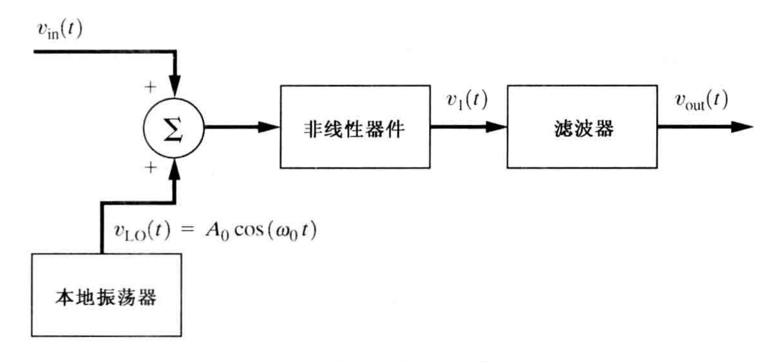


图 4.9 用作混频器的非线性器件

第三种方法中，用具有时变增益的线性器件得到乘积项。如图 4.10 所示，时变器件是由方波振荡信号 $v_0(t)$ 驱动的模拟开关(如 CMOS 4016 集成电路)。开关增益为 1 或 0。模拟开关输出波形为：

$$v_1(t) = v_{in}(t)s(t) \tag{4.65}$$

式中，$s(t)$ 是峰值幅度为 1 的单极性开关方波信号(这类似于第 3 章中讨论的采用自然抽样得到的 PAM 信号)。利用矩形波的傅里叶级数，可知式(4.65)变为：

$$v_1(t) = v_{in}(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin(n\pi/2)}{n\pi} \cos n\omega_0 t\right] \tag{4.66}$$

由 $n=1$ 可得乘积项，即

$$\frac{2}{\pi} v_{in}(t) \cos \omega_0 t \tag{4.67}$$

若 $v_{in}(t)$ 是在 $f=f_c$ 附近具有非 0 频谱的带通信号，则该项可产生位于 f_c+f_0 和 f_c-f_0 处的上、下变频信号。但是，式(4.66)表明输出中也会有其他频段的信号，如在 $f=|f_c \pm nf_0|$，$n=3, 5, 7\cdots$ 处。而且，输出中出现一个馈通项 $\frac{1}{2}v_{in}(t)$。当然，可用滤波器使式(4.66)中出现的上变频和下变频分量通过。

混频器通常可分为不平衡、单平衡及双平衡混频器。即总的来说，在混频电路输出端可得：

$$v_1(t) = C_1 v_{in}(t) + C_2 v_0(t) + C_3 v_{in}(t) v_0(t) + \text{其他} \tag{4.68}$$

当 C_1 和 C_2 非 0 时，混频器称为不平衡的，这是因为 $v_{in}(t)$ 和 $v_0(t)$ 直接馈入输出端。图 4.9 给出的是不平衡混频器，它采用了非线性器件进行混频。在非线性器件输出-输入特性的泰勒展

开式中，线性项保证 $v_{in}(t)$ 和 $v_0(t)$ 直接馈入输出端。单平衡混频器只提供一个输入信号的馈通，即式(4.68)的 C_1 或 C_0 为0。图4.10给出了单平衡混频器的例子，它用抽样得到乘积项。在该例中，式(4.68)①表明 $v_0(t)$ 被平衡掉了(即 $C_2=0$)，而 $v_{in}(t)$ 以增益 $C_1=1/2$ 直接馈入输出。双平衡混频器使两个输入均没有馈通，即式(4.68)中的 C_1 和 C_2 均为0。下段中将讨论一种双平衡混频器。

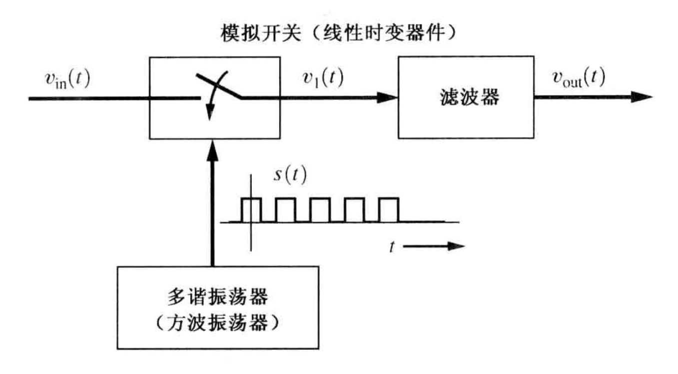


图4.10　用作混频器的线性时变器件

图4.11(a)给出了双平衡混濒器电路结构。该电路较为流行，因为它的价格相对便宜，且性能优良。与所需的输出分量相比，三阶IMD通常至少降低50 dB。混频器的源阻抗和负载阻抗通常是50 Ω，混频器具有宽带输入和输出端口。其射频[也就是 $v_{in}(t)$]端口和LO(本地振荡器)端口通常工作于1000∶1的频率范围，如1～1000 MHz；IF(中频)输出端 $v_1(t)$，通常工作在直流～600 MHz的范围。图中的变压器由小的环形铁芯组成，二极管是匹配热载二极管。射频端口的输入信号相对较小，通常小于－5 dBm。LO端口的本地振荡器信号相对较大，大于＋5 dBm。LO信号较大，导通和截止二极管，起到开关的作用，即LO提供开关控制信号。因此该电路起到线性时变电路(相对射频输入端口)的作用，对它的分析与图4.10所示的模拟开关混频器的分析相似。在 $v_{LO}(t)$ 具有正电压的循环周期内，由图4.11(b)所示的等效电路可知，输出电压正比于 $+v_{in}(t)$。当 $v_{LO}(t)$ 为负时，由图4.11(c)所示的等效电路可知，输出电压正比于 $-v_{in}(t)$。因此该双平衡混频器的输出为

$$v_1(t) = Kv_{in}(t)\,s(t) \tag{4.69}$$

式中，$s(t)$ 为双极性开关波形，如图4.11(d)所示。由于开关波形来自LO信号，故它的周期为 $T_0=1/f_0$。开关波形可描述为

$$s(t) = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi}\cos n\omega_0 t \tag{4.70}$$

因此，混频器的输出为

$$v_1(t) = [v_{in}(t)]\left[4K\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi}\cos n\omega_0 t\right] \tag{4.71}$$

上式表明，若输入是频谱在 f_c 附近非零的带通信号，则其频谱将被搬移到 $|f_c\pm nf_0|$，$n=1,3,5,\cdots$ 处。在实际应用中，K 的值应使在 $|f_c\pm f_0|$ 上的转换增益(定义为所需输出值除以输入值)为－6 dB。当然，可采用滤波器选择输出上变频分量或下变频分量。

除了应用于上变频和下变频以外，混频器(即乘法器)还可用于将基带信号搬移到射频频段

① 原文为式(4.66)，有误。——译者注

上的幅度调制器中。混频器也可用作乘积检波器，将射频信号搬移到基带上去。这些应用将在后面几节中分析发射机和接收机时讨论。

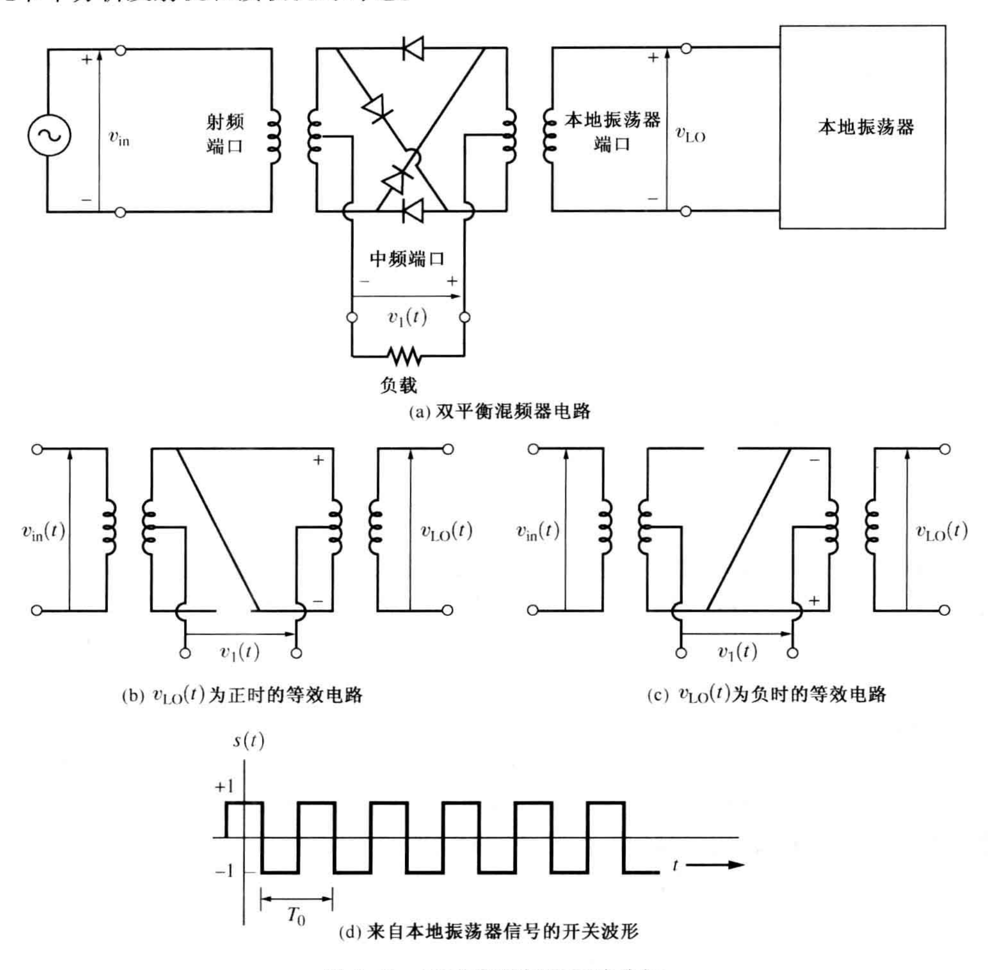


图 4.11　双平衡混频器电路分析

4.12　倍频器

如图 4.12 所示，倍频器由非线性电路组成，非线性电路后面紧跟一个调谐电路。若将带通信号馈入倍频器，则输出信号将位于输入载波 n 次谐波处的频段上。由于器件是非线性的，因此 n 次谐波输出的带宽大于输入信号的带宽。总的来说，带通输入信号可表示为

$$v_{in}(t) = R(t)\cos[\omega_c t + \theta(t)] \tag{4.72}$$

非线性器件的转移函数可用泰勒级数展开，因此 n 次项输出为

$$v_1(t) = K_n v_{in}^n(t) = K_n R^n(t)\cos^n[\omega_c t + \theta(t)]$$

或①

① m 次输出项，其中 $m > n$，也会影响 n 次谐波输出，条件是 K_m 比 K_n 大很多。该条件可用三角恒等式 $8\cos^4 x = 3 + 4\cos 2x + \cos 4x$ 推出。

$$v_1(t) = CR^n(t)\cos[n\omega_c t + n\theta(t)] + \text{其他}$$

由于带通滤波器只允许 nf_c 附近的频率通过，故输出为

$$v_{out}(t) = CR^n(t)\cos[n\omega_c t + n\theta(t)] \tag{4.73}$$

这表明，由于输出的实包络为 $R^n(t)$，输入幅度变化 $R(t)$ 在输出信号上有失真。角度变化波形 $\theta(t)$ 经过倍频器后无失真，但倍频器将角度变化的幅度增加为 n 倍。因此，在处理 AM 信号时，就不能采用倍频器电路。但我们将看到，由于倍频器能有效地“放大”角度变化波形 $\theta(t)$，因此它在 PM 和 FM 系统中非常有用。$n=2$ 的倍频器称为双级倍频器，$n=3$ 的倍频器称为三级倍频器。

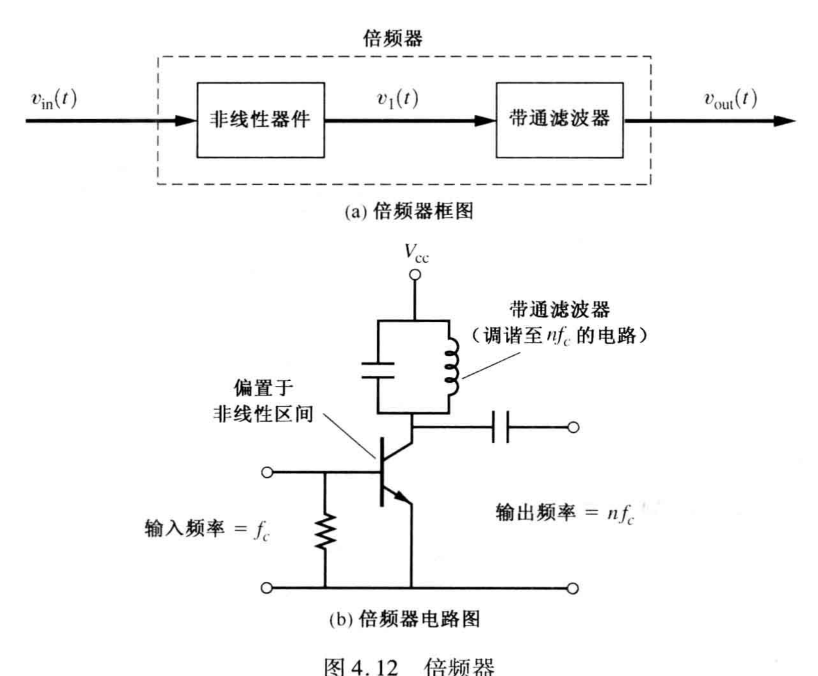


图 4.12　倍频器

不要将倍频器与混频器混淆，倍频器起非线性设备的作用。混频器电路（采用数学乘积操作）起具有时变增益（由于 LO 信号造成的）的线性电路的作用。倍频器输出信号带宽大于输入信号带宽，输出信号出现在输入信号的 n 次谐波频段上。混频器输出的信号带宽与输入信号带宽相同。但输入信号频谱被上移或下移了，这取决于 LO 频率和输出滤波器的通带。倍频器本质上就是后跟一个能通过 n 次谐波的带通滤波器的非线性放大器。

4.13　检波电路

如图 4.1 所示，接收机包括的载波电路将带通输入波形转换为基带输出波形。这些载波电路称为检波电路。以下几小节将讨论带通信号输入检波器时，应如何设计电路以使其输出端产生 $R(t)$、$\theta(t)$、$x(t)$ 及 $y(t)$。

4.13.1　包络检波器

理想的包络检波器是在输出端产生正比于其输入信号实包络 $R(t)$ 波形的电路。由式(4.1b)，带通输入信号可用 $R(t)\cos[\omega_c t + \theta(t)]$ 表示，其中 $R(t) \geq 0$。于是，理想包络检波器的输出为

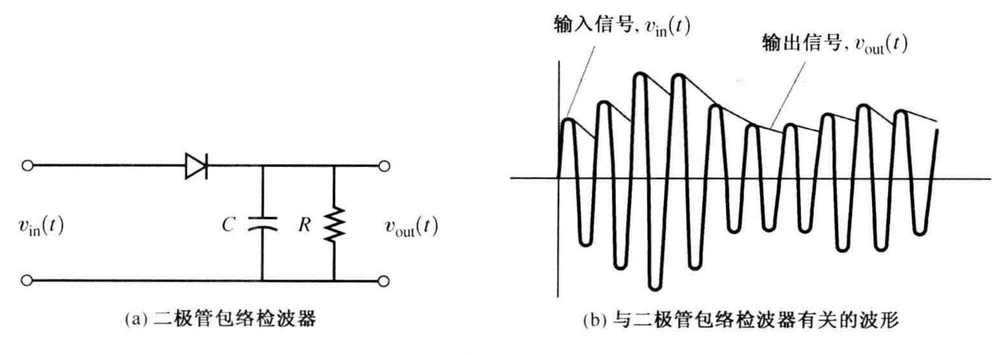
$$v_{out}(t) = KR(t) \tag{4.74}$$

式中，K 是比例常数。

图 4.13(a)示出了近似理想包络检波器的简单二极管检波电路。二极管电流正比于输入波形正值部分的脉冲。电流脉冲给电容器充电，产生输出电压波形，如图 4.13(b)所示。RC 时间常数应选择得使输出信号正比于输入信号的实包络 $R(t)$。因此，低通滤波器的截止频率应远小于载波频率 f_c，但远大于(检测到的)调制波形 B 的带宽。也就是说：

$$B \ll \frac{1}{2\pi RC} \ll f_c \tag{4.75}$$

式中，RC 是滤波器的时间常数。



(a) 二极管包络检波器　　(b) 与二极管包络检波器有关的波形

图 4.13　包络检波器

包络检波器通常用于检测 AM 信号上的调制信号，这时，$v_{in}(t)$的复包络为 $g(t)=A_c[1+m(t)]$，其中 $A_c>0$ 表示接收到的 AM 信号的调制深度，$m(t)$是调制信号。若$|m(t)|<1$，则

$$v_{out} = KR(t) = K|g(t)| = KA_c[1 + m(t)] = KA_c + KA_c m(t)$$

式中，KA_c 是直流电压，用来为 AM 接收机提供自动增益控制(AGC)电压。即当 KA_c 相对较小(接收到弱 AM 信号)时，接收机增益增加；反之亦然。$KA_c m(t)$是检测到的调制信号。对于音频(非视频)调制，包络检波器元件的典型值为 $R=10\ \text{k}\Omega$，$C=0.001\ \mu\text{F}$。这样的取值使低通滤波器的截止频率(3 dB 下降点)为$f_{co}=1/(2\pi RC)=15.9$ kHz。该值远小于f_c，但远大于标准 AM 应用中音频信号的最高频率 B。

4.13.2　乘积检波器

乘积检波器(见图 4.14)是混频器电路，它将输入信号(带通信号加噪声)下变频为基带信号。其乘法器的输出为

$$\begin{aligned} v_1(t) &= R(t)\cos[\omega_c t + \theta(t)]A_0\cos(\omega_c t + \theta_0) \\ &= \tfrac{1}{2}A_0R(t)\cos[\theta(t) - \theta_0] + \tfrac{1}{2}A_0R(t)\cos[2\omega_c t + \theta(t) + \theta_0] \end{aligned}$$

其中，f_c 为振荡器频率，θ_0 为相位。低通滤波器只允许下变频后的项通过，故其输出为

$$v_{out}(t) = \tfrac{1}{2}A_0R(t)\cos[\theta(t) - \theta_0] = \tfrac{1}{2}A_0\text{Re}\{g(t)e^{-j\theta_0}\} \tag{4.76}$$

式中,输入信号的复包络可表示为

$$g(t) = R(t)e^{j\theta(t)} = x(t) + jy(t)$$

$x(t)$和 $y(t)$是正交分量[见式(4.2)]。由于振荡器频率与输入信号的载波频率相同，因此称振荡器与输入信号是频率同步的。进一步，若还有 $\theta_0=0$，则称振荡器与同相分量相位同步。相

应的输出为

$$v_{out}(t) = \frac{1}{2}A_0 x(t) \tag{4.77a}$$

如果有 $\theta_0=90°$，则有：

$$v_{out} = \frac{1}{2}A_0 y(t) \tag{4.77b}$$

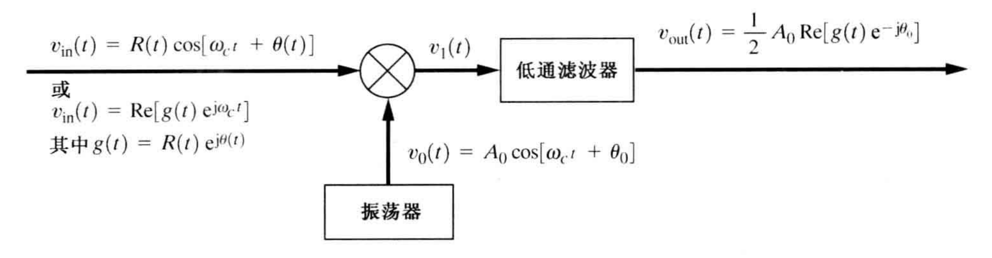


图 4.14　乘积检波器

式(4.76)也表明，乘积检波器对 AM 和 PM 是敏感的。例如，若输入不包括角度调制信号，$\theta(t)=0$，参考相位设为 0(即 $\theta_0=0$)，则有：

$$v_{out}(t) = \frac{1}{2}A_0 R(t) \tag{4.78a}$$

这表明 $x(t)\geqslant 0$。而且如同前述的包络检波器一样，可由乘积检波器输出得到输入的实包络。但是，若输入中有角度调制信号 $A_c\cos[\omega_c(t)+\theta(t)]$，且 $\theta_0=90°$，则乘积检波器的输出为

$$v_{out}(t) = \frac{1}{2}A_0\mathrm{Re}\{A_c e^{j[\theta(t)-90°]}\}$$

或

$$v_{out}(t) = \frac{1}{2}A_0 A_c \sin\theta(t)$$

这时，由于输出电压正比于输入信号和振荡器信号相位差的正弦值，乘积检波器起到了具有正弦特性的相位检测器的作用。相位检测器也可以产生三角波及锯齿波特性[Krauss, Bostian 和 Raab, 1980]。参考式(4.78b)具有正弦特性的相位检测器。假设相位差很小[即 $|\theta(t)| \ll \pi/2$]，可知 $\sin\theta(t)\approx\theta(t)$，及

$$v_{out}(t) \approx \frac{1}{2}A_0 A_c \theta(t) \tag{4.79}$$

此式表明输出与相角之间具有线性特性(对小相角而言)。因此，当相位差较小时，相位检测器的输出直接正比于相位差[见图 4.20(a)]。

与包络检波器具有非线性器件特性不同，乘积检波器对输入信号 $v_{in}(t)$ 起到了线性时变器件的作用。当输入两个或更多分量，如信号加噪声时，器件具有线性还是非线性性质将极大影响输出的结果。该问题将在第 7 章讨论。

检波器也可分为相干或不相干的。相干检波器有两路输入信号，一路为输入参考信号，如同步振荡信号；另一路为输入需解调的已调信号。乘积检波器就是一种相干检波器。非相干检波器只有一路输入，即已调信号端口。包络检波器就是一种非相干检波器。

4.13.3　鉴频器

理想频率调制(FM)检波器是产生正比于输入信号瞬时频率的输出信号的器件。即若用 $R(t)\cos[\omega_c t+\theta(t)]$ 表示带通输入信号，当输入非 0 时[即 $R(t)\neq 0$]，理想 FM 检波器输出为

$$v_{out}(t) = \frac{K\,\mathrm{d}[\omega_c t + \theta(t)]}{\mathrm{d}t} = K\left[\omega_c + \frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}\right] \tag{4.80}$$

通常，FM 检波器是平衡的，这表示若检波器调谐到(或设计到)载波频率f_c上，则直流电压$K\omega_c$不会出现在输出信号上。这时，输出为

$$v_{\text{out}}(t) = K\frac{d\theta(t)}{dt} \tag{4.81}$$

构造 FM 检波器有多种方法，但几乎它们中的所有方法都是基于以下三个原理之一实现的：

- FM-AM 转换。
- 相移或正交检波。
- 过 0 点检测。

斜率检波器是基于 FM-AM 转换原理工作的，其方框图如图 4.15 所示。由于输入信号的幅度变化会使输出信号产生失真，因此要采用带通限幅器抑制这些变化。

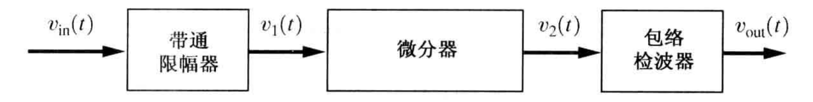


图 4.15 使用斜率检波器的鉴频

可对斜率检波器进行如下分析。假设输入的是具有频率调制的衰落信号。由表 4.1，该 FM 信号可表示为

$$v_{\text{in}}(t) = A(t)\cos[\omega_c t + \theta(t)] \tag{4.82}$$

其中，

$$\theta(t) = K_f\int_{-\infty}^{t} m(t_1)\,dt_1 \tag{4.83}$$

$A(t)$代表衰落信号的包络，$m(t)$是调制信号(如音频信号)。由此可得限幅器输出正比于：

$$v_1(t) = V_L\cos[\omega_c t + \theta(t)] \tag{4.84}$$

微分器的输出为

$$v_2(t) = -V_L\left[\omega_c + \frac{d\theta(t)}{dt}\right]\sin[\omega_c t + \theta(t)] \tag{4.85}$$

包络检波器的输出是$v_2(t)$的复包络幅度值：

$$v_{\text{out}}(t) = \left|-V_L\left[\omega_c + \frac{d\theta(t)}{dt}\right]\right|$$

由于实际应用中$\omega_c \gg d\theta/dt$，因此上式变为

$$v_{\text{out}}(t) = V_L\left[\omega_c + \frac{d\theta(t)}{dt}\right]$$

再由式(4.83)，可得：

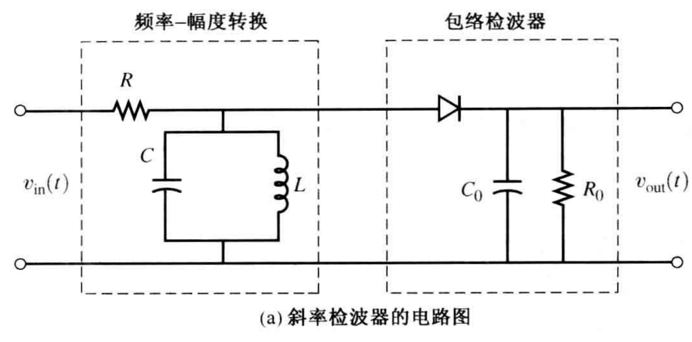
$$v_{\text{out}}(t) = V_L\omega_c + V_L K_f m(t) \tag{4.86}$$

这表明输出包括了直流电压$V_L\omega_c$及正比于 FM 信号上的调制信号的交流电压$V_L K_f m(t)$。当然，输出端还要串联一个电容，使得只有交流电压传到负载上。

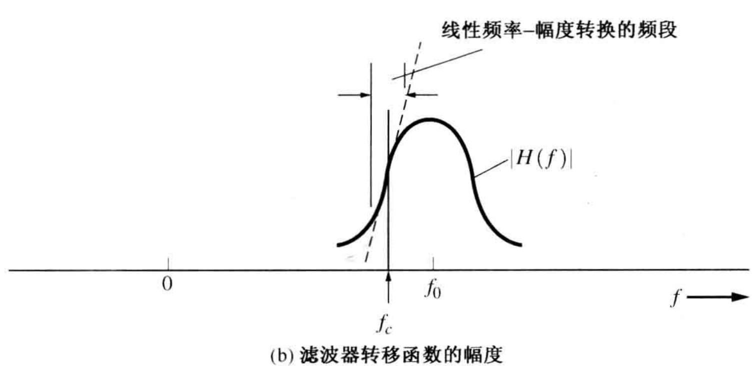
任何起到频率-幅度转换作用的电路都可进行微分操作。例如，可采用单调谐谐振电路，如图 4.16 所示。图中特性曲线的线性(可用)部分上的幅度转移函数是$|H(f)| = K_1 f + K_2$。图 4.17 示出了平衡 FM 检波器，也称平衡鉴频器。当输入载波为f_c时，可采用两个调谐电路将直流平衡掉，这些电路还能提供扩展的线性频率-电压转换特性。

由于具有初级和次级线圈的双调谐射频变换器电路的相移特性，平衡鉴频器也可用于构造

前述的转移函数[Stark, Tuteur 和 Anderson, 1988]。实际应用中，基于正交原理的集成电路已经取代了鉴频器电路。



(a) 斜率检波器的电路图



(b) 滤波器转移函数的幅度

图 4.16　采用单调谐电路进行频率-幅度转换的斜率检波电路

正交检波器工作过程可描述如下：首先，从 FM 信号中得到正交信号。然后，通过乘积检波器，正交信号与 FM 信号相乘，产生解调信号 $v_{out}(t)$。将 FM 信号输入到与调谐到 f_c 的并联调谐电路串联的大容抗电容上，即可在输出端得到正交信号。正交信号出现在并联谐振电路上。串联容抗产生 90°相移。谐振电路产生正比于 FM 信号瞬时频率偏移(与 f_c 相比)的附加相移。由式(4.84)和式(4.83)，可得 FM 信号为

$$v_{in}(t) = V_L \cos[\omega_c t + \theta(t)] \tag{4.87}$$

正交信号为

$$v_{quad}(t) = K_1 V_L \sin\left[\omega_c t + \theta(t) + K_2 \frac{d\theta(t)}{dt}\right] \tag{4.88}$$

式中，K_1 及 K_2 是常数，其值取决于串联电容及并联谐振电路的元件值。式(4.87)和式(4.88)表示的两个信号通过乘积检波器(见图 4.14)相乘，产生输出信号：

$$v_{out}(t) = \frac{1}{2} K_1 V_L^2 \sin\left[K_2 \frac{d\theta(t)}{dt}\right] \tag{4.89}$$

其中和频项被低通滤波器滤除了。当 K_2 足够小时，$\sin x \approx x$。由式(4.83)可知输出为

$$v_{out}(t) = \frac{1}{2} K_1 K_2 V_L^2 K_f m(t) \tag{4.90}$$

这表明正交检波器检波出了输入 FM 信号上的调制信号。正交检波器的工作原理也可用于由锁相环构成的 FM 检波器中[见式(4110)]。

如式(4.80)所示，理想 FM 检波器的输出正比于输入的瞬时频率。通过计算输入波形的过

零点值，可以直接得到该线性频率-电压特性。采用这种技术的 FM 检波器称为过零点检波器。图 4.18 给出了平衡 FM 过零点检波器的混合电路(即包括数字器件和模拟器件的电路)。$v_1(t)$ 代表经过限幅后的(方波)FM 信号，如图 4.18(b)所示。为便于描述，假设 $v_1(t)$ 是在瞬时频率

$$f_i(t) = f_c + \frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} \tag{4.91}$$

大于载频 f_c 时的调制信号周期上观察到的，即图中 $f_i > f_c$。由于调制信号电压的变化相对于输入 FM 信号的振荡慢得多，尽管 $v_1(t)$ 的频率实际上随 $f_i(t)$ 变化，但(图中)它看起来具有恒定频率。单稳多谐振荡器在 $v_1(t)$ 的正斜率过零点上被触发。对平衡 FM 检波，正交分量输出的脉宽设为 $T_c/2 = 1/2f_c$，其中 f_c 是输入 FM 信号的载频。因此，若 $f_i = f_c$，差分放大器输出电压为 0。对 $f_i > f_c$[图中 $v_1(t)$ 的波形]，输入电压为正。若 $f_i < f_c$，输出电压为负。因此，当输入为 FM 信号时，可得线性频率电压特性为 $C[f_i(t) - f_c]$，其中，$f_i(t) = f_c + (1/2\pi)K_f m(t)$。

另一种可用于 FM 解调及其他一些应用的电路是锁相环电路。

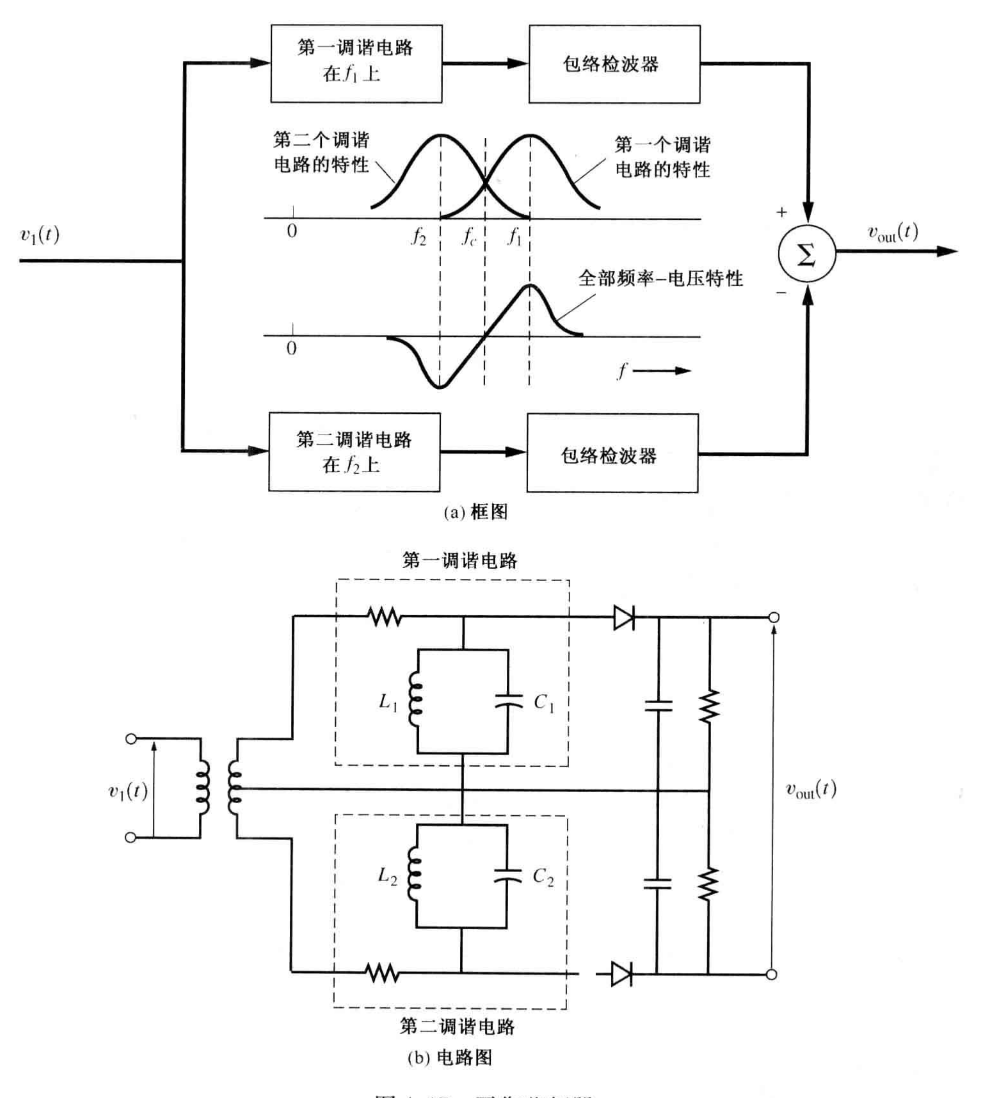


图 4.17　平衡鉴频器

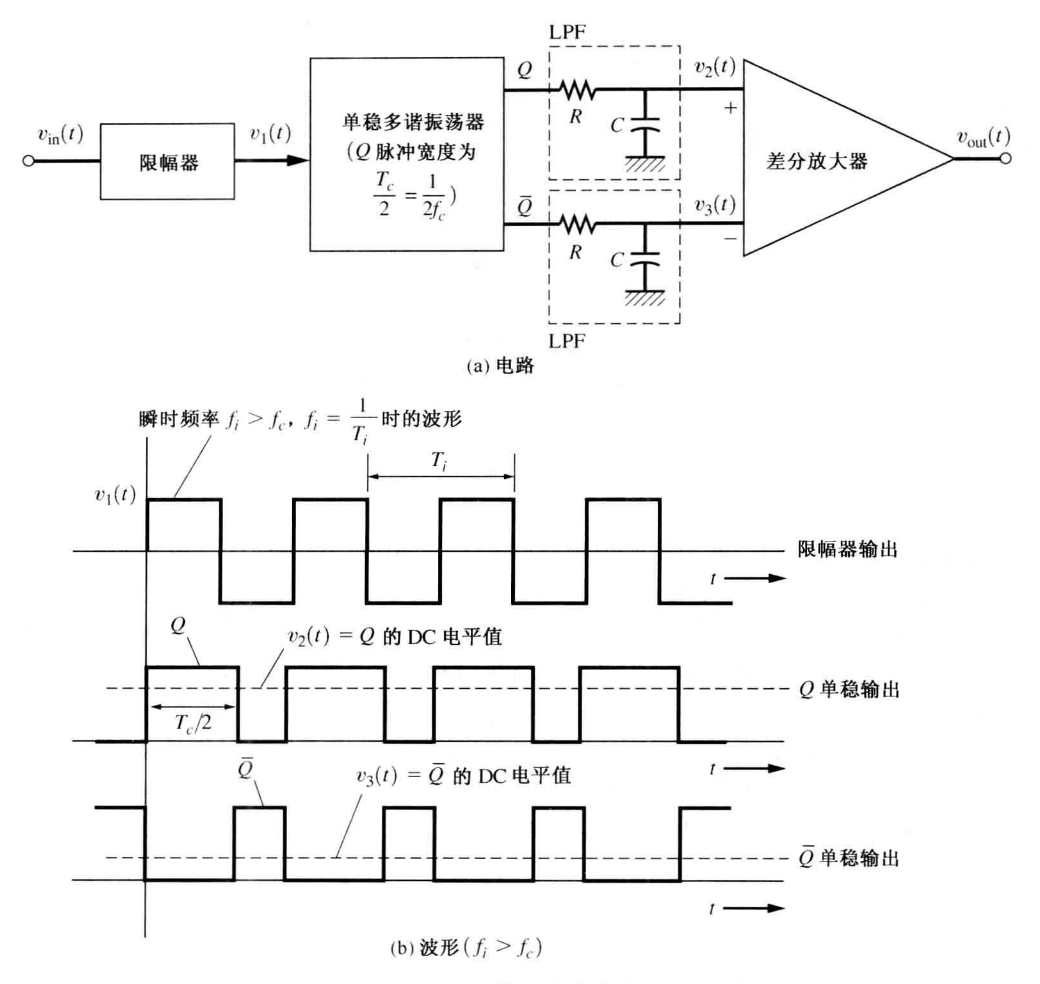


图 4.18　平衡过零点检波器

4.14　锁相环及频率合成器

如图 4.19 所示，锁相环(PLL)包括三个基本部分：(1)相位检测器；(2)低通滤波器；(3)压控振荡器(VCO)。VCO 是一个产生周期波形的振荡器，该波形的频率根据输入电压 $v_2(t)$ 围绕某个自激频率 f_0 变化。自激频率 f_0 是当输入电压 $v_2(t)$ 为零时 VCO 输出的信号频率。相位检测波器产生的输出信号 $v_1(t)$ 是输入信号 $v_{in}(t)$ 与振荡器信号 $v_0(t)$ 相位差的函数。滤波后的信号 $v_2(t)$ 是用于改变 VCO 输出信号频率的控制信号。当低通滤波器(LPF)是窄带滤波器时，PLL 的结构可设计成起窄带跟踪滤波器的作用。在这种工作模式下，VCO 频率是输入信号频谱中的某一个频谱成分。因而，从效果上看，VCO 输出信号是周期信号，其频率等于该输入信号的平均频率。一旦 VCO 得到该频率成分，输入信号在频率上有些变化，VCO 的频率都会跟踪它。在另一个工作模式下，LPF 的带宽较宽，因此 VCO 可跟踪整个信号的瞬时频率。当这两种情况下的 PLL 跟踪上了输入信号时，都称 PLL 被“锁住”了。

若输入信号具有初始频率 f_0，PLL 将“锁定”该频率。只要输入频率变化较慢，VCO 将在某一区域上跟踪输入信号频率。但是，环路只在某些有限频移范围内保持锁定状态。该范围称为

同步(锁定)带。同步带取决于环路的总直流增益,它也包括 LPF 的直流增益。另一方面,若输入信号的初始频率不等于f_0,即使输入频率在同步带范围内,环路也不会锁住。这时输入信号使环路锁住的频率范围称为捕捉带。该范围主要由环路滤波器特性决定,它不会大于同步带(见图 4.23)。PLL 另一个重要的特性是最大锁定扫描率。它定义为使环保持锁定的输入频率变化的最大速率。若输入信号频率变化快于该速率,环路将失锁。

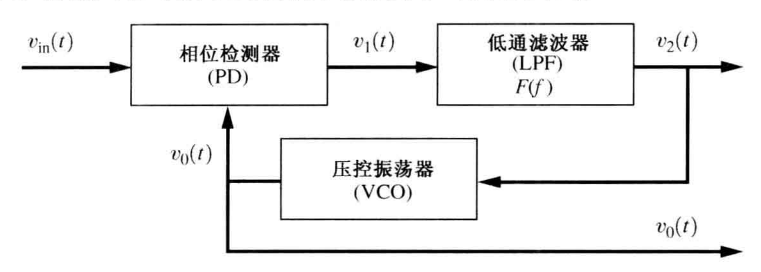


图 4.19 基本锁相环

由模拟电路组成的 PLL,称为模拟锁相环(APLL)。相反,若采用数字电路及信号的 PLL,称为数字锁相环(DPLL)。例如,相位检测(PD)特性取决于所采用的具体实现方法。图 4.20 给出了一些相位检测特性。若采用(模拟电路)乘法器,周期信号为正弦信号,则可得到正弦特性。乘法器可用双平衡混频器实现。三角波及锯齿波相位检测特性可由数字电路得到。除了采用数字 VCO 和 PD 电路外,DPLL 还可包括数字环路滤波器和采用微处理器的信号处理技术。Gupta[1975]在 IEEE Proceedings 上发表了一篇关于模拟 PLL 技术的指导性论文。后来 Lindsey 及 Chie[1981] 又发表了一篇关于数字 PLL 技术的综述性论文。这方面还有一些不错的书籍供参考[Blanchard, 1976; Gardner, 1979; Best, 1999]。

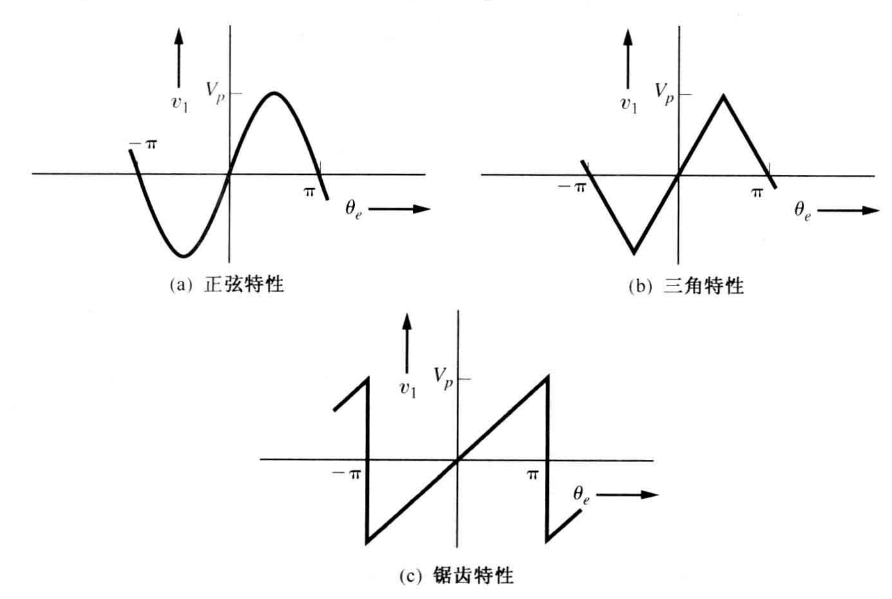


图 4.20 某些相位检测特性

分析图 4.21 所示的 APLL 可了解 PLL。在该图中采用了乘法器(正弦 PD 特性)。假设输入信号为

$$v_{in}(t) = A_i \sin[\omega_0 t + \theta_i(t)] \tag{4.92}$$

VCO 输出信号为

$$v_0(t) = A_0 \cos[\omega_0 t + \theta_0(t)] \tag{4.93}$$

其中，

$$\theta_0(t) = K_v \int_{-\infty}^{t} v_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{4.94}$$

式中，K_v是 VCO 增益常数(rad/V · s)。由此，可得 PD 输出为

$$\begin{aligned} v_1(t) &= K_m A_i A_0 \sin[\omega_0 t + \theta_i(t)] \cos[\omega_0 t + \theta_0(t)] \\ &= \frac{K_m A_i A_0}{2} \sin[\theta_i(t) - \theta_0(t)] + \frac{K_m A_i A_0}{2} \sin[2\omega_0 t + \theta_i(t) + \theta_0(t)] \end{aligned} \tag{4.95}$$

式中，K_m是乘法器电路的增益。和频项不能通过 LPF，故 LPF 输出为

$$v_2(t) = K_d[\sin\ \theta_e(t)] * f(t) \tag{4.96}$$

其中，

$$\theta_e(t) \triangleq \theta_i(t) - \theta_0(t) \tag{4.97}$$

$$K_d = \frac{K_m A_i A_0}{2} \tag{4.98}$$

$f(t)$是 LPF 的冲激响应，$\theta_e(t)$称为相位误差，K_d是等效 PD 常数。对乘法器类型的 PD 来说，K_d取决于输入信号的电平值 A_i和 VCO 信号的电平值 A_0。

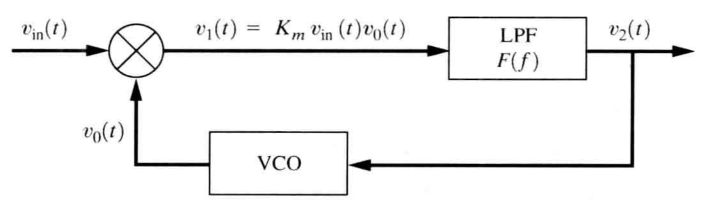


图 4.21　模拟 PLL

对式(4.94)和式(4.97)求导，将结果与式(4.96)结合起来，就可得到描述 PLL 工作的总的关系式。该非线性关系式为

$$\frac{\mathrm{d}\theta_e(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta_i(t)}{\mathrm{d}t} - K_d K_v \int_0^t [\sin\ \theta_e(\lambda)] f(t-\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \tag{4.99}$$

式中，$\theta_e(t)$是未知函数，$\theta_i(t)$是强迫函数。

一般来说，该 PLL 等式很难求解。但是，若增益 K_d很大，使环路锁定，且 $\theta_e(t)$较小的话，上述非线性关系式可简化为线性等式。这时 $\sin\theta_e(t) \approx \theta_e(t)$。由此得到线性等式为

$$\frac{\mathrm{d}\theta_e(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta_i(t)}{\mathrm{d}t} - K_d K_v \theta_e(t) * f(t) \tag{4.100}$$

图 4.22 给出了基于该线性等式的方框图。在该线性 PLL 模型(见图 4.22)中，采用的是输入信号的相位和 VCO 输出信号的相位，而不是实际信号本身的相位(见图 4.21)。闭环转移函数 $\Theta_0(f)/\Theta_i(f)$为

$$H(f) = \frac{\Theta_0(f)}{\Theta_i(f)} = \frac{K_d K_v F(f)}{\mathrm{j}2\pi f + K_d K_v F(f)} \tag{4.101}$$

式中，$\Theta_0(f) = \mathscr{F}[\theta_0(t)]$，$\Theta_i(f) = \mathscr{F}[\theta_i(t)]$。当然，线性反馈控制系统[如给出了相位增益和

相位裕度的伯德(Bode)图]的设计和分析技术也是可行的。事实上，它们在描述锁定的 PLL 性能时非常有用。

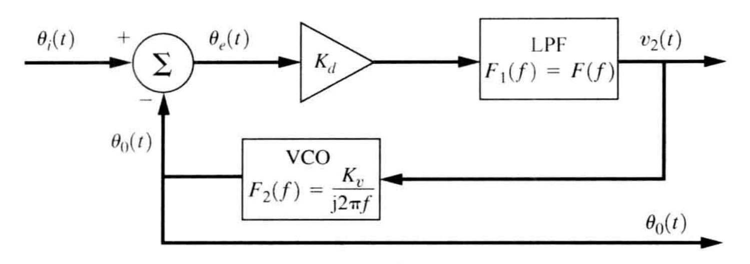


图 4.22 模拟 PLL 的线性模型

通过分析 PLL 的非线性特性，可得到同步带的表达式。由式(4.94)和式(4.96)，相对于 ω_0 的 VCO 的瞬时频率偏移为

$$\frac{d\theta_0(t)}{dt} = K_v v_2(t) = K_v K_d[\sin\ \theta_e(t)] * f(t) \tag{4.102}$$

为得到同步带，输入频率围绕 f_0 变化很慢。这里滤波器的直流增益为控制参数，式(4.102)变为

$$\Delta\omega = K_v K_d F(0) \sin\ \theta_e \tag{4.103}$$

$\Delta\omega$ 的最大值和最小值确定了同步带。当 $\sin\theta_e(t) = \pm 1$ 时可得到这两个值。因此，最大同步带值(无噪声情况)为

$$\Delta f_h = \frac{1}{2\pi} K_v K_d F(0) \tag{4.104}$$

图 4.23 给出了典型的锁定特性。图中实线表示当正弦测试信号从低频扫描到高频(VCO 的自激频率 f_0 在扫描频段内)时的 VCO 控制信号 $v_2(t)$，虚线表示从高频扫描到低频时的 $v_2(t)$。如式(4.104)所示，同步带 Δf_h 与 PLL 的直流增益有关。

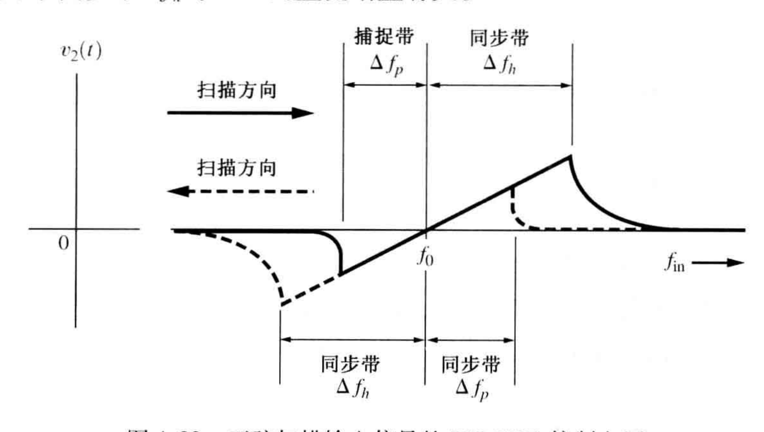


图 4.23 正弦扫描输入信号的 PLL VCO 控制电压

捕捉带 Δf_p 主要由环路滤波器特性决定。例如，假设环路没有锁定，测试信号缓慢向 f_0 扫描，则 PD 输出中将会有一个振荡信号。当测试信号频率向 f_0 扫描时，该振荡信号频率 $|f_{in} - f_0|$ 将从很大的值变化到很小的值。当测试信号频率靠近 f_0 时，振荡频率波形将是非对称的，这时它具有非零的直流量。该直流试图使 VCO 的频率变成输入信号频率，这样环路将被锁住。环路在捕捉带内被锁住，捕捉带 Δf_p 取决于环路滤波器 $F(f)$ 如何处理 PD 输出以产生 VCO 控制信号。而且，即使输入信号在捕捉带内，由于 LPF 起到积分器的作用，控制电压(滤波器输出)需要一

段时间才能产生足够大的电压值，因此环路也需要一段时间才能被锁定。对捕捉现象进行分析是复杂的。它实际上具有统计性，这是因为它取决于输入和 VCO 信号的初始相位关系及电路中的噪声。因此，在测量 Δf_p时，可能需要多次重复实验以得到一个典型值。

锁定现象不只在 PLL 电路中有，在其他类型的电路里也有。例如，若将一个外部信号注入到振荡器的输出端口（即一般振荡器，不是 VCO），振荡器信号将改变频率，逐渐锁定在外部信号的频率上（如果外部信号频率在振荡器的捕捉范围内）。该现象称为插入锁定或振荡器同步，它可用 PLL 模型模拟[Couch，1971]。

PLL 在通信系统中有多种应用，包括：(1) FM 检波；(2) 高稳定性 FM 信号的产生；(3) 相干 AM 检波；(4) 倍频；(5) 频率合成；(6) 用作复杂数字系统的一部分以提供比特同步和数据检测。

现在来确定使 PLL 成为 FM 检波器的条件。参考图 4.21，令 PLL 的输入信号为 FM 信号，即

$$v_{\mathrm{in}}(t) = A_i \sin\left[\omega_c t + D_f \int_{-\infty}^{t} m(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\right] \tag{4.105a}$$

其中，

$$\theta_i(t) = D_f \int_{-\infty}^{t} m(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \tag{4.105b}$$

或

$$\Theta_i(f) = \frac{D_f}{\mathrm{j}2\pi f} M(f) \tag{4.105c}$$

$m(t)$是要检测的基带（如音频）调制信号。我们将确定使 PLL 输出 $v_2(t)$正比于 $m(t)$的条件。假设f_c在 PLL 的捕捉带内。因此，为简化起见可令 $f_0 = f_c$，可用图 4.22 所示的线性化的 PLL 模型来分析。在频率域上可得输出为

$$V_2(f) = \frac{\left(\mathrm{j}\dfrac{2\pi f}{K_v}\right)F_1(f)}{F_1(f) + \mathrm{j}\left(\dfrac{2\pi f}{K_v K_d}\right)}\Theta_i(f)$$

再由式(4.105c)，上式变为

$$V_2(f) = \frac{\dfrac{D_f}{K_v}F_1(f)}{F_1(f) + \mathrm{j}\left(\dfrac{2\pi f}{K_v K_d}\right)}M(f) \tag{4.106}$$

现在可以确定使 $V_2(f)$正比于 $M(f)$的条件。假设调制信号的带宽为 B Hz，$F_1(f)$为低通滤波器的传输函数，因此有：

$$F(f) = F_1(f) = 1, \qquad |f| < B \tag{4.107}$$

同样，令

$$\frac{K_v K_d}{2\pi} \gg B \tag{4.108}$$

则式(4.106)变成：

$$V_2(f) = \frac{D_f}{K_v} M(f) \tag{4.109}$$

或

$$v_2(t) = Cm(t) \tag{4.110}$$

其中，比例常数为 $C = D_f/K_v$。因此，图 4.21 所示的 PLL 电路将成为 FM 检波器电路，其中当式(4.107)和式(4.108)的条件满足时，$v_2(t)$就是 FM 的检波输出。

在另一种应用中，PLL 可提供 AM 信号乘积检波的相干振荡器信号(见图 4.24)。回顾式(4.92)和式(4.93)，PLL 的 VCO 使输入信号的相位锁定在 90°①。因此 $v_0(t)$应有 $-90°$的相移，这样能与输入 AM 信号的载波同相。这是式(4.77)给出的 AM 相干检波的要求。在这一应用中，LPF 的带宽应足够大，以提供所需的捕捉带，这样 VCO 就能锁定在载波频率f_c上。

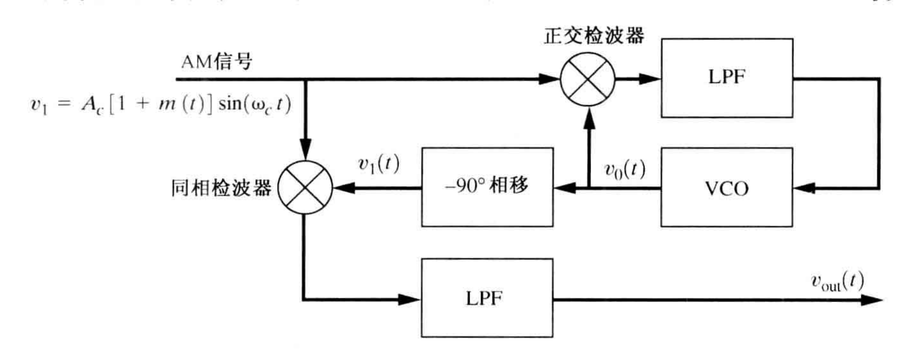


图 4.24　用于 AM 相干检波的 PLL

图 4.25 示出了 PLL 用于频率合成器中的情况。频率合成器产生一个周期信号，频率为

$$f_{out} = \left(\frac{N}{M}\right) f_x \tag{4.111}$$

式中，f_x是振荡器的频率，N 和 M 是分频器参数。回顾一下，当环路锁定时，直流控制信号$v_3(t)$使 VCO 发生频移，这样 $v_2(t)$就与 $v_{in}(t)$有相同频率。于是：

$$\frac{f_x}{M} = \frac{f_{out}}{N} \tag{4.112}$$

这等价于式(4.111)。

传统分频器中的 M 和 N 取整数值。若采用可编程分频器，则由软件编程使微处理器根据式(4.111)选择合适的 M 和 N。这样，可改变合成器的输出频率。该项技术用于具有数字调谐功能的现代接收机的频率合成器中(见助学例题 SA4.6 中的频率合成器设计的例子)。对 $M = 1$ 的情况，频率合成器起倍频器的作用。

N 的等效非整数值可周期性地在整数值集合上改变分频器的分频值得到。这将产生非整数的平均 N 值，称为 N 分频技术。在 N 分频合成器中，N 的瞬时值随时间改变。这样就调制了 VCO 输出信号，在频谱中产生了多余的边带。若仔细设计该边带，可将噪声降低到较低的水平 [Conkling, 1998]。更复杂的 PLL 合成器结构还包括混频器和附加振荡器。

---

① 该结论来自相位检测器电路特性。该结论对于当两个相位检测输入信号有 90°相位差时可产生零直流值的相位检测(即乘积型相位检测)是正确的。但是，若当两个相位检测器输入是同相时，相位检测电路产生零直流输出，则 PLL 的 VCO 将锁定输入 PLL 信号的相位。

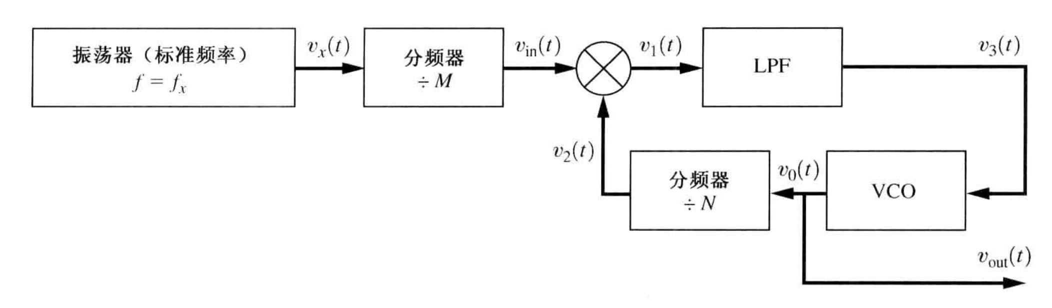


图 4.25　用于频率合成器的 PLL

4.15　直接数字合成

直接数字合成(DDS)是用如图 4.26 所示的计算机技术产生所需的波形(如正弦波)的方法。为使 DDS 系统产生波形，要将所需波形的样本转换成 PCM 码字，存储在微机系统的存储器中(随机存储器[RAM]或只读存储器[ROM])。然后 DDS 系统读出所存储的码字，将其送入数模转换器，产生所需波形。

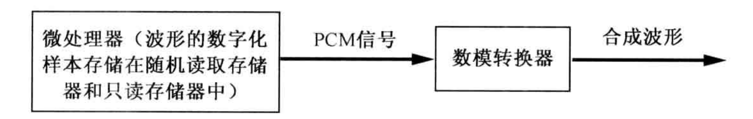


图 4.26　直接数字合成(DDS)

该 DDS 技术有许多特性。例如，若波形是周期的，如正弦波，则只需将一个周期的样本存储在存储器中。重复从存储器读出数据即可产生连续波形，所产生的正弦波的频率取决于存储器的读出速度。如果需要，微处理器可通过编程在某一时间区间内产生一种频率，然后转换到另一时间区间的另一种频率(或波形)上。同样，增加一个 DAC 可同时产生正弦和余弦(两相)输出。如式(3.18)所示，通过选择存储每个 PCM 码字所需的比特数，可将信号的量化信噪比设计到所需的足够大的程度。

在许多应用中，DDS 技术正取代模拟电路。例如，在高价位的通信接收机中，DDS 技术用于频率合成器中以产生调谐于无线广播的本地振荡信号(见 4.16 节)。在电子管乐器和音乐合成器中，DDS 除用于产生奇怪的声音外，还可产生正常的音乐信号。仪器生产商用 DDS 技术产生输出波形用于函数发生器和任意波形发生器(AWG)。电话公司用 DDS 技术产生拨号音和忙音(见第 8 章)。

4.16　发射机与接收机

4.16.1　通用发射机

发射机在载频 f_c 上由调制信号 $m(t)$ 产生已调信号。在 4.1 节和 4.2 节中已表明，任何类型的已调信号均可表示为

$$v(t) = \mathrm{Re}\{g(t)e^{j\omega_c t}\} \tag{4.113}$$

或等效地表示为

$$v(t) = R(t)\cos[\omega_c t + \theta(t)] \tag{4.114}$$

且

$$v(t) = x(t)\cos\omega_c t - y(t)\sin\omega_c t \tag{4.115}$$

其中，复包络

$$g(t) = R(t)e^{j\theta(t)} = x(t) + jy(t) \tag{4.116}$$

是调制信号 $m(t)$ 的函数。$g(t)$ 与 $m(t)$ 之间的关系决定了采用的调制类型，如 AM、SSB 或 FM(见表4.1)。可以采用一般化的方法得到通用发射机模型。该模型可以简化成某一特定调制类型对应的模型。也可以看到，有许多等效模型对应不同的电路结构，但它们可以在输出端产生相同类型的已调信号。根据电路技术发展水平，设计者可选择一种实现方法，使性能最优而花费最小。

如式(4.114)和式(4.115)所示，通用发射机有两种标准形式。式(4.114)描述了一种 AM-PM 型电路，如图 4.27 所示。基带信号处理电路由 $m(t)$ 产生 $R(t)$ 和 $\theta(t)$。对于给定的调制类型，R 和 θ 都是调制信号 $m(t)$ 的函数，如表 4.1 所示。非线性模拟电路或运行实现 R 和 θ 算法程序的数字计算机可实现对信号的处理。在采用数字计算机的实现方法中，输入端要有一个 ADC，输出端要有两个 DAC。如图 4.27 所示，实现 AM-PM 标准形式时需要射频电路。

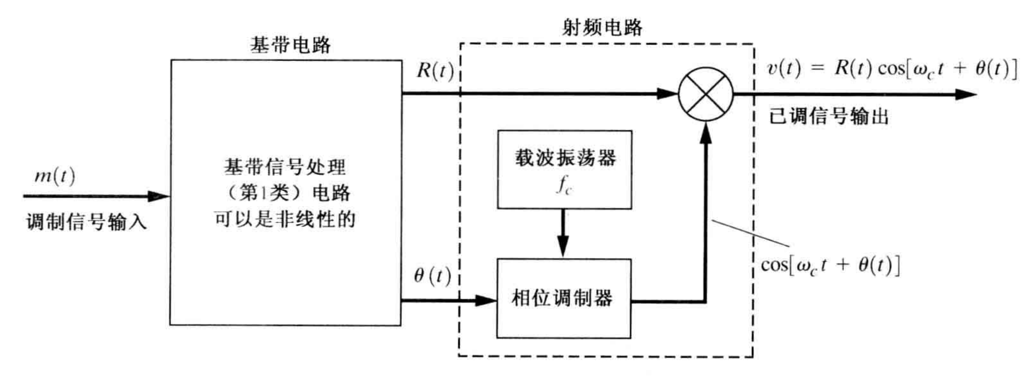


图 4.27 采用 AM-PM 产生技术的通用发射机

图 4.28 给出了通用发射机的第 2 种标准形式。该形式采用同相和正交(IQ)信号处理方法。同样，表示 $x(t)$ 和 $y(t)$ 与 $m(t)$ 关系的公式在表 4.1 中给出。基带信号处理可用模拟硬件或采用软件编程的数字硬件来实现。如图 4.28 所示，该标准形式使用了射频电路。

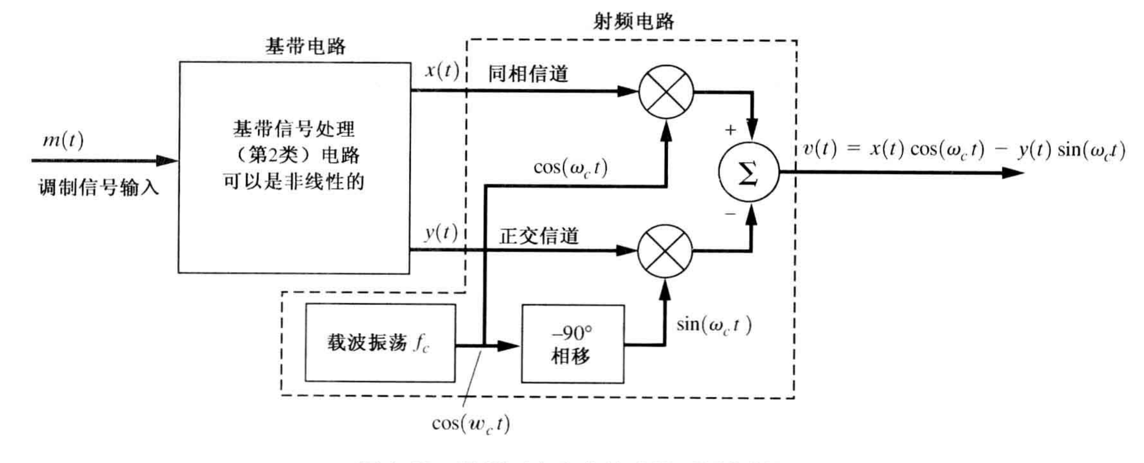


图 4.28 采用正交产生技术的通用发射机

例题 4.5　通过正交(IQ)处理的 QM 信号的形成

重做例题 4.1，但使用由图 4.28 所示的 IQ 信号处理方法形成 QM 信号。解题过程及结果见 M 文件 Example4_05.m。注意，由 IQ 信号处理方法形成的 QM 信号与例题 4.1 所用的复包络处理得到的信号是相同的。

需要再次强调的是，任何类型的信号调制(AM、FM、SSB、QPSK 等)均可用这两种标准形式之一产生，这两种形式方便地将基带处理从射频处理中分离开来。数字技术在基带处理部分特别有用。而且，若采用数字计算电路，选择相应的算法软件，即可得到所需的调制类型。

当今实际应用中采用的发射机都是这些标准形式发射机的变形。实际发射机在某些较易实现的低射频频率上实现射频操作，然后将其上变频到所需的频率。当射频信号不包括 AM 分量时，可采用倍频器达到工作频率。当然，通常还需要功率放大器，将输出功率水平提高到所需的值。若射频信号不包括幅度变化，可采用 C 类放大器(具有较高效率)。否则，可采用 B 类放大器。

4.16.2　通用接收机：超外差接收机

接收机的任务是从接收到的可能被噪声污染的已调信号中提取源信息。通常，理想情况下接收机的输出是发射机输入端的调制信号的重现。接收机主要有两类：射频调谐(TRF)接收机和超外差接收机。

TRF 接收机包括一系列调谐到载频 f_c 上的高增益级联射频带通电路，后接一个相应的检波器电路(如包络检波器、乘积检波器、FM 检波器等)。TRF 不是很常见，这是因为很难设计出调谐的射频级以选择所需的广播站，且又具有窄带宽，以抑制邻近信道广播站的干扰。此外，很难在无线频率上获得高增益，同时又使射频放大通路的输出和输入间的寄生耦合足够小，以防通路在频率 f_c 上成为振荡器。由 Cub Scouts 构造的"石英装置"是单射频级 TRF 接收机的一个例子，它在射频级上没有增益。TRF 接收机经常用于测量无线电信道的时散(多径)特性[Rappaport,1989]。

许多接收机采用如图 4.29 所示的超外差接收技术。该技术将输入信号下变频或上变频到某些方便的频段上，称为中频(IF)频段，然后用合适的检波器将信息(或调制信号)提取出来①。这种基本接收机结构用于接收所有类型的带通信号，如电视信号、FM 信号、AM 信号、卫星信号、蜂窝信号及雷达信号等。射频放大器具有带通特性以使所需要的信号通过，它能放大信号以淹没混频器中产生的噪声。射频滤波器也滤除一些邻近信道的信号和噪声，但邻近信道的信号和噪声滤除主要由 IF 滤波器完成。

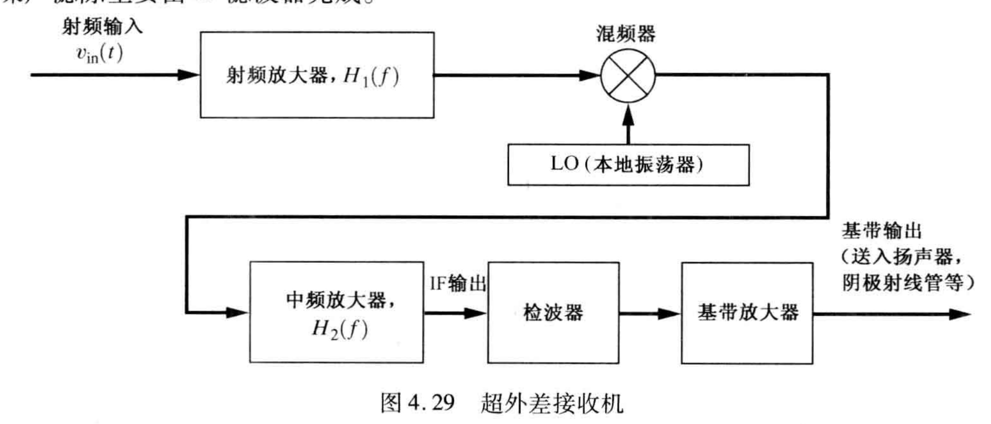


图 4.29　超外差接收机

① 也可构造两级超外差接收机。在图 4.29 所示的第一个 IF 级后接第 2 个混频器和第 2 个 IF 级。

中频滤波器是选择上变频分量或下变频分量(选择哪个由接收机设计者决定)的带通滤波器。当选择上变频分量时，除了射频滤波特性 $H_1(f)$ 和中频滤波特性 $H_2(f)$ 外，中频(带通)滤波器输出的复包络与射频输入的复包络相同。但是，若选择下变频分量，$f_{LO}>f_c$，中频输出的复包络是射频输入的共轭[见式(4.61c)]。这意味着中频输出的边带之间反转了(即射频输入的上边带成为中频输出的下边带)。若 $f_{LO}<f_c$，边带不反转。

中频放大器中心频率的选择基于以下三个考虑：

- 中频频率应能使我们经济地得到具有稳定高增益的中频放大器。
- 中频频率应足够低，这样对中频滤波器的实际电路元件来说，Q 的取值能使滤波器在中频信号的带宽外具有急剧衰减的特性。这将降低噪声，并使邻近信道的干扰最小。
- 中频频率应足够高，以使接收机的像频响应足够小。

像频响应是指由于射频放大滤波器对像频信号没有足够地衰减而在像频上接收到不需要的信号。像频响应用下面的例子可以很好地说明。

例题 4.6　AM 广播超外差接收机

假设某 AM 广播频段的无线接收机调谐到 850 kHz 的广播站上，接收机本机振荡器频率在载波频率以上。若中频为 455 kHz，本机振荡器频率将是 850 + 455 = 1305 kHz(见图 4.30)。而且，假设无线接收机的射频输入处有其他信号，其中一个信号位于 1760 kHz 处。该信号将被混频器下变频到 1760 − 1305 = 455 kHz。也就是说，不需要的(1760 kHz)信号将移频到 455 kHz，在混频器输出端被加到需要的信号(850 kHz)上，该信号也下变频到 455 kHz。这个被转换到中频频段的不需要的信号称为像频信号。若射频放大器在 1760 kHz 处的增益比 850 kHz 处的增益低 25 dB，而在接收机输入端不需要的信号比需要的信号高 25 dB，则两信号移频到中频频段上后具有相同电平。这种情况下，检测处理时不需要的信号肯定会干扰需要的信号。

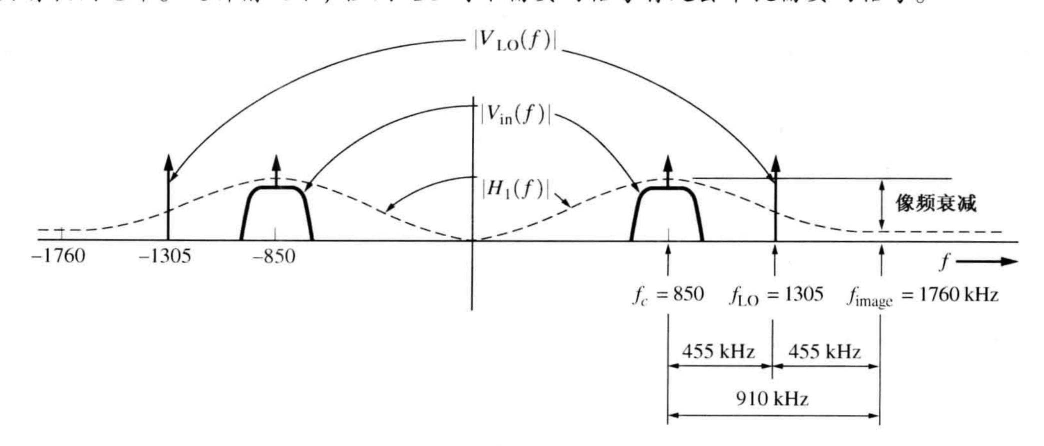


图 4.30　超外差接收机中的射频放大器的信号频谱和传输函数频谱

对下变频器(即 $f_{IF}=|f_c-f_{LO}|$)，像频为

$$f_{\text{image}}=\begin{cases}f_c+2f_{IF}, & \text{若} f_{LO}>f_c \quad (\text{具有高边输入})\\ f_c-2f_{IF}, & \text{若} f_{LO}<f_c \quad (\text{具有低边输入})\end{cases} \tag{4.117a}$$

其中，f_c 是需要的射频频率，f_{IF} 是中频频率，f_{LO} 是本地振荡器频率。对上变频器(即 $f_{IF}=f_c+f_{LO}$)，像频为

$$f_{\text{image}}=f_c+2f_{LO} \tag{4.117b}$$

由图4.30可以看出，由于f_{image}距离射频滤波器特性$|H_1(f)|$的主峰值(主瓣)很远，若中频频率增加，像频响应通常将降低。

回顾先前关于混频器的讨论，可知在实际混频电路中将出现其他假信号响应(除像频响应以外)。好的接收机设计必须考虑这些因素。

表4.4给出了已成为事实标准的一些典型中频频率。对于要实现的应用，IF频率应足够低，使得当电路元件具有可实现的Q值时，中频滤波器能滤除邻近信道的干扰信号。但是中频频率也应足够高以保证射频放大滤波器能滤除掉足够多的像频信号。

超外差接收机中检波器的选择取决于要实现的应用。例如，乘积检波器可用于PSK(数字)系统，包络检波器可用于AM广播接收机中。如果数字系统中对一般信号检测或最佳接收时，想要得到信号的复包络$g(t)$，则可用图4.31所示的正交乘积检波器得到$x(t)$和$y(t)$正交分量，其中$x(t)+jy(t)=g(t)$。$x(t)$和$y(t)$可送入信号处理器以提取调制信息。不考虑噪声的因素，利用表4.1中给出的复包络产生函数的逆，信号处理器可以从$x(t)$和$y(t)$中恢复出调制信号$m(t)$(因而完成对中频信号的解调)。

表 4.4　美国常用的中频频率

中频频率	应　用
262.5 kHz	AM 无线电广播(车载广播中)
455 kHz	AM 无线电广播
10.7 MHz	FM 无线电广播
21.4 MHz	FM 双向无线电
30 MHz	雷达接收机
43.75 MHz(视频载波)	电视机
60 MHz	雷达接收机
70 MHz	卫星接收机

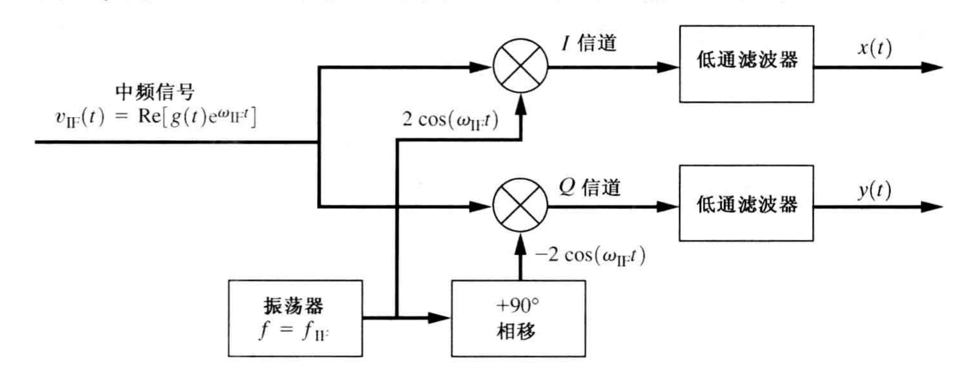


图4.31　IQ(同相和正交)检波器

超外差接收机有许多优点，也有一些缺点。主要优点是在稳定状态下(无自激)可产生极高的增益。由于增益是在分离的频段(射频、中频、基带)获得的，因此接收机输出和输入间的寄生耦合不会产生振荡。改变本地振荡器信号的频率(可由频率合成器提供)，将射频放大器的通带调谐到所需的频率上，就可很容易地将接收机调谐到另一个频率上。此外，用于滤除相邻信道干扰的高Q元件(产生急剧下降的滤波器特性)只在固定调谐中频放大器中需要用到。超外差接收机的主要缺点是：若设计时不注意，会出现对假信号的响应。

4.16.3　零中频接收机

当超外差接收机的本地振荡器频率与载波频率相等($f_{LO}=f_c$)时，$f_{IF}=0$，则该接收机成为零中频或直接转换接收机①。这时，中频滤波器成为低通滤波器(LPF)。这样的混频器-LPF的结

① 直接转换接收机也称为零差接收机或同步接收机。

合起到乘积检波器的作用(这时不需要图 4.29 所示的检波器)。为了从复包络中恢复$x(t)$和$y(t)$分量，还要增加一个正交下变频器。这时零中频接收机具有图 4.31 所示的方框图，其中输入信号位于f_c上，并将图中的ω_{IF}用ω_c代替。$x(t)$和$y(t)$分量可用模数转换器进行抽样和数字化，这样复包络$g(t)=x(t)+jy(t)$可用 DSP 硬件进行数字处理，DSP 将在 4.17 节讨论。对抽样器和 DSP 硬件，模拟 LPF 起到滤除假信号的作用。零中频接收机与具有乘积检波的 TRF 接收机很相似。

零中频接收机有许多优点。它没有像频响应。很多不同的应用可采用相同的零中频接收机硬件，这在成本上很经济。由于采用了 DSP 硬件，有效的射频带通特性和检波器特性可由 DSP 软件决定(见下一节)。可容易地改变该软件以适应所需的应用需求。通过选择合适的本地振荡器频率($f_{LO}=f_c$)，将前置滤波器(通常是单调谐电路)调谐到f_c上，可将同一零中频硬件用于不同的 VHF 和 UHF 频段的接收机中。

零中频接收机也有缺点。如由于混频器的馈通而在天线输入端口有可能泄露出本地振荡信号。还有就是由于正弦波(本地振荡器信号)自乘后会产生直流项(加带外二次谐波)，因此若天线输入处有本地振荡信号的泄露的话，混频器输出上将有直流偏置。采用高品质平衡混频器及屏蔽本地振荡器将会减少这些问题。由于前置滤波器通常不是高增益、低噪声的器件，因此接收机也会有较差的噪声系数。在任何接收机中应仔细设计硬件，以保证有足够大的动态范围避免强信号在接收机上过载(由于非线性产生假信号)，同时要有足够的增益以检测弱信号。尽管有这些困难，零中频接收机仍然为许多应用提供了经济的、高性能的解决方案。在 QST[Frohne,1998]中描述了由 DSP 滤波提供的具有优良选择性的实用零中频接收机方案。

4.16.4 干扰

如果不考虑干扰的某些成因，关于接收机的讨论就不完整。通常，接收机所有者认为某一特定信号，如业余无线电信号导致了干扰。这也许不是问题所在。干扰的来源可能是以下三处中的某一处：

- 在干扰信号源处，发射机可能会产生落在所需信号频段上的带外信号分量(如各次谐波)。
- 在接收机本身，前置滤波器可能过载或产生假信号。当接收机射频或混频器被干扰信号驱动到非线性区时，前置滤波器出现过载。在接收机射频放大器的输出端，该非线性在所需信号上产生了交调。
- 在信道中，传输媒质的非线性会在所需信号频段上产生不需要的信号分量。

要了解接收机设计中的更多内容以及实用接收电路的例子，可参考 ARRL 手册[ARRL, 2010]。

4.17 软件无线电

软件无线电采用 DSP 硬件、微处理器、专用数字 IC 及软件产生用于传输的调制信号(见表 4.1 和图 4.28)，然后在接收端解调信号。最终，理想的软件接收机应在天线处用模数转换器(ADC)对信号抽样、数字化，然后用 DSP(Digital Signal-Processing)硬件处理信号。软件用于计算接收机输出。该方法的困难在于几乎不可能制造出工作速度足够快、能处理载频在 GHz 级的

宽带已调信号的 ADC/DSP 硬件[Baines,1995]。但是，这些信号的复包络可用具有正交检波器的超外差接收机获得(见图4.31)。对适当的带通宽度(如25 MHz)，复包络的同相分量(I)和正交(Q)分量 $x(t)$ 和 $y(t)$ 可由实用的 DSP 硬件抽样和数字化，然后用软件程序处理。

在另一种方法中，可采用高速模数转换器提供中频信号的抽样。该信号通过一个数字下变频(DDC)集成电路(如 Intersil 公司的 HSP50016)[Chester,1999]。DDC 将中频抽样值乘以余弦和正弦 LO 信号的抽样值，将中频采样下变频到基带 I 和 Q 采样。DDC 用 ROM 查表的方法得到本地振荡器的余弦和正弦抽样值，该方法与4.15 节讨论的直接数字合成(DDS)技术类似。为了同时接收各相邻信道的信号，可采用多个与 DDC 本地振荡器并行的 DDC 集成电路。这些 DDC 电路将调谐到合适的频率，以将信号下变频到该信号的基带同相(I)和正交(Q)抽样值上(更详细的内容见 Intersil 的网址：http://www.intersil.com)。

复包络 $g(t)=x(t)+jy(t)$ 的同相(I)分量和正交(Q)分量的抽样值可经滤波产生等效带通中频滤波结果(如4.5 节描述的那样)。该滤波可提供具有极高的抗邻近信道干扰的等效中频滤波器特性。改变软件可很容易地改变滤波器特性。通常都采用升余弦滚降滤波特性，以减少数字信号的传输带宽，同时不带来码间串扰(ISI)。为了减少信道噪声引起的比特错误，同时消除 ISI，在发射机和接收机中都使用了平方根升余弦滤波器[见3.6 节的式(3.78)]。

可采用滤波后的同相(I)分量和正交(Q)分量分别计算式(4.4a)和式(4.4b)的复包络幅度和相位，从而完成 AM 信号和 PM 信号的检波。FM 信号的检波可通过计算式(4.8)所示的相位的导数得到。

FFT 可用 DSP 集成电路有效地计算，因此在软件无线电中也可采用傅里叶变换。例如，FFT 频谱可用来确定邻近信道信号是否存在。然后，可用合适的软件处理来增强或消除某一信号(根据特定应用的需要)。FFT 也可用于同时检测紧密排列的许多已调载波上的数据(具体细节见5.12 节关于 OFDM 的讨论)。

软件无线电技术有许多优点，其中两点是：由于不同的无线电功能是通过软件区分的，因此许多不同类型的无线电系统均可用同样的硬件实现；软件无线电售出后，通过下载升级后的版本，就可使软件包含有最新的协议和特性。软件无线电正在变得越来越经济、实用，它是未来通信系统的发展方向。

更多有关软件无线电的实际设计方法及电路见 2011ARRL 手册[ARRL, 2010]。若要探索软件无线电的实践设计，可参见以下网址：http://gnuradio.org。GNU Radio 是一款可供学习、建立和部署软件定义无线电系统的免费软件工具箱，也可在维基百科上查看 GNU Radio 的内容。

4.18　小结

本章分析了带通信号传输的基本技术。我们发现用复包络技术表示带通信号和滤波器非常有用。本章还给出了滤波器、放大器、限幅器、混频器、倍频器、锁相环以及检波器等通信电路的输出分析及描述，采用了线性电路及非线性电路的分析方法。我们认为超外差接收电路是通信接收机设计的基础。本章还分析了通用发射机、接收机及软件无线电的概念。设计中的实际问题，如计算假信号方法，本章也有分析。

4.19 助学例题

SA4.1 AM 信号的电压谱 载波频率为 1150 kHz 的 AM 电压信号 $s(t)$，具有复包络 $g(t)=A_c[1+m(t)]$，$A_c=500$ V。调制信号是 1 kHz 的正弦测试单音，即 $m(t)=0.8\sin(2\pi1000t)$。计算该 AM 信号的电压谱。

解： 采用 A.1 节正弦波的定义，有：

$$m(t)=\frac{0.8}{\mathrm{j}2}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi1000t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi1000t}] \tag{4.118}$$

由 A.5 节及式(2.26)，可知 $m(t)$ 的傅里叶变换为①

$$M(f)=-\mathrm{j}0.4\delta(f-1000)+\mathrm{j}0.4\delta(f+1000) \tag{4.119}$$

将该式代入式(4.20a)，就得到 AM 信号的电压谱为

$$\begin{aligned}S(f)=&250\delta(f-f_c)-\mathrm{j}100\delta(f-f_c-1000)+\mathrm{j}100\delta(f-f_c+1000)\\&+250\delta(f+f_c)-\mathrm{j}100\delta(f+f_c-1000)+\mathrm{j}100\delta(f+f_c+1000)\end{aligned} \tag{4.120}$$

AM 信号波形图及使用 FFT 计算的信号频谱图见 M 文件 SA4_1.m。将频谱图与式(4.120)所给出的结果进行比较。

SA4.2 AM 信号的 PSD 计算助学例题 SA4.1 所述 AM 信号的 PSD。

解： 由式(2.71)，可得正弦调制信号 $m(t)$ 的自相关函数为

$$R_m(\tau)=\frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau=\frac{A^2}{4}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0\tau}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0\tau}] \tag{4.121}$$

式中，$A=0.8$，$\omega_0=2\pi1000$。由式(2.26)对上式取傅里叶变换，可得 $m(t)$ 的 PSD 为②

$$\mathcal{P}_m(f)=\frac{A^2}{4}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$$

或

$$\mathcal{P}_m(f)=0.16[\delta(f-1000)+\delta(f+1000)] \tag{4.122}$$

AM 信号复包络的自相关函数为

$$\begin{aligned}R_g(\tau)&=\langle g^*(t)g(t+\tau)\rangle=A_c^2\langle[1+m(t)][1+m(t+\tau)]\rangle\\&=A_c^2[\langle1\rangle+\langle m(t)\rangle+\langle m(t+\tau)\rangle+\langle m(t)m(t+\tau)\rangle]\end{aligned}$$

但由于 $\langle1\rangle=1$，$\langle m(t)\rangle=0$，$\langle m(t+\tau)\rangle=0$，$\langle m(t)m(t+\tau)\rangle=R_m(\tau)$。因此有：

$$R_g(\tau)=A_c^2+A_c^2R_m(\tau) \tag{4.123}$$

对式(4.123)两端取傅里叶变换，可得：

$$\mathcal{P}_g(f)=A_c^2\delta(f)+A_c^2\mathcal{P}_m(f) \tag{4.124}$$

将式(4.124)代入式(4.13)，并由式(4.122)，可得 AM 信号的 PSD 为

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_s(f)=&62\,500\delta(f-f_c)+10\,000\delta(f-f_c-1000)\\&+10\,000\delta(f-f_c+1000)+62\,500\delta(f+f_c)\\&+10\,000\delta(f+f_c-1000)+10\,000\delta(f+f_c+1000)\end{aligned} \tag{4.125}$$

(注意：我们看到该带通 $s(t)$ 信号的 PSD 是将基带信号 $g(t)$ 的 PSD 上移到 f_c 和下移到 $-f_c$ 而得到的。

---

① 由于 $m(t)$ 是周期信号，由式(2.109)还可得到计算 $M(f)$ 的另一种方法，其中 $c_{-1}=\mathrm{j}0.4$，$c_1=-\mathrm{j}0.4$，其他 c_n 为 0。

② 由于 $m(t)$ 是周期信号，式(2.126)可作为计算 $\mathcal{P}_m(f)$ 的另一种方法。即由式(2.126)，且 $c_1=c_{-1}^*=A/(2\mathrm{j})=-\mathrm{j}0.8/2=-\mathrm{j}0.4$(其他 c_n 为 0)，可得式(4.122)。

此外，对 AM 信号来说，$g(t)$的 PSD 是由 $m(t)$的 PSD 加$f=0$ 处的 δ 函数组成的。)

SA4.3　AM 信号的平均功率　假设助学例题 SA4.1 所述的 AM 电压信号 $s(t)$通过 50 Ω 的负载电阻。试计算负载上实际消耗的平均功率。

解： 由式(4.21)，归一化平均功率为

$$\begin{aligned}(P_s)_{\text{norm}} &= (V_s)^2_{\text{rms}} = \frac{1}{2}A_c^2[1 + (V_m)^2_{\text{rms}}] \\ &= \frac{1}{2}(500)^2\left[1 + \left(\frac{0.8}{\sqrt{2}}\right)\right]^2 = 165\ \text{kW}\end{aligned} \tag{4.126a}$$

注意，另一种计算$(P_s)_{\text{norm}}$的方法是计算 $s(t)$的 PDF 曲线下的面积。即由式(4.125)得：

$$(P_s)_{\text{norm}} = (V_s)^2_{\text{rms}} = \int_{-\infty}^{\infty} P_s(f)\,\mathrm{d}f = 165\ \text{kW} \tag{4.126b}$$

由式(4.126a)或式(4.126b)，可得消耗在 50 Ω 负载上的实际平均功率为①

$$(P_s)_{\text{actual}} = \frac{(V_s)^2_{\text{rms}}}{R_L} = \frac{1.65 \times 10^5}{50} = 3.3\ \text{kW} \tag{4.127}$$

SA4.4　AM 信号的 PEP　若助学例题 SA4.1 中的 AM 电压信号通过 50 Ω 的负载电阻，试计算实际峰值包络功率(PEP)。

解： 由式(4.18)，可得归一化 PEP 为

$$\begin{aligned}(P_{\text{PEP}})_{\text{norm}} &= \frac{1}{2}[\max|g(t)|]^2 = \frac{1}{2}A_c^2[1 + \max m(t)]^2 \\ &= \frac{1}{2}(500)^2[1 + 0.8]^2 = 405\ \text{kW}\end{aligned} \tag{4.128}$$

则通过 50 Ω 负载上的 AM 电压信号的实际 PEP 为

$$(P_{\text{PEP}})_{\text{actual}} = \frac{(P_{\text{PEP}})_{\text{norm}}}{R_L} = \frac{4.50 \times 10^5}{50} = 8.1\ \text{kW} \tag{4.129}$$

SA4.5　带通信号的抽样方法　假设要对带通信号 $s(t)$进行抽样，抽样值要储存起来在以后的处理中使用。如图 4.32(a)所示，该带通信号的带宽为 B_T，中心频率为f_c，且$f_c \gg B_T$，$B_T>0$。用图 4.32 所示的三种方法中的任一种对信号 $s(t)$进行抽样②。对每一种抽样方法，确定所需的最小的抽样频率(即最小时钟频率)，讨论每一种方法的优点和缺点。

解：第 1 种方法　由图 4.32(a)可知第 1 种方法采用了第 2 章所述的直接抽样。由式(2.168)可知最小抽样频率是$(f_s)_{\min}=2B$，式中，B 是信号的最高频率。对该带通信号，最高频率是 $B=f_c+B_T/2$。故对第 1 种方法，最小抽样频率为

$$(f_s)_{\min} = 2f_c + B_T \quad \text{第1种方法} \tag{4.130}$$

例如，若$f_c=100$ MHz，$B_T=1$ MHz，则需要的最小抽样频率为$(f_s)_{\min}=201$ MHz。

第 2 种方法　由图 4.32(b)可知第 2 种方法是将带通信号下变频至中频(IF)，这样要抽样的最高频率极大地降低了。要最大程度地降低最高频率，选择③本地振荡器频率为$f_0=f_c-B_T/2$。下变频后的信号(抽样器输入端)的最高频率为 $B=(f_c+B_T/2)-f_0=f_c+B_T/2-f_c+B_T/2=B_T$，且最低频率(在下变频信号的正频率部分)为$(f_c-B_T/2)-f_0=f_c-B_T/2-f_c+B_T/2=0$。由式(2.168)，可知最小抽样频率为

$$(f_s)_{\min} = 2B_T \quad \text{第2种方法} \tag{4.131}$$

这时本地振荡器频率选择为$f_0=f_c-B_T/2$。这样选择本地振荡器频率后，带通滤波器变成截止频率为B_T的低通滤波器。注意，第 2 种方法相比第 1 种方法极大地降低了抽样频率(优点)。例如，若$f_c=$

---

① 若 $s(t)$是电流信号(而不是电压信号)，则$(P_s)_{\text{actual}}=(I_s)^2_{\text{rms}}R_L$。

② 感激佛罗里达大学电气与计算机工程系的 Christopher S. Anderson 教授给出了第 2 种方法。

③ 采用低边本地振荡器插入，以使 $s(t)$的两个边带的不对称性在下变频后的信号中保存。

100 MHz，$B_T=1$ MHz，则这时最低抽样频率是$(f_s)_{\min}=2$ MHz，而不是第1种方法的201 MHz。但是，第2种方法需要使用下变频器(缺点)。注意，式(4.131)给出的第2种方法的$(f_s)_{\min}$满足式(4.31)所述带通抽样定理的$(f_s)_{\min}$。

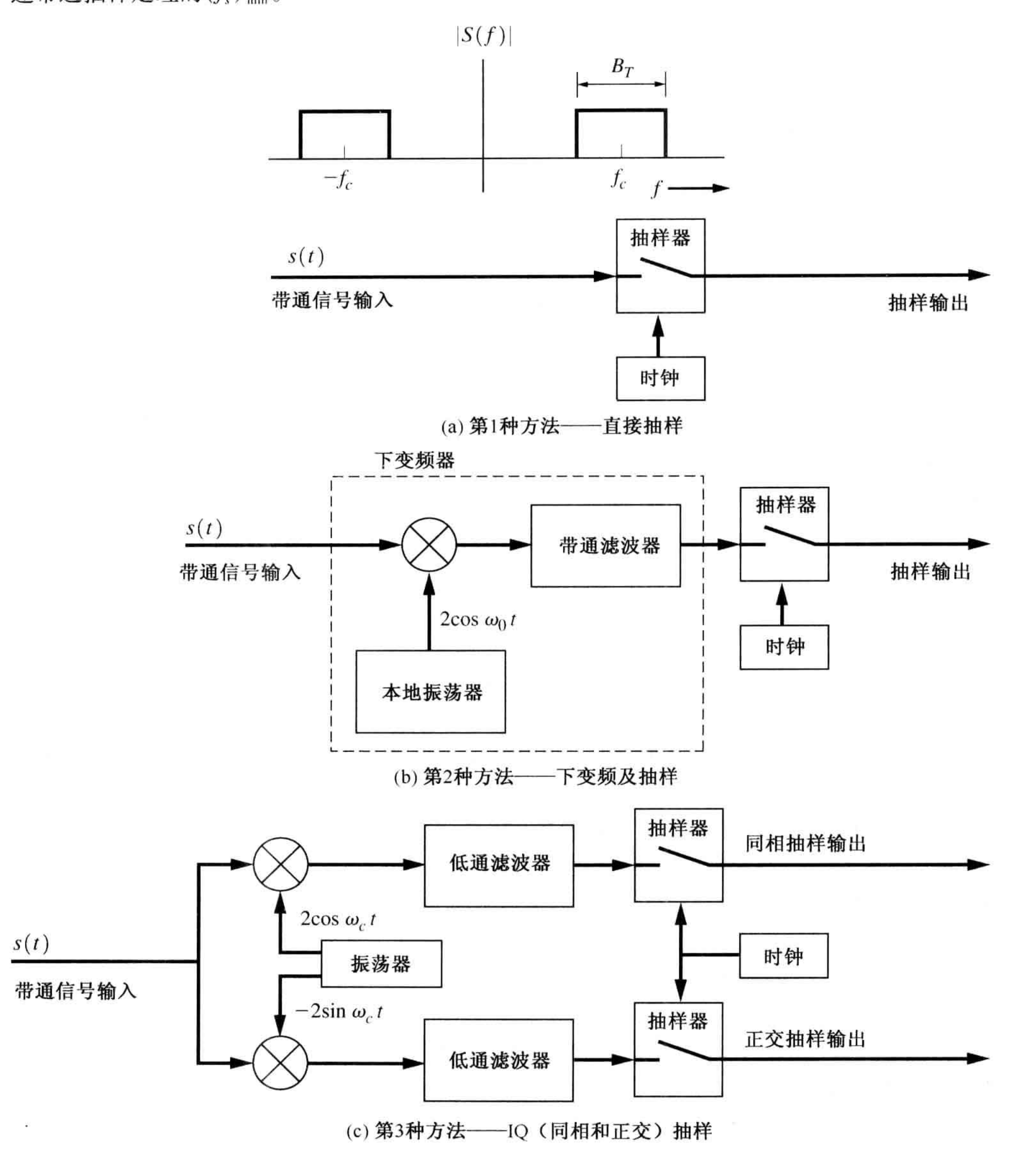


图4.32　对带通信号进行抽样的三种方法

第2种方法是获得带通信号抽样值最有效的方法之一。当采用式(2.158)和式(2.160)由抽样值重建带通信号时，就可得到下变频后的带通信号。要得到原始带通信号$s(t)$，应采用上变频器将下变频信号转换回原始的带通频段上。

第2种方法也可用来得到复包络的正交(即I和Q)分量的抽样值。由图4.32(b)，抽样器输入端的中频信号为

$$v_{\mathrm{IF}}(t)=x(t)\cos\omega_{\mathrm{IF}}t-y(t)\sin\omega_{\mathrm{IF}}t$$

式中，$f_{\mathrm{IF}}(t)=B_T/2$。若在对应$\cos\omega_{\mathrm{IF}}t=\pm1$($\sin\omega_{\mathrm{IF}}t=0$)的时刻对$v_{\mathrm{IF}}(t)$抽样，则可得到$x(t)$的抽样值。这样每秒产生$B_T$个$x(t)$的抽样值。同样，在$\sin\omega_{\mathrm{IF}}t=\pm1$($\cos\omega_{\mathrm{IF}}t=0$)的时刻抽样可得$y(t)$的抽

样值。这样每秒产生 B_T 个 $y(t)$ 的抽样值。时钟的复合抽样率为 $f_s=2B_T$。因此，抽样器输出包含同相和正交分量值的以下序列：x，$-y$，$-x$，y，x，$-y$，…。采用载波同步电路可使抽样时钟与中频相位同步。第 3 种方法与此类似。

第 3 种方法　由图 4.32(c)知第 3 种方法采用同相(I)和正交(Q)乘积检波器产生 $s(t)$ 的 $x(t)$ 和 $y(t)$ 正交分量(这已在 4.16 节中讨论过，如图 4.31 所示)。$x(t)$ 和 $y(t)$ 中的最高频率为 $B=B_T/2$。因此，由式(2.168)可知同相(I)和正交(Q)抽样器时钟的最小抽样频率为

$$(f_s)_{\min}=B_T\quad(\text{每个抽样器})\text{第3种方法}\tag{4.132}$$

由于有两个抽样器，因此复合抽样率为 $(f_s)_{\text{min overall}}=2B_T$。这也满足式(4.31)所述带通信号允许的最小抽样率。因此，第 3 种方法(像第 2 种方法一样)是得到带通信号抽样值的最有效的方法之一。对于 $f_c=100$ MHz，$B_T=1$ MHz 的情况，第 3 种方法和第 2 种方法一样，都需要 2 MHz 的总抽样率。由于已得到 IQ 抽样值，因此可以用 4.5 节中所述的采用 DSP 算法对其进行等效带通滤波，或如 4.2 节中所述的用 DSP 算法对其进行任一类型的等效调制。如果需要，可用式(4.32)重构原始带通信号。

SA4.6　接收机本地振荡器频率合成器的设计　设计一个用作 AM 超外差无线电接收机的本地振荡器的频率合成器。无线电接收机具有 455 kHz 的中频，调谐在 530 kHz 到 1710 kHz 的 AM 频段上，频率步长为 10 kHz。合成器采用 1 MHz 的参考振荡器，产生高边本机振荡器插入信号。

解：参考式(4.59)和图 4.29 的下变频和高边插入情况，可知本地振荡器所需的频率为 $f_0=f_c+f_{IF}$。若 $f_c=530$ kHz，$f_{\text{IF}}=455$ kHz，所需的合成器输出频率为 $f_0=985$ kHz。参考频率合成器框图(见图 4.25)，选择混频器输入信号 $v_{\text{in}}(t)$ 的频率为 5 kHz，即为所需频率步长 10 kHz 的一半，则 $M=f_x/f_{\text{in}}=1000\ \text{kHz}/5\ \text{kHz}=200$。可以找到 N 的整数值以给出所需的本地振荡器频率。由式(4.112)可得 $N=f_0/f_{\text{in}}$。对 $f_0=985$ kHz，$f_{\text{in}}=5$ kHz，可得 $N=197$。因此，要将接收机调谐到 $f_c=530$ kHz，所需的 M 和 N 值分别为 $M=200$，$N=197$。同样，可得其他 N 值，对应于将接收机调谐到 540、550、…、1710 kHz(M 保持为 200)。表 4.5① 列出了所得结果。为使合成本地振荡器信号上的寄生边带噪声最小，M 和 N 的值应取小。尽量使频率步长 f_{in} 足够大可使 M 和 N 的值最小。

采用低噪声参考振荡器和低噪声 VCO，选择较小的 N 值以减少合成信号上的互调噪声分量的个数，就可使合成器输入信号上的边带谱噪声最小化。同时环路滤波器的带宽也最小化了。但若环路滤波器的带宽太小的话，同步带就不足以使合成器 PLL 可靠地锁定。本例中，如果中频值采用 450 kHz而非 455 kHz，则 N 值可减少约 $\frac{1}{2}$。例如，对 $f_{\text{IF}}=450$ kHz，$f_c=530$ kHz，需 $f_0=980$ kHz。相比于(见表 4.5①)$M=200$ 和 $N=197$(当 $f_{\text{IF}}=455$ kHz 时所需的)不同，此时 $M=100$(频率步长 $f_{\text{in}}=10$ kHz)，$N=98$ 就可得到该本地振荡器频率。

表 4.5　助学例题 SA4.6 的解，分频比为 M 和 N 的 AM 射频合成器

参考频率 = 1000 kHz，中频频率为 455 kHz

接收到的频率 f_c(kHz)	本地振荡器频率 f_0(kHz)	M	N
530	985	200	197
540	995	200	199
550	1005	200	201
⋮	⋮	⋮	⋮
1700	2155	200	431
1710	2165	200	433

① 此处原文为表 4.6，有误。——译者注

习题

4.1 证明：若 $v(t) = \text{Re}\{g(t)e^{j\omega_c t}\}$，则式(4.1b)和式(4.1c)成立，式中，$g(t) = x(t) + jy(t) = R(t)e^{j\theta(t)}$。



4.2 一个 AM 信号由具有以下复包络的波形调制：

$$g(t) = A_c\{1 + a[0.2\cos(\pi 250t) + 0.5\sin(\pi 2500t)]\}$$

其中 $A_c = 10$。试求 a 值，使得 AM 信号具有正的 90% 调制百分比。提示：参见例题 4.3 和式(5.5a)。

★ 4.3 载频为 3.8 MHz 的双边带抑制载波(DSB-SC)信号 $s(t)$ 的复包络 $g(t) = A_c m(t)$，$A_c = 50$ V，调制信号为 1 kHz 的正弦测试单音，即 $m(t) = 2\sin(2\pi 1000t)$。试计算该 DSB-SC 信号的电压频谱。

4.4 一个 DSB-SC 信号具有 900 kHz 的载波频率，且 $A_c = 10$。如果该信号由具有图 P3.3 所示频谱的波形调制，试找出该 DSB-SC 信号的幅度谱。

4.5 假设习题 4.3 所述的 DSB-SC 电压信号 $s(t)$ 通过 50 Ω 的负载电阻。

(a)计算负载上实际消耗的平均功率。

(b)计算实际的 PEP。

4.6 对于习题 4.2 中的 AM 信号，$a = 0.5$，计算总的平均归一化功率。



4.7 对于习题 4.2 中的 AM 信号，$a = 0.5$，计算归一化 PEP。

4.8 图 P4.8 示出了一个带通滤波器。

(a)确定该滤波器转移函数 $H(f) = V_2(f)/V_1(f)$ 作为 R、L 和 C 的函数的数学表达式。画出幅度转移函数 $|H(f)|$ 的波形。

(b)确定等效低通滤波器转移函数的表达式。画出对应的低通幅度转移函数曲线。

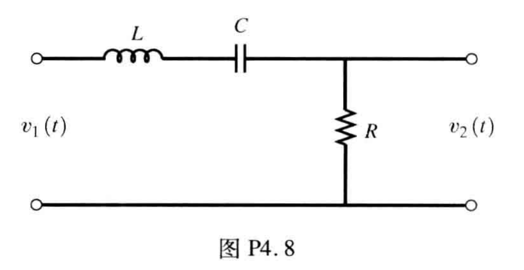


图 P4.8



★ 4.9 理想带通滤波器转移函数为

$$H(f) = \begin{cases} 1, & |f + f_c| < B_T/2 \\ 1, & |f - f_c| < B_T/2 \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

式中，B_T是滤波器的绝对带宽。

(a)画出幅度转移函数 $|H(f)|$ 的波形。

(b)若输入信号包含下式表示的脉冲载波，试确定输出端波形的表达式 $v_2(t)$。

$$v_1(t) = A\Pi(t/T)\cos(\omega_c t)$$

(c)当 $B_T = 4/T$ 且 $f_c \gg B_T$时，画出输出波形 $v_2(t)$。

(提示：用复包络技术，并将结果表示成用下式定义的正弦积分的函数：

$$\text{Si}(u) = \int_0^u \frac{\sin\lambda}{\lambda}\, d\lambda$$

从公开出版的列表中[Abramowitz 和 Stegun，1964])查找正弦积分值或对 Si(u)进行数值计算得到绘图结果。)

4.10 分析 RC 低通滤波器(见图 2.15)的失真特性。假设滤波器输入包含带宽为 1 kHz，载频为 15 kHz的带通信号。令滤波器时间常数为 $\tau_0 = RC = 10^{-5}$ s。

(a)确定输出载频波的相位延迟。

(b)确定载频的群延迟。

(c)计算信号频带内及周围频带的群延迟。画出该延迟与频率的函数关系曲线。

(d)运用(a)~(c)的结论，解释滤波器为何使带通信号失真或不失真。

★ 4.11　图 P4.11 所示的带通滤波器的转移函数为

$$H(s) = \frac{Ks}{s^2 + (\omega_0/Q)s + \omega_0^2}$$

其中，$Q = R\sqrt{C/L}$，谐振频率为 $f_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC})$，$\omega_0 = 2\pi f_0$，K 为常数，R、L 和 C 的值在图中给出。假设 $f_c = 4$ kHz，带宽为 200 Hz 的带通信号通过滤波器，其中 $f_0 = f_c$。

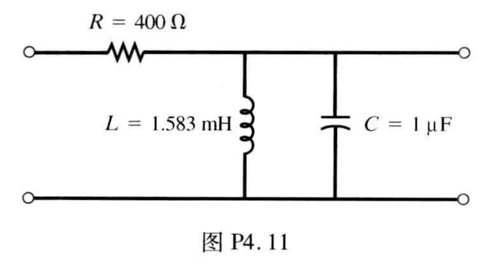


图 P4.11

(a)由式(4.39)确定滤波器带宽。

(b)将载波延迟作为 f 的函数，画出 f_0 附近的曲线。

(c)将群延迟作为 f 的函数，画出 f_0 附近的曲线。

(d)解释滤波器为何使信号失真或不失真。

4.12　某 FM 信号为

$$s(t) = A_c \cos\left[\omega_c t + D_f \int_{-\infty}^{t} m(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\right]$$

式中，$m(t)$ 是调制信号 $\omega_c = 2\pi f_c$，f_c 为载频。证明表 4.1 中给出的关于 FM 信号的函数关系式 $g(t)$、$x(t)$、$y(t)$、$R(t)$ 和 $\theta(t)$ 成立。

4.13　一个 96.9 MHz 的 FM 发射机的输出向一个具有 50 Ω 电阻负载的天线系统发送 25 kW 的平均功率。确定天线系统输入端的峰值电压值。

★ 4.14　已知已调信号为

$$s(t) = 100\sin(\omega_c + \omega_a)t + 500\cos\omega_c t - 100\sin(\omega_c - \omega_a)t$$

其中，未调载波为 $500\cos\omega_c t$。

(a)确定已调信号的复包络。采用的是哪种调制？调制信号是什么？

(b)确定该已调信号正交调制分量 $x(t)$ 和 $y(t)$。

(c)确定该已调信号的幅度及 PM 分量 $R(t)$ 和 $\theta(t)$。

(d)确定总平均功率，其中 $s(t)$ 是加载到 50 Ω 负载上的电压波形。

★ 4.15　用两种方法确定习题 4.14 给出的已调信号的频谱：

(a)采用对 $s(t)$ 进行傅里叶变换的直接计算法。

(b)采用式(4.12)。

4.16　给定脉冲已调信号为

$$s(t) = e^{-at}\cos[(\omega_c + \Delta\omega)t]u(t)$$

式中，a、ω_c 及 $\Delta\omega$ 是正常数，载频 $w_c \gg \Delta\omega$。

(a)确定复包络。

(b)确定频谱 $S(f)$。

(c)画出幅度和相位谱 $|S(f)|$ 和 $\theta(f) = \angle S(f)$。

4.17　在带通滤波器的数字计算机仿真中，采用了冲激响应的复包络，其中 $h(t) = \mathrm{Re}[k(t)e^{j\omega_c t}]$，如图 4.3 所示。复冲激响应可用正交分量表示为 $k(t) = 2h_x(t) + j2h_y(t)$，其中 $h_x(t) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[k(t)]$，$h_y(t) = \frac{1}{2}\mathrm{Im}[k(t)]$。输入和输出的复包络可分别表示成 $g_1(t) = x_1(t) + jy_1(t)$，$g_2(t) = x_2(t) + jy_2(t)$。如图 P4.17 所示，带通滤波器仿真可采用 4 个实基带滤波器

(即具有实冲激响应的滤波器)实现。注意，尽管图中有4个滤波器，但只有2个不同的冲激响应：$h_x(t)$和$h_y(t)$。

(a)由式(4.22)，试明图P4.17是正确的。

(b)证明若带通滤波器的传递函数是关于f_c厄米特(Hermitian)对称的，即若$H(-\Delta f+f_c)=H^*(\Delta f+f_c)$，其中$|\Delta f|<B_T/2$，$B_T$是带通滤波器的频谱的带宽，则有$h_y(t)\equiv 0$(即不需要滤波器)。厄米特对称的意思是指带通滤波器的幅度频响关于f_c偶对称，相位响应关于f_c奇对称。

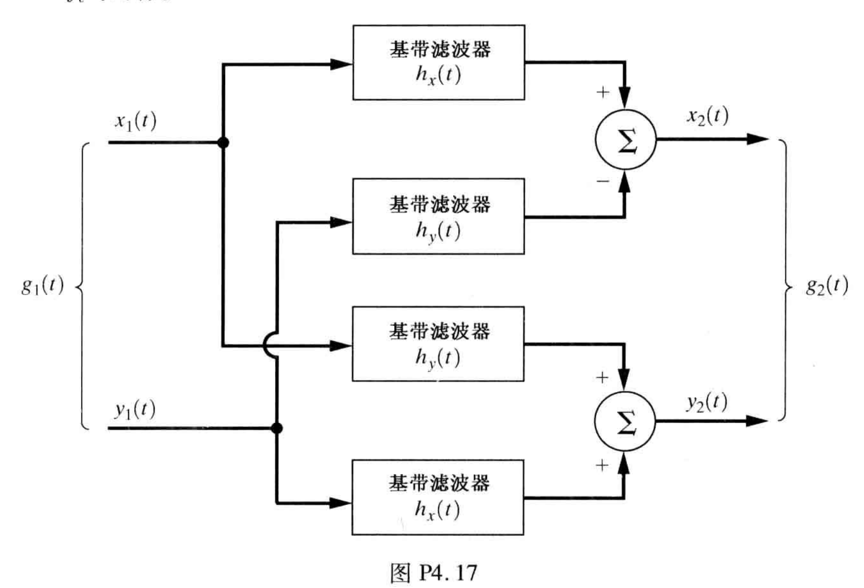


图 P4.17

4.18 计算并画出以下滤波器的幅度转移函数。(a)巴特沃思滤波器。(b)切比雪夫滤波器。(c)贝塞尔低通滤波器。假设$f_b=10$ Hz，$\varepsilon=1$。

★ 4.19 将以下低通滤波器的幅度响应、相位响应及相位延迟以频率为函数，绘出其曲线，其中，$B=100$ Hz。

(a)2阶巴特沃思滤波器

$$H(f)=\frac{1}{1+\sqrt{2}(\mathrm{j}f/B)+(\mathrm{j}f/B)^2}$$

(b)4阶巴特沃思滤波器

$$H(f)=\frac{1}{[1+0.765(\mathrm{j}f/B)+(\mathrm{j}f/B)^2][1+1.848(\mathrm{j}f/B)+(\mathrm{j}f/B)^2]}$$

比较两种滤波器得到的结果。

4.20 假设某带通放大器的输入-输出特性如式(4.42)所示，用双音测试信号计算放大器的线性度。

(a)确定落在放大器通带内的5阶互调乘积项的频率。

(b)计算用A_1、A_2及K表示的5阶互调乘积项的大小。

4.21 用单音测试信号测试放大器的总谐波失真(THD)，结果可在频谱分析仪上观察到。发现3个测得的谐波峰值依指数递归关系$V_{n+1}=V_n\mathrm{e}^{-n}$，$n=1,2,3$而递减。问其THD是多少？

★ 4.22 放大器的非线性输出-输入特性为：

$$v_{\text{out}}(t)=5v_{\text{in}}(t)+1.5v_{\text{in}}^2(t)+1.5v_{\text{in}}^3(t)$$

假设输入信号包含7个分量：

$$v_{in}(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos[(2k-1)\pi t]$$

(a) 画出输出信号波形，将其与线性输出分量 $5v_{in}(t)$ 进行比较。

(b) 对输出信号 $v_{out}(t)$ 进行 FFT 变换，将其与线性输出分量的频谱进行比较。

4.23　对带通限幅电路，证明带通输出由式(4.55)给出，其中 $K=(4/\pi)A_0$。A_0 表示带通滤波器的电压增益。假设在带通信号频率范围内增益是常数。

4.24　讨论泰勒级数非线性模型是否适于分析：(a) 软限幅器；(b) 硬限幅器。

★ 4.25　假设音频正弦测试信号通过音频硬限幅电路。计算限幅器输出端信号的总谐波失真(THD)。

4.26　采用第 2 章给出的线性的数学定义，证明图 4.10 所示的模拟开关乘法器是线性器件。

4.27　带宽为 10 kHz 的音频信号从载频为 1.0 MHz 的 AM 发射机上发射。AM 信号用具有包络检波器的超外差接收机接收。包络检波器 RC 时间常数的约束条件是什么?

★ 4.28　假设含有包络检波器的 AM 接收机调谐到调制波形为 $m(t)$ 的 SSB-AM 信号上。确定将接收机输出音频信号用 $m(t)$ 表示的数学表达式。输出音频信号是否失真?

4.29　根据表 4.1，确定包络检波器作为 $m(t)$ 的函数时输出的表达式，若输入为：

(a) DSB-SC 信号。

(b) FM 信号。

4.30　计算图 4.18 所示过零点 FM 检波器的灵敏度。假设差动放大器可描述为 $v_{out}(t)=A[v_2(t)-v_3(t)]$，其中 A 是放大器电压增益。特别地，证明 $v_{out}=Kf_d$，其中 $f_d=f_i-f_c$。将灵敏度常数 K 用 A、R 和 C 表示。假设单稳输出 Q 和 $\bar{Q}$ 的峰值电平为 4 V(TTL 电路电平)。

4.31　由式(4.100)，证明 PLL 的线性化框图模型可用图 4.22 表示。

4.32　证明式(4.101)描述了图 4.22 所示的线性 PLL 模型。

★ 4.33　采用拉普拉斯变换和终值定理，确定式(4.100)所述 PLL 的稳态相位误差 $\lim_{t\to\infty}\theta_e(t)$ 的表达式[提示：终值定理为 $\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}sF(s)$]。

4.34　如图 P4.34 所示，假设 PLL 的环滤波器是一个低通滤波器。

(a) 计算线性化 PLL 的闭环转移函数 $H(f)=\dfrac{\Theta_o(f)}{\Theta_i(f)}$。

(b) 画出该 PLL 的伯德图 $[|H(f)|]_{dB} \triangleq 20\log|H(f)|$。

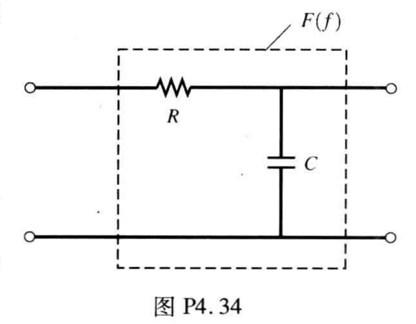


图 P4.34

★ 4.35　假设分析某 PLL 的相位噪声特性。如图 P4.35 所示，VCO 的内部相位噪声可以由输入 $\theta_n(t)$ 模拟。

(a) 确定闭环转移函数 $\Theta_0(f)/\Theta_n(f)$ 的表达式，其中 $\theta_i(t)=0$。

(b) 若 $F_1(f)$ 是图 P4.34 中的低通滤波器，画出相位噪声转移函数的伯德图 $[|\Theta_0(f)/\Theta_n(f)|]_{dB}$。

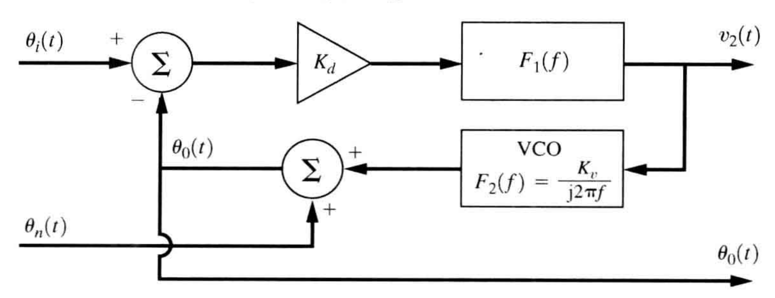


图 P4.35

4.36 某 PLL 的输入信号为 $v_{in}(t) = A\sin(\omega_0 t + \theta_i)$。其 LPF 的转移函数为 $F(s) = (s+a)/s$。

(a)稳态相位误差是什么?

(b)在无噪声情况下的最大同步带是多少?

★ 4.37 (a)参考图4.25 所示的 PLL 频率合成器。设计一个频率合成器,频率覆盖范围为 144 ~ 148 MHz,频率步长为 5 kHz,起始频率为 144 MHz。假设标准频率为 5 MHz,分频值 M 固定在某一值上,分频值 N 可编程以使合成器覆盖所需频率范围。设计并画出框图,在图上标明不同的频率点。

(b)修改设计,使输出信号可被某音频输入信号的频率调制,而射频输出信号的峰值偏移为5 kHz。

4.38 假设用 AM-PM 产生技术实现 SSB-AM 发射机,如图 4.27 所示。

(a)画出基带信号处理电路框图。

(b)当调制信号为 $m(t) = A_1\cos\omega_1 t + A_2\cos\omega_2 t$ 时,确定 $R(t)$、$\theta(t)$ 及 $v(t)$ 的表达式。

4.39 若要求产生 FM 信号,重做习题 4.38。

4.40 假设用正交产生技术实现 SSB-AM 发射机,如图 4.28 所示。

(a)画出基带信号处理电路。

(b)当调制信号为 $m(t) = A_1\cos w_1 t + A_2\cos w_2 t$ 时,确定 $x(t)$、$y(t)$ 及 $v(t)$ 的表达式。

4.41 若要求产生 FM 信号,重做习题 4.40。

★ 4.42 某 FM 无线电接收机调谐到频率为 96.9 MHz 的 FM 广播站发出的信号上。接收机为超外差接收机,本地振荡器工作在 96.9 MHz 输入的高边(Hige-side),采用 10.7 MHz 中频放大器。

(a)确定本地振荡器频率。

(b)若 FM 信号带宽为 180 kHz,给出对射频和中频滤波器的要求。

(c)计算像频响应的频率。

4.43 某双模式蜂窝电话设计成既可工作在 900 MHz 频段的蜂窝电话业务中,又可工作在 1900 MHz 频段的 PCS 业务中。该电话在两种模式下都采用 500 MHz 的中频超外差接收机。

(a)计算当电话接收 880 MHz 信号时的高边插入的本地振荡器频率和像频。

(b)计算当电话接收 1960 MHz PCS 信号时的低边插入的本地振荡器频率和像频。

(c)讨论该双模式电话中采用 500 MHz 中频的优点。

(注:蜂窝系统及 PCS 系统将在第 8 章中讨论。)

4.44 某超外差式接收机调谐到 20 MHz 的广播站上。本地振荡器频率为 80 MHz,中频为 100 MHz。试问:

(a)像频是多少?

(b)若本地振荡器具有合适的二次谐波成分,会接收到哪两个额外频率?

(c)若射频放大器包含 $Q = 50$,调谐到 20 MHz 的单调谐并联谐振电路,像频衰减(dB)是多少?

4.45 某 SSB-AM 接收机调谐接收 7.225 MHz 的 LSSB 信号,该 LSSB 信号被 3 kHz 带宽的音频信号调制。假设接收机采用包含 SSB 中频滤波器的超外差电路。中频放大器中心频率为 3.395 MHz。本地振荡器频率位于输入 LSSB 信号的高边。

(a)画出单变频超外差接收机的框图。在图中注明接收机各点处信号的频率和典型频谱。

(b)假设像频衰减 40 dB,确定所需射频及中频滤波器的特性。

4.46 (a)画出可接收 144 ~ 148 MHz 范围的 FM 信号的超外差 FM 接收机的框图。假设接收机是两级变换型的(即混频器和中频放大器后接另一混频器和中频放大器)。其中第一个中频为 10.7 MHz,第二个中频为 455 kHz。标明图中各点的信号频率,特明注明接收146.82 MHz 信号时各点的频率。

(b)将第一个振荡器用频率合成器代替，使得接收机可调谐到144 MHz到148 MHz的范围，频率步长为5 kHz。给出设计的频率合成器框图，并标出各点频率。

★ 4.47　某AM广播波段的无线接收机调谐到1080 kHz的AM信号上，采用高边本地振荡器插入，中频为455 kHz。

(a)画出射频及中频滤波器的频响。

(b)像频是多少？

4.48　商业AM广播站工作在540～1700 kHz频段，传输带宽限于10 kHz。试问：

(a)可容纳的广播站的最大个数是多少？

(b)若邻近信道不分配给广播站(为了降低中频特性较差的接收机上的串扰)，可容纳多少广播站？

(c)对455 kHz中频接收机，采用高边插入下变频器的AM接收机的像频的频段是多少？

第5章　调幅、调频及数字调制系统

本章要点

- 幅度调制和单边带
- 频率和相位调制
- 数字音频广播
- 数字调制信号(开关键控、二元相移键控、频移键控、最小频移键控、多元相移键控、正交振幅调制、正交相移键控、π/4相移键控、正交频分复用)
- 扩频和码分多址系统

本章主要讨论幅度调制(AM，简称调幅)、单边带(SSB)、相位调制(PM)和频率调制(FM，简称调频)的带通技术，以及数字调制技术中的开关键控(OOK)、二元相移键控(BPSK)、频移键控(FSK)、正交相移键控(QPSK)、正交幅度调制(QAM)及正交频分复用(OFDM)。所有这些带通信号由模拟或数字基带信号调制到载波上产生。该方法在4.2节中首次介绍。特别是已调带通信号可描述为

$$s(t) = \text{Re}\{g(t)^{j\omega_c t}\} \tag{5.1}$$

其中，$\omega_c = 2\pi f_c$，f_c 为载波频率。在表4.1中选择合适的调制映射函数 $g[m(t)]$ 就可得到所需类型的已调信号 $s(t)$，其中 $m(t)$ 是模拟或数字基带信号。

带通信号的电压(或电流)的频谱为

$$S(f) = \tfrac{1}{2}[G(f-f_c) + G^*(-f-f_c)] \tag{5.2a}$$

以及功率谱密度(PSD)为

$$\mathcal{P}_s(f) = \tfrac{1}{4}[\mathcal{P}_g(f-f_c) + \mathcal{P}_g(-f-f_c)] \tag{5.2b}$$

其中，$G(f) = \mathcal{F}[g(t)]$，且 $\mathcal{P}_g(f)$ 是复包络 $g(t)$ 的功率谱密度。

本章的前半部分(5.1节~5.8节)导出应用于数字和模拟调制波形的一般结论，后半部分(5.9节~5.13节)着重讨论数字调制信号。

本章的目标是：

- 研究不同类型的模拟和数字调制的 $g(t)$ 和 $s(t)$。
- 计算不同类型的模拟和数字调制的频谱。
- 研究某些发射机和接收机的结构。
- 研究某些已被采纳的标准。
- 学习扩频系统。

5.1　幅度调制

从表4.1可知，AM信号的复包络为

$$g(t) = A_c[1 + m(t)] \tag{5.3}$$

其中，常数 A_c 用来表示功率电平，$m(t)$ 是调制信号（可以是模拟的或数字的）。将这些公式简化为对调幅信号的如下描述：

$$s(t) = A_c[1 + m(t)] \cos \omega_c t \tag{5.4}$$

图 5.1 给出了在示波器上所看到的调幅信号的波形。为方便起见，假设调制信号 $m(t)$ 为正弦信号。$A_c[1+m(t)]$ 对应于复包络的同相分量 $x(t)$；当 $m(t) \geqslant -1$ 时（通常情况），它还对应于实包络 $|g(t)|$。

如果 $m(t)$ 正峰值为 +1，负峰值为 -1，那么该调幅信号称为 100% 的调制。

定义　调幅信号正调制指数为

$$\%\text{正调制指数} = \frac{A_{\max} - A_c}{A_c} \times 100 = \max[m(t)] \times 100 \tag{5.5a}$$

以及负调制指数为

$$\%\text{负调制指数} = \frac{A_c - A_{\min}}{A_c} \times 100 = -\min[m(t)] \times 100 \tag{5.5b}$$

总的调制指数为

$$\%\text{总的调制指数} = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{2A_c} \times 100 = \frac{\max[m(t)] - \min[m(t)]}{2} \times 100 \tag{5.6}$$

其中，$A_{\max}$ 是 $A_c[1+m(t)]$ 的最大值，$A_{\min}$ 是其最小值，A_c 是无调制[即 $m(t)=0$]时的调幅包络的电平。式(5.6)可以通过对式(5.5a)和式(5.5b)给出的正调制和负调制取平均得到。图 5.1(b) 中给出了 $A_{\max}$、$A_{\min}$ 和 A_c，在本例中，$A_{\max}=1.5A_c$ 并且 $A_{\min}=0.5A_c$，因此正、负调制指数都是 50%，并且总的调制指数也为 50%。

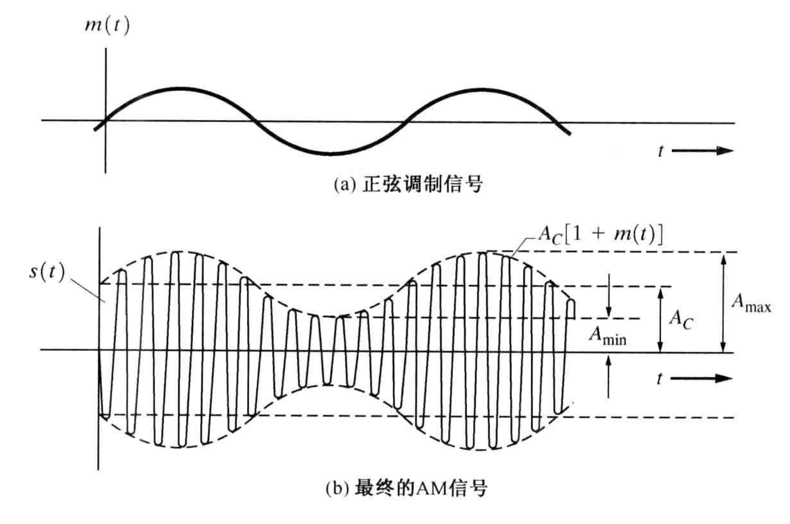


图 5.1　AM 信号波形

例题 5.1　50% 和 100% 调制的 AM 信号

令载频为 10 Hz 的 AM 信号的正弦调制信号的频率为 1 Hz。此外，令在时间间隔 $0<t<2$ s 内调制指数为 50%，而在时间间隔 $2<t<4$ s 内变为 100%。画出在时间间隔 $0<T<4$ s 内的 AM 信号波形。计算过程和结果见 M 文件 Example5_01.m。

假定采用四象限乘法器[①]生成 $A_c[1+m(t)]$ 和 $\cos\omega_c t$ 的乘积，以得到由式(5.4)给出的幅度调制波形[②]，那么调制指数可以大于100%（A_{min}将为负值）。然而，若发射机采用的是两象限乘法器，当 $A_c[1+m(t)]$ 为负时输出为零，此时输出信号为

$$s(t)=\begin{cases}A_c[1+m(t)]\cos w_c t, & m(t)\geqslant -1\\ 0, & m(t)<-1\end{cases} \tag{5.7}$$

这是一个失真的调幅信号。由频谱分析易知，该信号的带宽比无失真的调幅信号的带宽要宽很多。这是联邦通信委员会所不允许的过调制情况。采用脉宽调制的幅度调制发射机就是两象限乘法器电路的一个例子(参见图5.2以及例题5.3之后对此图的讨论)。当 $m(t)\geqslant -1$ 时，由此产生乘积项 $A_c[1+m(t)]\cos\omega_c t$，但是当 $m(t)<-1$ 时，没有输出。

例题5.2 150%调制的AM信号

令载频为10 Hz的AM信号的正弦调制信号的频率为1 Hz，且调制指数为150%。假定AM发射机采用一个两象限的乘法器。画出发射机输出端的AM信号波形。计算过程和结果见M文件Example5_02. m。

若负调制指数小于100%，那么可以使用包络检波器无失真地恢复调制信号，因为此时的包络 $|g(t)|=|A_c[1+m(t)]|$ 与 $A_c[1+m(t)]$ 相同。若负调制指数大于100%，那么使用适当类型的检测器——乘法检测器仍然可无失真地恢复调制信号。这可从令式(4.76)中的 $\theta_0=0$ 看出。此外，乘法检测器可用于任意的调制指数。在第7章中，我们将看到，当信噪比较小时，乘法检测器要优于包络检波器。

由式(4.17)可知，幅度调制信号的归一化平均功率为

$$\begin{aligned}\langle s^2(t)\rangle &= \tfrac{1}{2}\langle|g(t)|^2\rangle = \tfrac{1}{2}A_c^2\langle[1+m(t)]^2\rangle\\ &= \tfrac{1}{2}A_c^2\langle 1+2m(t)+m^2(t)\rangle\\ &= \tfrac{1}{2}A_c^2 + A_c^2\langle m(t)\rangle + \tfrac{1}{2}A_c^2\langle m^2(t)\rangle\end{aligned} \tag{5.8}$$

如果调制信号不包含直流分量，那么 $\langle m(t)\rangle=0$，并且调幅信号的归一化平均功率为

$$\langle s^2(t)\rangle = \underbrace{\tfrac{1}{2}A_c^2}_{\text{离散载波功率}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}A_c^2\langle m^2(t)\rangle}_{\text{边带功率}} \tag{5.9}$$

定义 调制效率是指承载信息所用的功率占已调信号总功率的百分比。

在调幅信号中，仅边带成分承载信息，因此调制效率为

$$E=\frac{\langle m^2(t)\rangle}{1+\langle m^2(t)\rangle}\times 100\% \tag{5.10}$$

对于100%调幅信号而言，其最高效率为50%(对于采用方波调制的情形)。

应用式(4.18)，我们得到调幅信号的归一化峰值包络功率(PEP)：

$$P_{PEP}=\frac{A_c^2}{2}\{1+\max[m(t)]\}^2 \tag{5.11}$$

---

① 四象限乘法器的输入是两个具有极性的信号。两象限乘法器中仅当其中某输入信号为单极性(如大于零)时有值，如果输入信号小于零，则输出为零。

② 若调制百分比很大(趋近于无穷)，幅度调制(AM)信号就变成下一节所述的抑制载波双边带调制信号。

例题 4.3 中的式(4.20a)给出了 AM 信号的电压谱，即

$$S(f) = \frac{A_c}{2}[\delta(f-f_c) + M(f-f_c) + \delta(f+f_c) + M(f+f_c)] \tag{5.12}$$

调幅信号的谱就是调制信号的谱经平移后加上给出载波线谱成分的 δ 函数，其带宽是调制信号带宽的两倍。如 5.6 节所示，因为调频信号的调制映射函数 $g(m)$ 是非线性的，所以其频谱要复杂得多。

例题 5.3　调幅信号的功率

联邦通信委员会用平均载波功率对 AM 广播频段发射机进行定级。这种评级系统在其他的音频调幅应用中也很普遍。假设一个 5000 W 的调幅发射机与一个 50 Ω 的负载相连，那么常数 A_c 的值由 $1/2\ A_c^2/50 = 5000$ 给出。因此，在没有调制时，通过负载的峰值电压为 $A_c = 707$ V。如果发射机被一个 1000 Hz 的测试音 100% 调制，由式(5.9)可知，总(载波加边带)的平均功率为

$$1.5\left[\frac{1}{2}\left(\frac{A_c^2}{50}\right)\right] = (1.5) \times (5000) = 7500 \text{ W}$$

因为对 100% 的正弦调制，$\langle m^2(t)\rangle = 1/2$。注意，7500 W 是实际功率而非归一化功率。50 Ω 负载上的峰值电压(100% 调制)为(2)(707) = 1414 V。由式(5.11)可知，峰值包络功率为

$$4\left[\frac{1}{2}\left(\frac{A_c^2}{50}\right)\right] = (4)(5000) = 20\,000 \text{ W}$$

因为 $\langle m^2(t)\rangle = 1/2$，所以调制效率为 33%。

有很多种构造调幅发射机的方法。我们可以首先考虑产生低功率(使用乘法器)的调幅信号，然后将之放大。但是，为了不产生失真，需要使用线性放大器(诸如 A 类或 B 类放大器，如 4.9 节所讨论的那样)。因为这些线性放大器将电源提供的功率转换到 RF 信号的效率不是很高，所以许多能量都以热能的形式消耗掉了①。于是，构造大功率 AM 广播发射机的方法是用有效的 C 类或 D 类放大器将载波振荡信号放大到高功率水平，然后在最后的高功率级进行幅度调制。这称为高级调制。图 5.2(a)就给出了一个这样的例子，图中脉冲宽度调制技术(PWM)被用于获得高转换效率的调幅信号[DeAngelo，1982]。输入音频信号转换为控制大功率开关(电子管或晶体管)电路的 PWM 信号。这个开关电路的输出由一个经由低通滤波的高功率的 PWM 信号组成，以产生用作功放级的电源的直流分量。PWM 信号切换频率通常选择为 70 ~ 80 kHz，于是 PWM 信号的基波和各次谐波成分易于被低通滤波器抑制，对于好的 AM 音频频率响应而言，直流可在高达 12 kHz 或 15 kHz 的音频速率上改变。因为无需大功率音频变压器，该技术可保证优良的频率响应和低失真特性，但是在功放和电子开关电路中经常使用真空电子管，因为晶体管一样不具有足够大的功率耗散。

另一项技术是构造全固态大功率发射机。它采用数字化处理以产生调幅信号。使用 50 ~ 100 个晶体管功放模块构建一个 50 kW 的调幅发射机，每一个产生 100 W、300 W、500 W 或 1000 W 的功率(见 http://www.broadcast.harris.com)。每个模块在载频上产生恒定幅度的方波(它经滤波后产生正弦基波)。为合成调幅信号，模拟音频信号用模数转换器采样并且数字化。这些采样值用于确定(计算)需要开启(从样本到样本)的模块的组合以生成组合(和)信号所需的幅度。如果一个模块出错，其他模块(或模块的组合)会替代之，以保证优秀的广播系统中发

① 不要将转换效率与调制效率混淆，调制效率由式(5.10)定义。

射机的可靠性，因为发射机在有模块出错时将继续工作。出问题的模块可在方便的时候进行更换或修理。这种调幅发射机具有 86% 的交流功率-射频(RF)转换效率和优良的音频保真度。

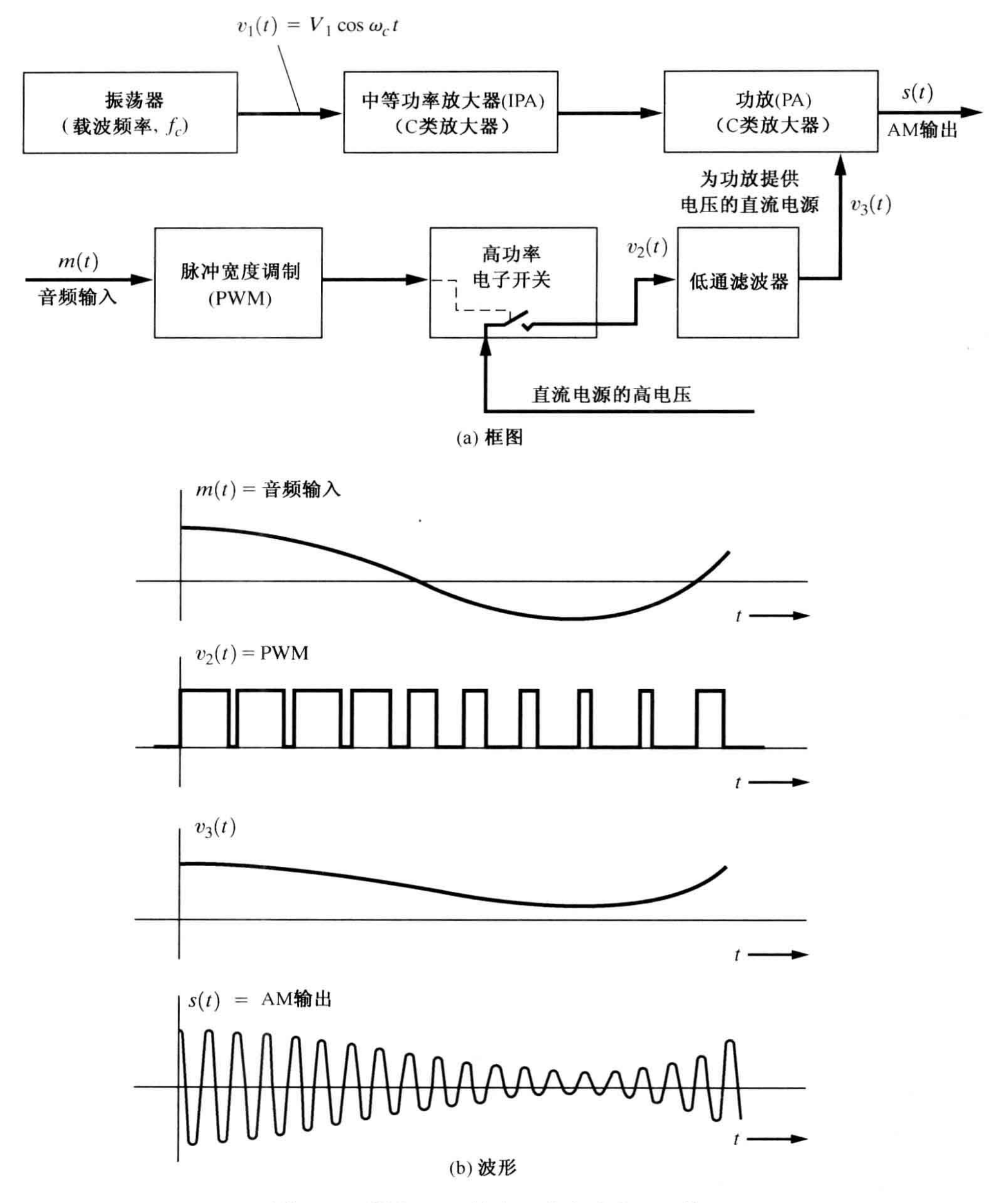


图 5.2 采用 PWM 技术生成大功率 AM 信号

5.2 调幅广播技术标准以及数字调幅广播

表 5.1 给出了联邦通信委员会制定的针对调幅广播站的一些技术标准。因为信道带宽为 10 kHz，所以若要调幅信号对分配到相邻信道的广播站不产生影响，那么最高音频被限制为 5 kHz。该低保真度并非调幅信号的固有品质，只是因为联邦通信委员会对信道带宽选择的是 10 kHz 而不是 30 kHz 的标准，这样在调幅广播频段能容纳三倍的信道数，于是才发生了这种情况。在实

际中，联邦通信委员会允许广播站具有 10 kHz 的音频带宽，这样调幅信号的带宽就是20 kHz。这当然会造成对邻近信道广播站的干扰。在美国大约有 4825 个广播站。

在美国，载波频率是根据所要覆盖的区域分配的：广播声道频率、区域通道频率及本地信道频率。表 5.1 示出了广播声道频率和本地信道频率，其他的均为区域通道频率。A 类广播声道广播站全天(白天和黑夜)工作，且大多数的功率为 50 kW。这些广播站的目标是进行大面积的覆盖。然而，为尽可能多地容纳广播站，在不干扰占主体的广播声道广播站的情况下，非广播声道广播站可被分配到广播声道频率上工作。通常，为了避免干扰，这些二级站采用方向性天线工作，使得在主站的方向上有一个零点。这一点对夜间工作尤为重要，这时天波传输使广播声道广播站能覆盖半个美国。

表 5.1　AM 广播站技术标准

项　目	联邦通信委员会技术标准
分配的频率 f_c	以 10 kHz 为步进，从 540 Hz 到 1700 kHz
信道带宽	10 kHz
载波频率的稳定度	分配频率 ±20 Hz
广播声道频率 (一个 A 类，50 kW 站)(无方向性)	640，650，660，670，700，720，750，760，770，780，820，830，840，870，880，890，1020，1030，1040，1070，1100，1120，1160，1180，1200 及 1210 kHz
广播声道频率 (多个 50 kW 站) (夜间方向性)	680，710，810，850，1000，1060，1080，1090，1110，1130，1140，1170，1190，1500，1510，1520 及 1530 kHz
广播声道频率 (用于巴哈马、古巴、加拿大、墨西哥)	540，690，730，740，800，860，900，940，990，1010，1050，1220，1540，1550，1560，1570 及 1580 kHz
本地信道频率(1 kW)站	1230，1240，1340，1400，1450 及 1490 kHz
最大功率许可	50 kW
旅游信息台 (最大为 50 W，通常为 10 W)	530 ~ 1700 kHz，以 10 kHz 为增量

B 类广播站全天候工作，覆盖一个区域范围。大多数 B 类广播站的功率为 5 kW，尽管有一些站的功率大到 50 kW。C 类广播站覆盖本地区域，全天候工作，大多数工作在 1 kW 的功率水平。数以百计的 C 类广播站被分配到本地信道频率(见表 5.1)，在这些频点上，夜间天波的干扰很大。由于这种干扰，C 类广播站的夜间覆盖半径可小到以发射机为中心的 5 英里半径范围内。D 类广播站工作在白天，其中有些站的功率大到 50 kW。若允许在夜间工作，其夜间功率不大于250 W。关于美国 AM 广播站的清单请参考 www. fcc. gov/mb/audio/amg. html。

国际 AM 广播站工作于短波波段(3 ~ 30 MHz)，通常具有较高的功率。其中一些广播站将 500 kW 的载波功率馈入方向性天线上，产生兆瓦数量级的有效功率(包括方向性天线的增益在内)。

5.2.1　数字调幅广播

在美国，联邦通信委员会已经为调幅频段(即中波，540 ~ 1700 kHz)的数字广播采用了带内同频数字声音广播(IBOC)系统，该 IBOC 系统提供数字音频数据和辅助数字数据与传统的调幅信号(由模拟的音频信号调制)的同时传输。于是，用传统的调幅接收机可接收模拟的音频。有内置编解码器的 IBOC 接收机可将调幅 IBOC 信号转化为立体声音频信号。若接收到的调幅 IBOC 信号非常微弱，那么收听者将从信号的调幅部分听到传统的模拟音频广播。若收到的信号较强，那么从 IBOC 数据译码后的音频将几乎达到 CD 立体声的品质(15 kHz 音

频带宽)。若信号强度介于微弱和强之间,那么接收机将产生一个来自于调幅和IBOC部分的混合音频。

正如5.12节讨论的那样,正交频分复用技术(OFDM)用于产生IBOC信号。为了生成IBOC信号,来自于发射机的数据被分成六个正交频分复用组,放置在传统的调幅信号边带之中及邻近的边带。三个正交频分复用组被放置在上边带之中,而另外三个被放置在下边带之中。边带之间相互独立,但是数据的划分使得仅需要一个边带就可以恢复降低质量的音频。高保真度的立体声音频的恢复需要来自于所有边带的数据(六个正交频分复用组)。

调幅IBOC信号的带宽为30 kHz,但是载波之间的间隔仍然为10 kHz。于是,相邻信道的站点之间存在潜在的干扰。然而,调幅站的现有频率分配是把相邻的信道分配给距离较远的站点。在白天,相邻信道被分配给很远的站点,所以干扰极少或没有干扰。但是到了夜间,因为天波的传播,我们可以收听到几乎每一个调幅信道。这样,在夜间,IBOC站对相邻信道的站点造成了干扰。

有很多调幅站发射调幅IBOC信号。该项技术的更多信息及发射调幅IBOC信号的站的列表,请在因特网上搜索IBOC AM即可。

在低频、中波和短波波段有很多种发射数字音频信号的方法。现在正在研究的最流行的一种数字短波广播方法就是世界数字广播(DRM)。该项技术使用全数字化传输,以至于采用调幅检测器的传统短波接收机接收不到信号,必须使用DRM接收机才可恢复音频信号。该技术除了能够提供良好的音频品质以外还具有对衰落信道的鲁棒性优势。关于DRM更多的细节请参见[Hofmann et al., 2003]及www.drm.org。

5.3 抑制载波的双边带调制

抑制载波的双边带(DSB-SC)信号是抑制了离散载波的调幅信号。DSB-SC信号为

$$s(t) = A_c m(t) \cos \omega_c t \tag{5.13}$$

其中,在抑制载波的情况下,假设$m(t)$没有直流分量。除了在$\pm f_c$处没有δ函数以外,其频谱与由式(5.12)给出的AM信号的频谱相同。也就是说,DSB-SC的频谱为

$$S(f) = \frac{A_c}{2}[M(f - f_c) + M(f + f_c)] \tag{5.14}$$

与调幅信号相比,因为不存在载波成分,DSB-SC信号的调制指数无穷大。而且,由于在离散载波上没有功率的浪费,所以DSB-SC信号的调制效率是100%。然而,需要用乘法检测器(比包络检波器昂贵得多)对DSB-SC信号进行解调。如果传输电路将已调信号限制在某特定的峰值内(例如A_p),则可以证明(参见习题5.11)DSB-SC信号的边带功率是具有同样峰值的AM信号的4倍。从这个意义上说,DSB-SC信号较之AM信号有4倍的功率优势。

如果$m(t)$是双极性二元数据信号(而非音频信号),那么式(5.13)就是一个BPSK信号,这在例题2.22中曾首次描述。5.9节中将对BPSK信号进行详细讨论。如表4.1所示,一个QM信号可以通过将两个DSB信号相加得到,其中的两个信号$m_1(t)$和$m_2(t)$分别调制余弦和正弦载波。

5.4 科斯塔环和平方环

由于DSB-SC信号在$\pm f_c$上没有线谱分量,所以其乘法检测器的相干参考信号不可能由一个普通的锁相跟踪环获得。然而,由于DSB-SC信号具有关于(被抑制的)载波对称的谱,因此

图 5.3所示的两种类型的载波恢复环都可用于对 DSB-SC 信号的解调。图 5.3(a)所示为科斯塔锁相环，图 5.3(b)所示为平方环。由于这两种环的噪声性能相同[Ziemer and Peterson，1985]，因此选择哪种环取决于环中元件的相对价格及构成环时所能达到的精度。

如图 5.3(a)所示，分析科斯塔锁相环时假设压控振荡器(VCO)锁定在输入的被抑制的载频 f_c 上，具有恒定相位偏差 θ_e。如图所示，从基带低通滤波器的输出得到电压 $v_1(t)$ 和 $v_2(t)$。因为 θ_e 很小，所以 $v_1(t)$ 的幅度相对 $v_2(t)$ 的幅度较大(换言之，$\cos\theta_e \gg \sin\theta_e$)。此外，$v_1(t)$ 正比于 $m(t)$，所以它是解调后的(乘法检测器)的输出。乘积电压 $v_3(t)$ 为

$$v_3(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}A_0A_c\right)^2 m^2(t)\sin 2\theta_e$$

电压 $v_3(t)$ 经过一个截止频率接近于直流的低通滤波器的滤波，于是该滤波器作为积分器产生直流压控振荡器的控制电压：

$$v_4(t) = K\sin 2\theta_e$$

式中，$K = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}A_0A_c\right)^2\langle m^2(t)\rangle$，且 $\langle m^2(t)\rangle$ 是 $m^2(t)$ 的直流电平。该直流控制电压足以使压控振荡器以一个较小的相位误差 θ_e 锁定在 f_c 上。

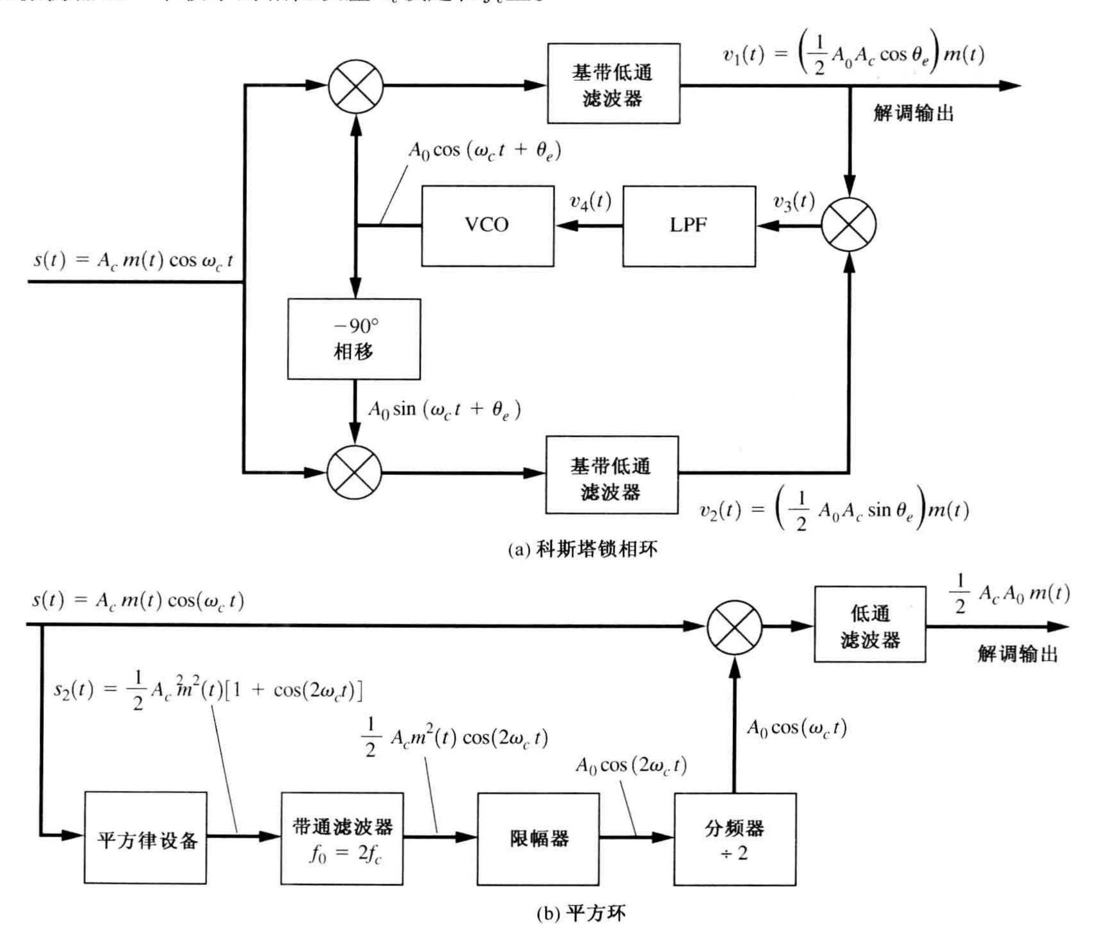


图 5.3　DSB-SC 信号的载波恢复环

如图所示，通过计算每个方框模块的输出信号的表达式，完成了对图 5.3(b)中平方环的分

析。无论是科斯塔锁相环还是平方环都可用于对 DSB-SC 信号进行解调，因为对于每一种情况，其输出均为 $Cm(t)$，C 为常数。此外，两环中的任何一个都可用于恢复(即解调)BPSK 信号，因为 BPSK 信号具有与 DSB-SC 信号相同的数学形式，其中 $m(t)$ 是图 3.15(c)中给出的双极性不归零数据信号。

科斯塔锁相环和平方环都有一个主要的缺点——180°相位模糊。例如，假设输入为 $-A_c m(t)\cos\omega_c t$ 而非 $+A_c m(t)\cos\omega_c t$。按照前面分析的步骤，我们可以得到这时的输出可以用以前得到的公式精确描述。这时只要环被激活，环会锁定使得解调输出就像正比于 $m(t)$ 那样而正比于 $-m(t)$。因此，我们不能确定输出的极性。若 $m(t)$ 是单声道音频信号，那么就没有影响，因为对人耳来说，$-m(t)$ 听起来和 $m(t)$ 一样。然而，若 $m(t)$ 是双极性的数据信号，电路激活后，二进制 1 就可能变成二进制 0，反之亦然。如第 3 章所述，有两种方法可消除 180°的相位模糊：(1)环启动后，系统发射一个已知的测试信号，于是极性得以确定；(2)采用差分编码和译码。

5.5 非对称边带信号

5.5.1 单边带调制

定义 上单边带信号(USSB)对于 $|f| < f_c$ 的频率，其频谱为零，其中 f_c 为载波频率。

下单边带信号(LSSB)对于 $|f| > f_c$ 的频率，其频谱为零，其中 f_c 是载波频率。

有很多种将调制信号 $m(t)$ 映射到复包络 $g[m]$ 上以获得单边带 SSB 信号的方法。表 4.1 列举了其中的一些方法。SSB-AM 是迄今最流行的一种类型。它广泛地被军方和无线电业余爱好者用于高频通信系统中。它之所以流行就是因为其带宽与调制信号带宽(是 AM 或 DSB-SC 的一半)一样。基于这些原因，我们将集中讨论这一类 SSB 信号。在通常的应用中，除非特殊说明，术语 SSB 都是指 SSB-AM 型信号。

定理 SSB 信号(即 SSB-AM 型)可以通过复包络

$$g(t) = A_c[m(t) \pm j\hat{m}(t)] \tag{5.15}$$

得到，从而可得到 SSB 信号波形：

$$s(t) = A_c[m(t)\cos\omega_c t \mp \hat{m}(t)\sin\omega_c t] \tag{5.16}$$

其中，上面的符号(-)用于上单边带信号(USSB)，下面的符号(+)用于下单边带信号(LSSB)。$\hat{m}(t)$ 表示 $m(t)$ 的希尔伯特变换，由下式给出①：

$$\hat{m}(t) \triangleq m(t) * h(t) \tag{5.17}$$

其中，

$$h(t) = \frac{1}{\pi t} \tag{5.18}$$

并且 $H(f) = \mathscr{F}[h(t)]$ 对应一个 $-90°$ 相移网络：

$$H(f) = \begin{cases} -j, & f > 0 \\ j, & f < 0 \end{cases} \tag{5.19}$$

① 希尔伯特变换对表在 A.7 节(附录 A)中给出。

图5.4对该定理进行了说明。假设$m(t)$有一个如图5.4(a)所示的三角形幅度谱。那么对于上单边带调制(上面的符号)的情形，如图5.4(b)所示，对于负的频率$g(t)$的频谱为0，并且$s(t)$具有如图5.4(c)所示的上单边带调制信号的谱结构。该结论的证明如下。

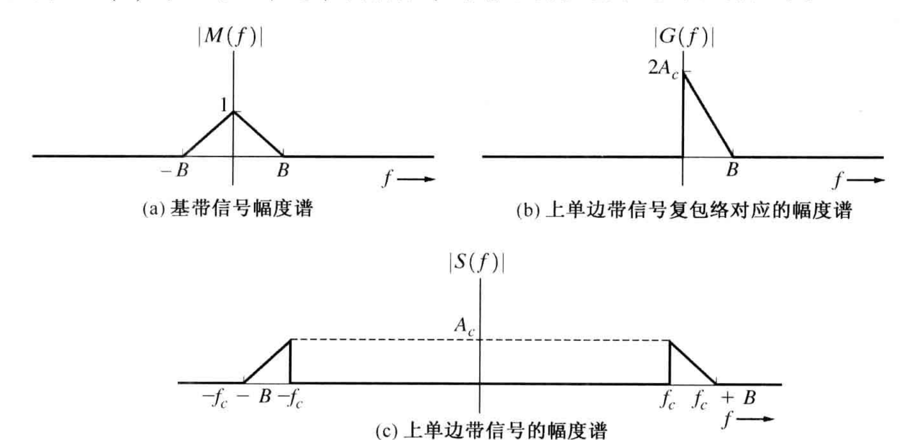


图5.4　上单边带(USSB)信号谱

证明　我们需要证明$s(t)$的谱在某一边带上(取决于符号的选择)为0。对式(5.15)取傅里叶变换，可得到：

$$G(f) = A_c\{M(f) \pm j\mathscr{F}[\hat{m}(t)]\} \tag{5.20}$$

应用式(5.17)，我们发现上式变为

$$G(f) = A_c M(f)[1 \pm jH(f)] \tag{5.21}$$

为证明上单边带调制信号的结果，选择上面的符号。于是，由式(5.19)，式(5.21)变为

$$G(f)=\begin{cases}2A_c M(f), & f>0\\ 0, & f<0\end{cases} \tag{5.22}$$

将式(5.22)代入式(4.15)，得到带通信号：

$$S(f)=A_c\begin{cases}M(f-f_c), & j>f_c\\ 0, & f<f_c\end{cases}+A_c\begin{cases}0, & f>-f_c\\ M(f+f_c), & f<-f_c\end{cases} \tag{5.23}$$

这是一个实实在在的上单边带信号，见图5.4。

如果选择式(5.21)中下面的符号，将得到一个下单边带信号。

单边带信号的归一化平均功率为

$$\langle s^2(t)\rangle = \tfrac{1}{2}\langle|g(t)|^2\rangle = \tfrac{1}{2}A_c^2\langle m^2(t) + [\hat{m}(t)]^2\rangle \tag{5.24}$$

如助学例题SA5-1中$\langle \hat{m}(t)^2\rangle = \langle m^2(t)\rangle$，因此SSB信号的功率为

$$\langle s^2(t)\rangle = A_c^2\langle m^2(t)\rangle \tag{5.25}$$

这就是调制信号功率$\langle m^2(t)\rangle$乘以功率增益因子A_c^2。

例题5.4　上单边带信号

令$m(t)=\sin(2\pi t)$。应用式(5.16)，计算并且画出上单边带信号，其载波频率为10 Hz，并且$A_c=1$。证明这是一个上单边带信号。计算过程和结果见M文件Example5_04.m。

归一化峰值包络功率(PEP)为

$$\tfrac{1}{2}\max\{|g(t)|^2\} = \tfrac{1}{2}A_c^2\max\{m^2(t) + [\hat{m}(t)]^2\} \tag{5.26}$$

图5.5给出了两种产生SSB信号的技术。应用于SSB信号生成时，相位法与前述(见图4.28)的IQ规范形式相同。滤波法是一个特例，它采用射频(RF)处理(利用边带滤波器)形成等效$g(t)$，而不是采用基带处理直接产生$g[m]$。滤波技术是使用最广泛的方法，这是因为采用晶体滤波器进行边带滤波时可获得优良的边带抑制效果①。在标准中频上批量生产晶体滤波器，价格相对比较便宜。除了这两种产生SSB信号的技术外，还有第三种方法，称为韦佛法[Weaver, 1956]。图P5.15和习题5.15对该种方法进行了描述。实际的SSB发射机上装有一个上变频器，将SSB信号搬移到所需的工作频率上，然后采用B类放大器将信号放大到所需的功率水平上。

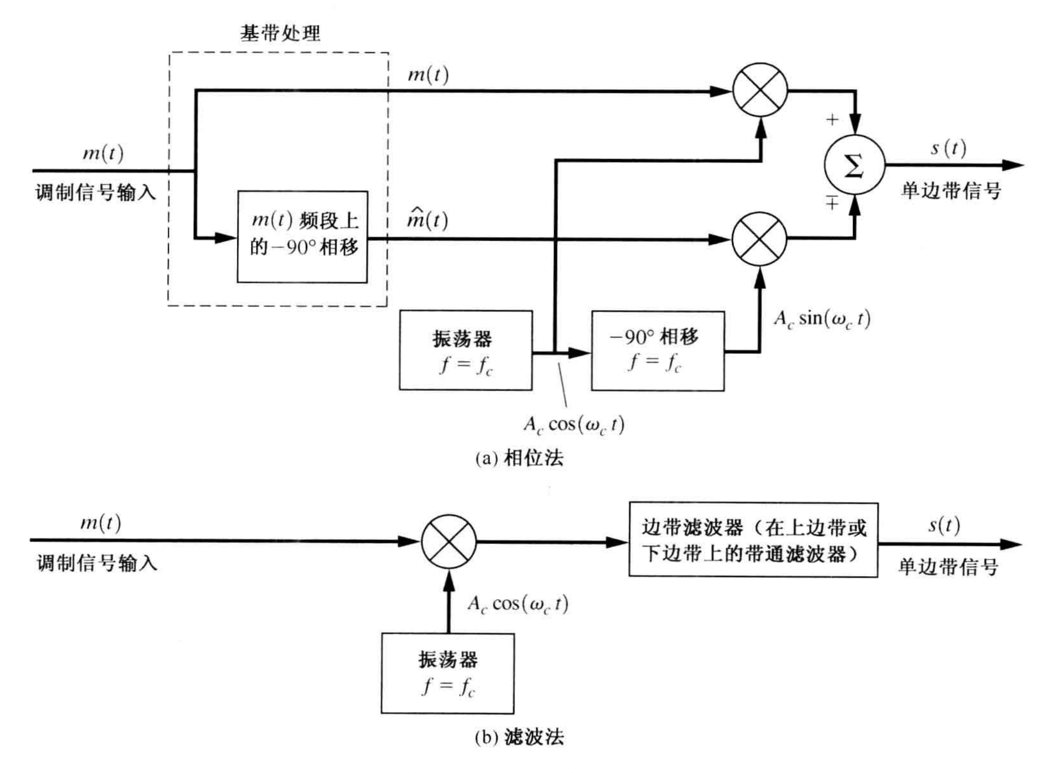


图5.5 SSB信号的产生

SSB同时具有调幅和调相特性。由式(5.15)可得到其AM成分(实包络)为

$$R(t) = |g(t)| = A_c\sqrt{m^2(t) + [\hat{m}(t)]^2} \tag{5.27}$$

以及其PM成分为

$$\theta(t) = \underline{/g(t)} = \arctan\left[\frac{\pm\hat{m}(t)}{m(t)}\right] \tag{5.28}$$

SSB信号可以用一个包含$\theta_0=0$的乘法检测器的超外差接收机进行接收。于是，接收机的输出为

$$v_{\text{out}}(t) = K\,\text{Re}\{g(t)e^{-j\theta_0}\} = KA_c m(t) \tag{5.29}$$

① 由于具有通信质量的音频在300 Hz以下的频谱成分可忽略不计，因此有可能获得优良的边带抑制效果。于是，边带滤波器可以设计成在2×300=600 Hz传输带宽上具有所需的边带衰减。

其中 K 取决于接收机增益和信道损耗。检测音频调制的 SSB 信号时，参考相位 θ_0 不必一定为零，因为无论采用的相位为何值，都会采用相同的智能处理[尽管 $v_{out}(t)$ 波形差别很大，具体取决于 θ_0 值]。对数字调制，相位必须绝对准确以保持数字波形的形状。此外，如果调制的数据信号由具有矩形脉冲的线路码组成，那么 SSB 是一种很差的调制技术。由于进行希尔伯特变换，数据的矩形形状(零上升时间)会导致 SSB-AM 波形的值在接近数据的转换时间时变为无穷(该结论将在一道课外习题中给出)。由于实际器件只能产生有限峰值信号，因而这种调制类型的 SSB 信号不可能由实际器件产生。然而，如果线路码中采用滚降脉冲成形，例如$(\sin x)/x$ 脉冲，那么 SSB 信号将具有一个合理的峰值，并且数据传输可采用 SSB 技术。

SSB 有许多优点，例如比 AM 更优良的检测信噪比(参见第 7 章)，以及带宽是 AM 或 DSB-SC的一半。(若要了解更多这方面的知识，读者可参阅一本专门讨论 SSB 的书[Sabin and Schoenike,1987])。

5.5.2　残留边带

在某些应用中(如电视广播)，DSB 调制技术需要的带宽对(电视)信道来说太宽；而尽管 SSB 技术只需一半的带宽，但实现起来又过于昂贵。在这种情况下，通常选择 DSB 和 SSB 的折中，称为残留边带调制(VSB)。VSB 可以通过部分抑制 DSB 信号的一个边带来得到。DSB 信号可以是 AM 信号(即有离散的载波项)或 DSB-SC 信号。该方法在图 5.6 中进行了说明，其中 DSB 信号的一个边带被带通滤波器(称为残留边带滤波器)所衰减，残留边带滤波器在 $\pm f_c$ 上具有非对称的频率响应。VSB 信号为

$$s_{\text{VSB}}(t) = s(t) * h_v(t) \tag{5.30}$$

其中，$s(t)$ 是由具有载波的式(5.4)或者抑制载波的式(5.13)所描述的 DSB 信号，而 $h_v(t)$ 是 VSB 滤波器的冲激响应。VSB 信号的频谱为

$$S_{\text{VSB}}(f) = S(f)H_v(f) \tag{5.31}$$

如图 5.6(d)所示。

对 VSB 信号的解调可以通过使用乘法检测器的接收机，或者在有一个大功率的载波时，采用包络检波器来实现。为了恢复无失真的调制信号，VSB 滤波器的传输函数必须满足限制条件：

$$H_v(f - f_c) + H_v(f + f_c) = C, \quad |f| \leqslant B \tag{5.32}$$

其中，C 为常数，B 为调制带宽。图 5.6(e)给出了该限制条件的一个应用，从图中可以看出图 5.6(c)所示的 VSB 滤波器特性满足式(5.32)给出的条件。

我们现在将证明式(5.32)的限制条件的必要性。假设 $s(t)$ 是一个 DSB-SC 信号，那么应用式(5.14)和式(5.31)，得到 VSB 信号的频谱为

$$S_{\text{VSB}}(f) = \frac{A_c}{2}[M(f - f_c)H_v(f) + M(f + f_c)H_v(f)]$$

参考图 4.14，得到乘法检测器的输出为

$$v_{\text{out}}(t) = [A_0 s_{\text{VSB}}(t) \cos \omega_c t] * h(t)$$

其中，$h(t)$ 是带宽为 B Hz 的低通滤波器的冲激响应。在频率域，该式变为

$$V_{\text{out}}(f) = A_0\left\{S_{\text{VSB}}(f) * \left[\tfrac{1}{2}\delta(f - f_c) + \tfrac{1}{2}\delta(f + f_c)\right]\right\}H(f)$$

其中，当 $|f| < B$ 时，$H(f) = 1$；并且当 f 取其他值时，$H(f) = 0$。替换 $S_{\text{VSB}}(f)$，并且应用卷积性质 $x(f) * \delta(f - a) = x(f - a)$，得到：

$$V_{\text{out}}(f) = \frac{A_c A_0}{4}[M(f)H_v(f - f_c) + M(f)H_v(f + f_c)], \quad |f| < B$$

或者

$$V_{\text{out}}(f) = \frac{A_c A_0}{4} M(f)[H_v(f - f_c) + H_v(f + f_c)], \quad |f| < B$$

如果 $H_v(f)$ 满足式(5.32)的约束条件，那么该式变为

$$V_{\text{out}}(f) = KM(f)$$

或者 $V_{\text{out}}(t) = Km(t)$，其中 $K = A_c A_0/4$。这表明当满足式(5.32)时，乘法检测器的输出是无失真的。

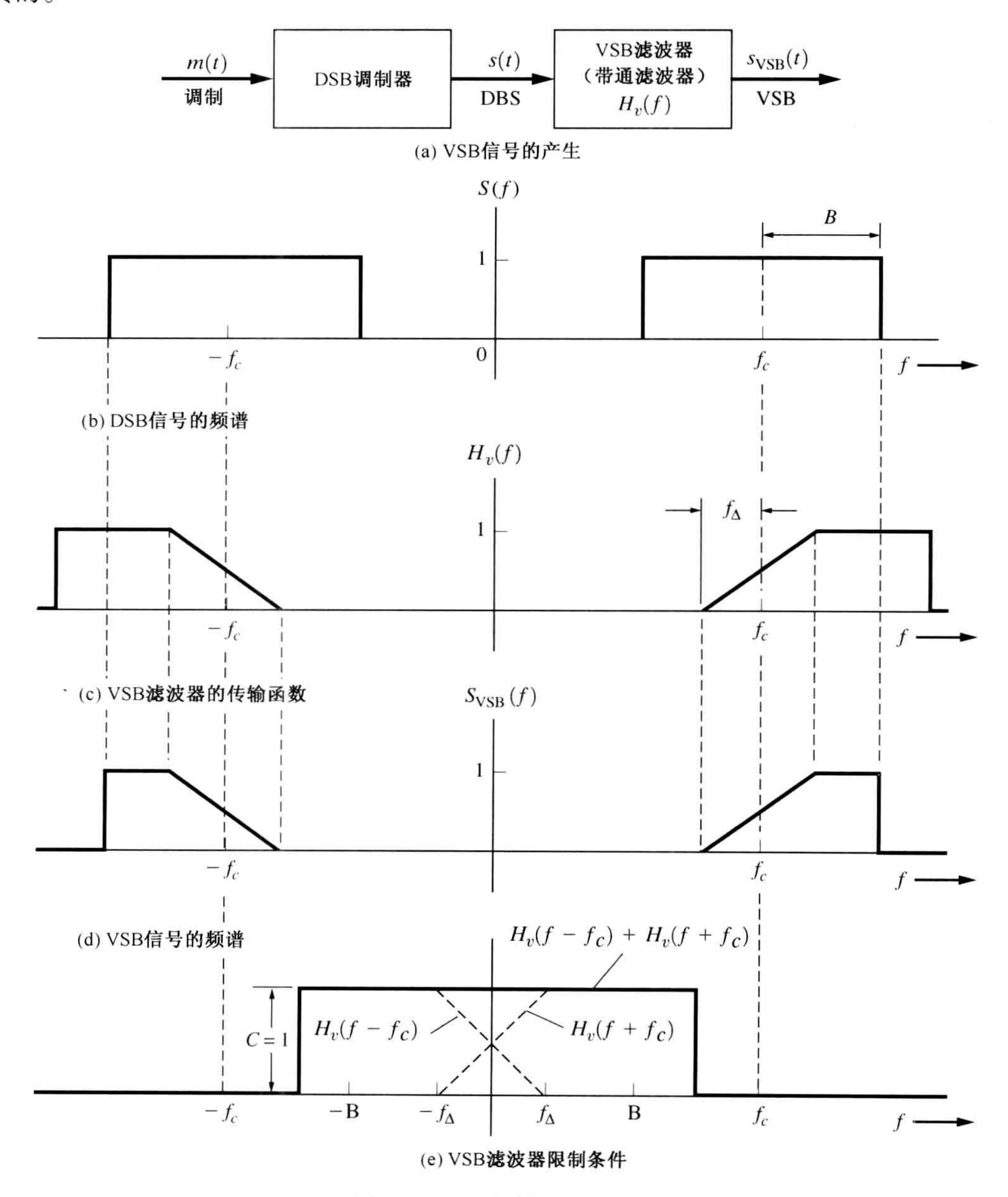


图 5.6 VSB 发射机及其频谱

如第 8 章中将要讨论的那样，模拟和数字电视广播都采用 VSB 技术，以将所需的信道带宽减少到 6 MHz。对模拟电视，如图 8.31(c)所示，电视图像发射机的频率响应在上边带至高于图像载波频率 4.2 MHz 上及在下边带至低于载波频率 0.75 MHz 上都是平坦的。电视接收机中的中频滤波器具有如图 5.6(c)所示的 VSB 滤波器特性，其中 $f_{\Delta}=0.75$ MHz。由此得出了满足约束条件式(5.32)的全部频率响应特性，因此 VSB 电视图像信号的视频调制可在接收机端无失真地恢复。

数字电视(在美国，见 8.9 节)在发射端采用 $r=0.0575$ 的根升余弦滚降滤波器以得到 VSB 信号，如图 8.39 所示。在实际系统中，根升余弦滚降滤波器用于数字电视发射机和接收机以获得完整的升余弦滚降特性，从而使信道噪声干扰和码间串扰(ISI)最小化(见 3.6 节)。总的响应特性也满足式(5.32)，因此可以无失真或无码间串扰地恢复数字电视信号(8 级串行数据)。

5.6　相位调制和频率调制

5.6.1　PM 信号和 FM 信号的表征

相位调制(PM)和频率调制(FM)都是角度调制信号的特例。在这种信号中，其复包络为

$$g(t) = A_c e^{j\theta(t)} \tag{5.33}$$

其中，实包络 $R(t)=|g(t)|=A_c$ 为常数，并且相位 $\theta(t)$ 是调制信号 $m(t)$ 的线性函数。然而，$g(t)$ 是调制信号的非线性函数。应用式(5.33)，我们得到最终的角度调制信号为

$$s(t) = A_c \cos[\omega_c t + \theta(t)] \tag{5.34}$$

对 PM，其相位直接与调制信号成正比，即

$$\theta(t) = D_p m(t) \tag{5.35}$$

其中，比例常数 D_p 是相位调制器的相位灵敏度，单位为弧度/瓦(rad/W)[假设 $m(t)$ 是电压波形]。对于 FM，相位与 $m(t)$ 的积分成正比，于是

$$\theta(t) = D_f \int_{-\infty}^{t} m(\sigma)\,d\sigma \tag{5.36}$$

其中，频率偏移常数 D_f 的单位为弧度/瓦·秒(rad/W·s)。

比较最后两个公式，我们得到，若一个 PM 信号被 $m_p(t)$ 调制，那么信号也可看作进行了 FM 调制，只不过对应的是不同的调制波形，为

$$m_f(t) = \frac{D_p}{D_f}\left[\frac{dm_p(t)}{dt}\right] \tag{5.37}$$

其中，下标 f 和 p 分别表示频率和相位。类似地，若有一个 FM 信号被 $m_f(t)$ 调制，那么对该信号相应的相位调制信号为

$$m_p(t) = \frac{D_f}{D_p}\int_{-\infty}^{t} m_f(\sigma)\,d\sigma \tag{5.38}$$

由式(5.38)可知，一个 PM 电路通过在相位调制器的输入前插入一个积分器便合成了一个 FM 电路[见图 5.7(a)]。

直接 PM 电路是通过将未调制的正弦信号通过一个时变电路来实现的，该时变电路引入随应用的调制电压而变的相移[见图 5.8(a)]。D_p 是 PM 电路的增益(rad/V)。类似地，直接 FM 产生电路是根据调制电压改变振荡器(谐振)电路的调谐而得到的。如图 5.8(b)所示，其中 D_f 是调制器电路的增益[其单位为弧度/伏·秒(rad/V·s)]。

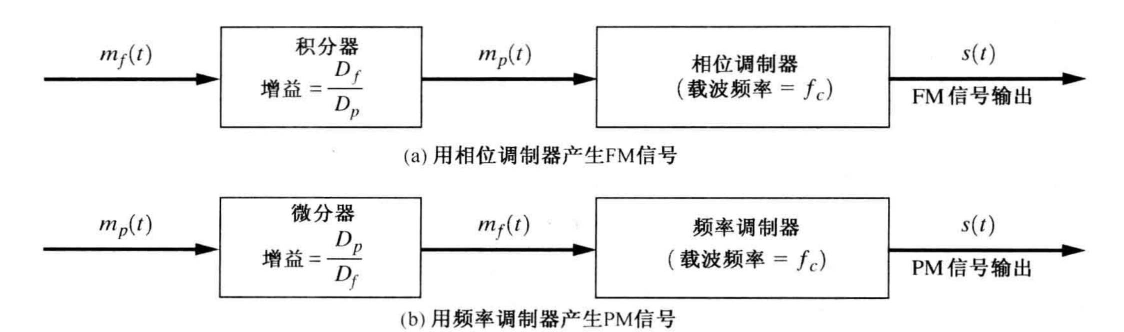


图 5.7 由 PM 产生 FM 及由 FM 产生 PM

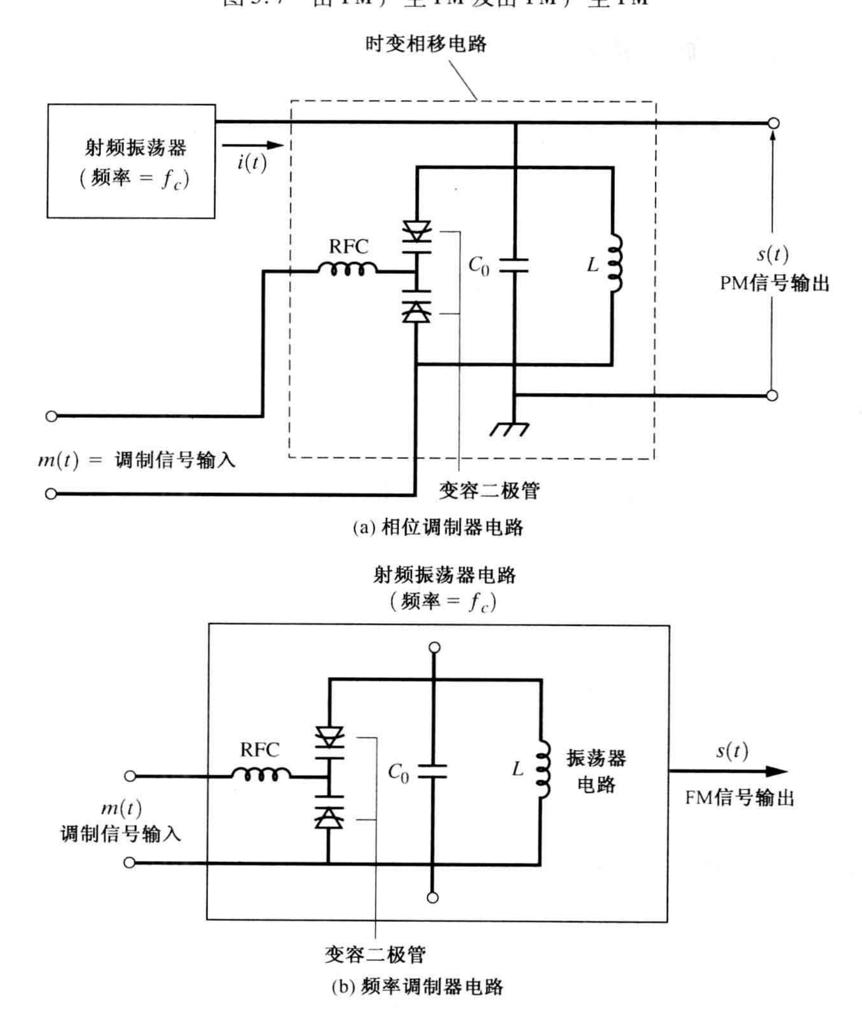


图 5.8 角度调制电路。RFC 即射频扼流圈

定义 若带通信号可表示为

$$s(t) = R(t)\cos\psi(t)$$

其中 $\psi(t) = \omega_c t + \theta(t)$，于是 $s(t)$ 的瞬时频率(Hz)[Boashash,1992]为

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi}\omega_i(t) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t}\right]$$

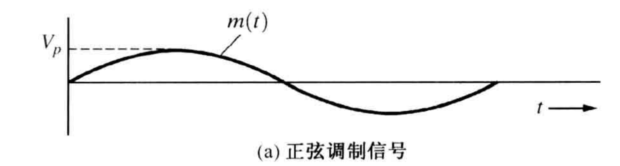
或者

$$f_i(t) = f_c + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}\right] \tag{5.39}$$

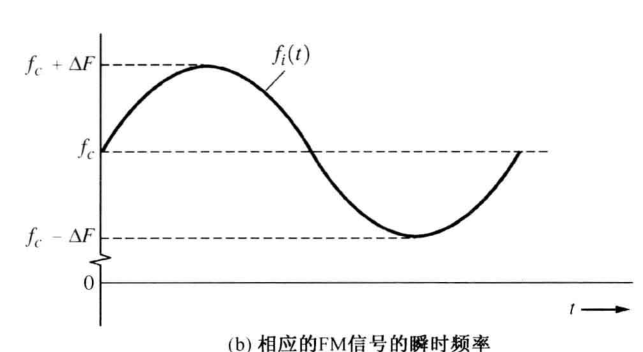
对于 FM 的情形，应用式(5.36)，得到瞬时频率为

$$f_i(t) = f_c + \frac{1}{2\pi}D_f m(t) \tag{5.40}$$

当然，这就是为什么称这种信号为频率调制的原因——瞬时频率围绕着载波频率以正比于调制信号 $m(t)$ 的方式变化。图 5.9(b)给出了当采用正弦调制时(为便于图示)瞬时频率是如何变化的。最终的 FM 信号如图 5.9(c)所示。



(a) 正弦调制信号



(b) 相应的FM信号的瞬时频率

s(t)
A_c
t

(c) 相应的FM信号

图 5.9　具有正弦基带调制信号的 FM

不要将瞬时频率同 FM 信号频谱中的术语“频率”混淆。频谱是由 $s(t)$ 的傅里叶变换所给出，通过对 $s(t)$ 在无限时间区间($-\infty < t < \infty$)上进行计算得到的。因此，频谱表示信号(平均)在所有时间上都包含了哪些频率。而瞬时频率是在某一特定时刻的频率。

对载波频率的频率偏移为

$$f_d(t) = f_i(t) - f_c = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}\right] \tag{5.41}$$

峰值频率偏移为

$$\Delta F = \max\left\{\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}\right]\right\} \tag{5.42}$$

注意，ΔF 为非负。在一些应用中，诸如(单极性)数字调制，要用到峰—峰偏移。这通过下式定义：

$$\Delta F_{\mathrm{pp}} = \max\left\{\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}\right]\right\} - \min\left\{\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}\right]\right\} \tag{5.43}$$

对 FM 信号传输，峰值频率偏移与峰值调制电压的关系如下：

$$\Delta F = \frac{1}{2\pi} D_f V_p \tag{5.44}$$

其中 $V_p = \max[m(t)]$，如图 5.9(a)所示。

由图 5.9 可以看出，调制信号 V_p 的幅度的增加会使得 ΔF 增加。由此将增加 FM 信号的带宽，但不会影响 FM 信号的平均功率 $A_c^2/2$。随着 V_p 的增加，将会在离载波频率越来越远的地方出现频谱成分，而靠近载波频率的频谱成分的幅度会减小，这是因为信号的总功率保持不变(更详细的讨论请参见例题 5.6)。这种情况与 AM 信号截然不同，在 AM 中调制信号的电平影响 AM 信号的功率，但不影响其带宽。

采用同样的方法，峰值相位偏移可定义为

$$\Delta\theta = \max[\theta(t)] \tag{5.45}$$

对 PM，峰值相位偏移与峰值调制电压的关系为

$$\Delta\theta = D_p V_p \tag{5.46}$$

其中 $V_p = \max[m(t)]$。

定义 1[①]：相位调制指数为

$$\beta_p = \Delta\theta \tag{5.47}$$

其中，$\Delta\theta$ 为峰值相位偏移。

频率调制指数为

$$\beta_f = \frac{\Delta F}{B} \tag{5.48}$$

其中，ΔF 是峰值频率偏移，而 B 是调制信号的带宽，对正弦调制信号，B 即是 f_m——正弦信号的频率[②]。

对于采用正弦波调制的 PM 或 FM 信号，若 PM 或 FM 信号有相同的峰值频率偏移，则 β_p 等于 β_f。

例题 5.5 采用正弦调制的 FM 信号

画出调制信号为 $m_f(t) = \cos(2\pi t)$ 的 FM 信号的波形。假定载波频率为 5 Hz，并且调制指数为 3。计算过程和结果见 M 文件 Example5_05. m。

5.6.2 角度调制信号的频谱

应用式(4.12)，得到角度调制信号的频谱为

$$S(f) = \tfrac{1}{2}[G(f-f_c) + G^*(-f-f_c)] \tag{5.49}$$

其中，

---

① 对数字信号，有时采用调制指数的另一个定义，并在文献中用 h 来表示。数字调制指数 $h = 2\Delta\theta/\pi$，式中，$2\Delta\theta$ 是发送一个符号的时间 T_S 内的最大峰值相位偏移变化［见式(5.82)］。

② 严格地说，FM 指数仅是对单音频(即正弦)调制所定义。但经常也用于其他波形，其中 B 是调制波形的最高频率或占主导地位的频率。

$$G(f) = \mathscr{F}[g(t)] = \mathscr{F}[A_c e^{j\theta(t)}] \tag{5.50}$$

当计算 AM、DSB-SC 和 SSB 的谱时，可以得到相对简单的关于 $S(f)$ 和 $M(f)$ 关系的式子。对角度调制却得不到这样的结果，因为 $g(t)$ 是 $m(t)$ 的非线性函数。因此，$G(f)$ 和 $M(f)$ 间的一般关系式不能求出。也就是说，为计算角度调制信号的谱，必须在了解不同的调制信号波形的基础上计算式(5.50)。而且由于 $g(t)$ 是 $m(t)$ 的非线性函数，此时叠加定理不成立，两个调制波形之和的 FM 谱不等于各自调制信号的 FM 谱之和。

第 2 章(参见例题 2.22)中给出了一个角度调制信号的谱的例子。其载波被方波进行相位调制，峰峰相位偏移是 180°。在该例中，PM 信号简化成 DSB-SC 信号，因此频谱易于计算。总的来说，对式(5.50)进行闭式求解并不容易，经常要采用数值方法逼近傅里叶变换的积分。以下将给出一个正弦调制波形的例子。

例题 5.6　采用正弦调制的 PM 和 FM 的频谱

假设 PM 信号上的调制信号为

$$m_p(t) = A_m \sin \omega_m t \tag{5.51}$$

于是，

$$\theta(t) = \beta \sin \omega_m t \tag{5.52}$$

其中，$\beta_p = D_p A_m = \beta$ 为相位调制指数。

若采用 FM 调制，可获得与式(5.52)相同的相位函数 $\theta(t)$，其中，

$$m_f(t) = A_m \cos \omega_m t \tag{5.53}$$

并且 $\beta = \beta_f = D_f A_m / \omega_m$。峰值频率偏移为 $\Delta F = D_f A_m / 2\pi$。

复包络为

$$g(t) = A_c e^{j\theta(t)} = A_c e^{j\beta \sin \omega_m t} \tag{5.54}$$

$g(t)$ 具有周期性，其周期为 $T_m = 1/f_m$。因此，$g(t)$ 可以由一个在全部时间($-\infty < t < \infty$)上都有效的傅里叶级数来表示，也就是说，

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{jn\omega_m t} \tag{5.55}$$

其中，

$$c_n = \frac{A_c}{T_m} \int_{-T_m/2}^{T_m/2} (e^{j\beta \sin \omega_m t}) e^{-jn\omega_m t} \, dt \tag{5.56}$$

它可简化为

$$c_n = A_c \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(\beta \sin \theta - n\theta)} \, d\theta \right] = A_c J_n(\beta) \tag{5.57}$$

该积分——称为第一类 n 阶贝塞尔函数，$J_n(\beta)$——没有闭式解，但可以用数值方法求解。表 5.2给出了 $J_n(\beta)$ 的一些值。扩展表见[Abramowitz 和 Stegun,1964]，或者用 MATLAB 程序计算得到。在采用 MATLAB 软件编程计算时，贝塞尔函数可作为标准函数调用。分析上述积分(改变变量)得

$$J_{-n}(\beta) = (-1)^n J_n(\beta) \tag{5.58}$$

图 5.10 给出了以 β 为自变量的不同阶数 n 的贝塞尔函数曲线。

表 5.2　贝塞尔函数 $J_n(\beta)$ 的 4 位有效数字值

n \ β	0.5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.9385	0.7652	0.2239	−0.2601	−0.3971	−0.1176	0.1506	0.3001	0.1717	−0.09033	−0.2459
1	0.2423	0.4401	0.5767	0.3391	−0.06604	−0.3276	−0.2767	−0.004683	0.2346	0.2453	0.04347
2	0.03060	0.1149	0.3528	0.4861	0.3641	0.04657	−0.2429	−0.3014	−0.1130	0.1448	0.2546
3	0.002564	0.01956	0.1289	0.3091	0.4032	0.3648	0.1148	−0.1676	−0.2911	−0.1809	0.05838
4		0.002477	0.03400	0.1320	0.2811	0.3912	0.3567	0.1578	−0.1054	−0.2655	−0.2196
5			0.007040	0.04303	0.1321	0.2611	0.3621	0.3479	0.1858	−0.05504	−0.2341
6			0.001202	0.01139	0.04909	0.1310	0.2458	0.3392	0.3376	0.2043	−0.01446
7				0.002547	0.01518	0.05338	0.1296	0.2336	0.3206	0.3275	0.2167
8					0.004029	0.01841	0.05653	0.1280	0.2235	0.3051	0.3179
9						0.005520	0.02117	0.05892	0.1263	0.2149	0.2919
10						0.001468	0.006964	0.02354	0.06077	0.1247	0.2075
11							0.002048	0.008335	0.02560	0.06222	0.1231
12								0.002656	0.009624	0.02739	0.06337
13									0.003275	0.01083	0.02897
14									0.001019	0.003895	0.01196
15										0.001286	0.004508
16											0.001567

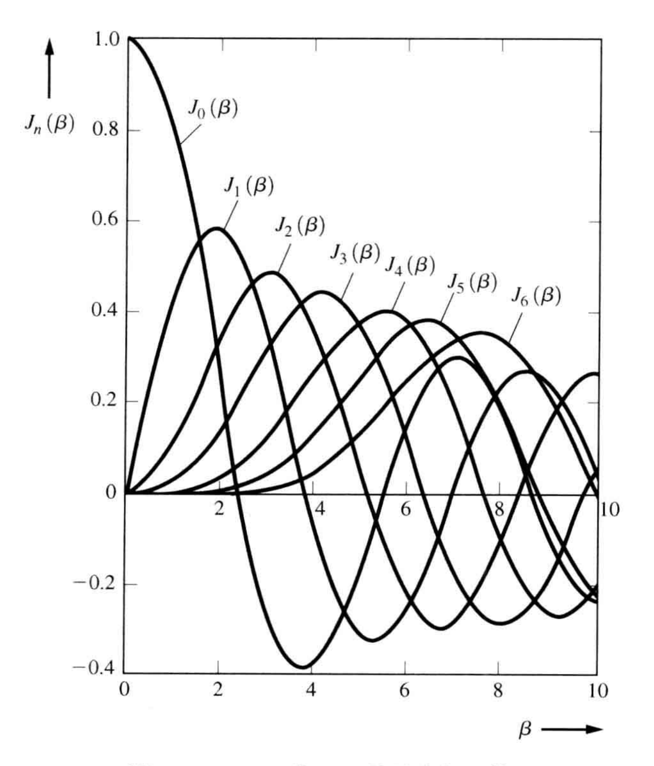


图 5.10　$n=0$ 到 $n=6$ 的贝塞尔函数

对式(5.55)两端取傅里叶变换，可得到：

$$G(f) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n \delta(f - nf_m) \tag{5.59}$$

或者

$$G(f) = A_c \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} J_n(\beta)\delta(f - nf_m) \tag{5.60}$$

将该结果用于式(5.49)，可得到角度调制信号的频谱。参见 M 文件 Example5_06.m 的运行结果。当$f>0$时，对于$\beta=0.2$，1.0，2.0，5.0 和8.0 的情形，对应的幅度谱由图5.11 所给出。注意，离散载波项(在$f=f_c$频点)正比于$|J_0(\beta)|$；因此，离散载波项的电平(幅度)取决于调制指数。若$J_0(\beta)=0$，其值为0，这发生在$\beta=2.40$，5.52 等时，如表5.3 所示。

表5.3　贝塞函数的零点：使 $J_n(\beta)=0$ 的 β 值

	贝塞尔函数的阶数，n						
	0	1	2	3	4	5	6
第1零点的β	2.40	3.83	5.14	6.38	7.59	8.77	9.93
第2零点的β	5.52	7.02	8.42	9.76	11.06	12.34	13.59
第3零点的β	8.65	10.17	11.62	13.02	14.37	15.70	17.00
第4零点的β	11.79	13.32	14.80	16.22	17.62	18.98	20.32
第5零点的β	14.93	16.47	17.96	19.41	20.83	22.21	23.59
第6零点的β	18.07	19.61	21.12	22.58	24.02	25.43	26.82
第7零点的β	21.21	22.76	24.27	25.75	27.20	28.63	30.03
第8零点的β	24.35	25.90	27.42	28.91	30.37	31.81	33.23

图5.11 还表明角度调制信号的带宽取决于β和f_m。事实上，可以证明全部功率的98%都包含在带宽

$$B_T = 2(\beta + 1)B \tag{5.61}$$

之中。其中，β是相位调制指数或者频率调制指数，B是调制信号带宽(对于正弦调制则为f_m)①。该公式给出了计算 PM 和 FM 传输带宽的经验公式，它被称为卡森(Carson)定律。不同β值对应的B_T由图5.11 给出。卡森定律很重要，因为它给出了计算角度调制信号带宽的简易方法。计算带宽的其他方法，如3 dB 带宽法，由于要先计算 FM 或 PM 的频谱，所以都难以计算。这样的计算任务繁重，除非是单音(正弦)调制的简单情形或采用数字计算机计算近似频谱。

因为在通常情况下角度调制信号的精确频谱不易计算，所以其频谱的近似公式就很有用。当峰值相位偏移较小而调制指数较大时，可获得一些相对简单的近似。这些问题将在随后的窄带角度调制和宽带 FM 信号的讨论中研究。

---

① 对于$2<B<10$的 FM 信号，式(5.61)的卡森定律事实上对B_T的估计就有些不准确。在这种情况下，一种更好的估计方法就是$B_T=2(\beta+2)B$。同时，若调制信号包含不连续点，如方波调制，上面两个公式就都不精确了，此时的B_T应当通过考查角度调制信号的频谱来计算。然而，为了避免计算B_T时的混乱，对于所有的情形，都假定式(5.61)近似正确。

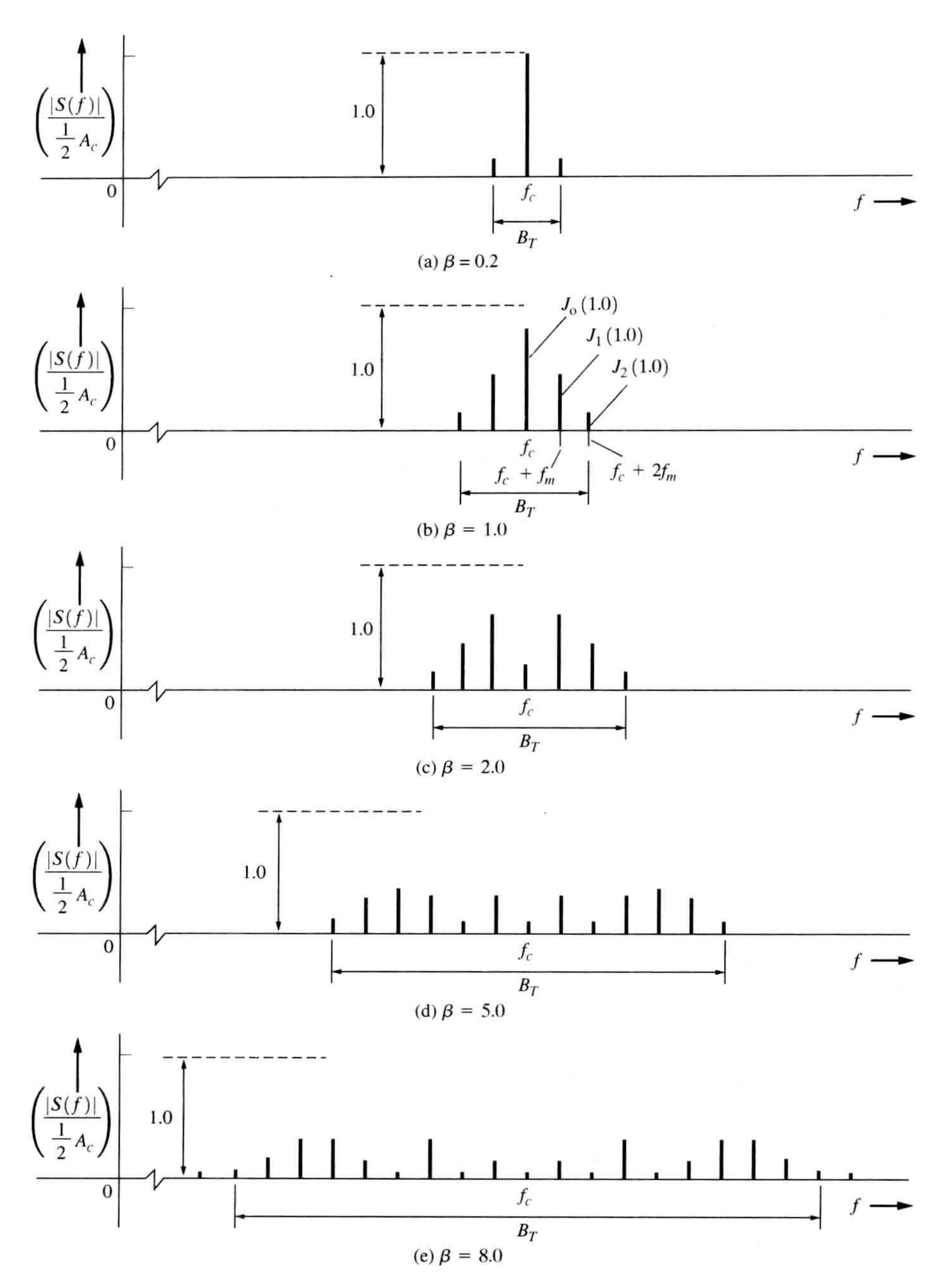


图 5.11 不同的调制指数采用正弦调制的 FM 或 PM 的幅度谱

5.6.3 窄带角度调制

当 $\theta(t)$ 限定为一个较小的值时，如 $|\theta(t)| < 0.2$ rad，可用泰勒级数展开的前两项来近似复包络 $g(t) = A_c e^{j\theta}$。于是，因为 $|x| \ll 1$ 时，$e^x \approx 1 + x$，因此，

$$g(t) \approx A_c[1 + j\theta(t)] \tag{5.62}$$

将该近似用于式(4.9)或式(5.1)中，可得到窄带角度调制信号的表达式：

$$s(t) = \underbrace{A_c \cos \omega_c t}_{\text{离散载波项}} - \underbrace{A_c\theta(t) \sin \omega_c t}_{\text{边带项}} \tag{5.63}$$

这表明窄带角度调制信号包括两项，离散载波分量（不随调制信号变化）和边带项。除了其边带项与离散载波项有90°的相差外，该信号与 AM 型信号类似。窄带信号可由平衡调制器（乘法器）产生，图 5.12（a）就给出了窄带频率调制（NBFM）产生的方法。宽带频率调制可采用倍频器由 NBFM 信号产生，如图 5.12（b）所示。图中采用限幅器以抑制 NBFM 信号中附带的 AM 项［即由于式（5.62）的近似产生的 $\sqrt{1+\theta^2(t)}$ ］。这种产生 WBFM 的方法称为阿姆斯特朗法或间接法。

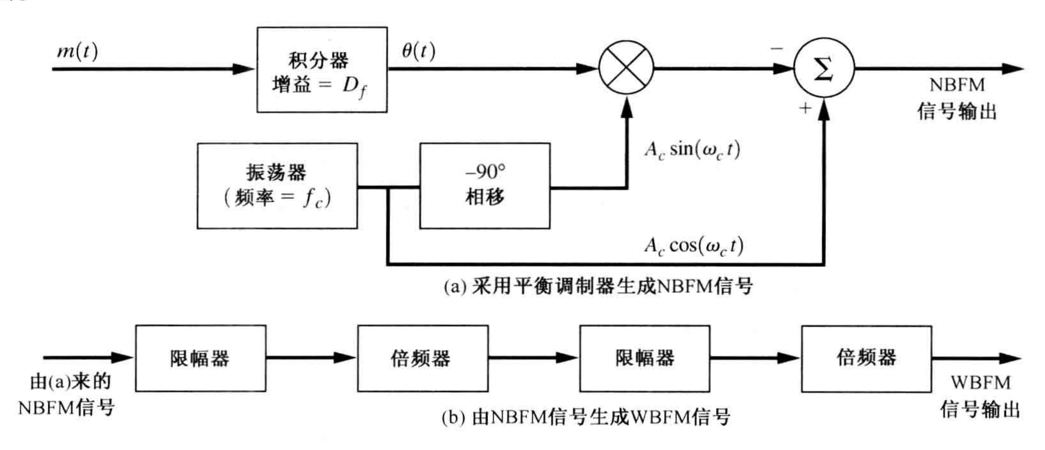


图 5.12　间接法产生 WBFM（阿姆斯特朗法）

例题 5.7　采用正弦调制的 PM 信号的窄带近似

应用窄带近似方法，画出调制信号为 $m(t)=\sin(2\pi t)$ 的 PM 信号的波形。假定载波频率为 5 Hz，并且调制指数为 0.8。将窄带 PM 信号的波形与真实的 PM 信号的波形及载波信号的波形进行比较。计算过程和结果见 M 文件 Example5_07. m。

由式（5.62）和式（5.49），得到窄带角度调制信号的频谱为

$$S(f) = \frac{A_c}{2}\{[\delta(f-f_c) + \delta(f+f_c)] + \mathrm{j}[\Theta(f-f_c) - \Theta(f+f_c)]\} \tag{5.64}$$

其中，

$$\Theta(f) = \mathscr{F}[\theta(t)] = \begin{cases} D_P M(f), & \text{对PM信号} \\ \dfrac{D_f}{\mathrm{j}2\pi f} M(f), & \text{对FM信号} \end{cases} \tag{5.65}$$

5.6.4　宽带频率调制

一种产生宽带频率调制（WBFM）信号的直接方法是采用压控振荡器（VCO），如图 5.8（b）所示。但针对宽的频率偏移（大的 ΔF）所设计的压控振荡器，载频 $f_c=f_0$ 的稳定性不太好，于是可将压控振荡器置入锁相环，该环锁定在如晶体振荡器这样的稳定频率源上（见图 5.13）。分频器可降低 WBFM 信号的调制指数以产生 NBFM 信号（$\beta \approx 0.2$），于是，在 f_c/N 频率上总会出现一个与晶体振荡器信号相互差拍的大的离散载波项并且产生直流控制电压［见图 5.11（a）以及

式(5.63)和式(5.64)]。该直流控制电压使得压控振荡器以一个由晶体振荡器电路决定的容限范围保持在所分配的频率上。

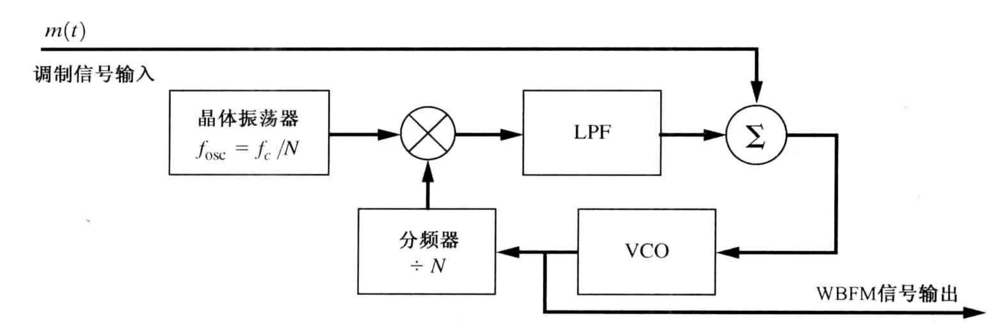


图 5.13　生成 WBFM 信号的直接法

WBFM 信号的功率谱密度(PSD)可以用调制信号的概率密度函数(PDF)来近似。这从直观的角度来看是合理的，因为对于 FM 的情形，其瞬时频率随调制信号电压直接变化[$D_f/(2\pi)$是比例常数]。若调制信号在一个电压值上停留的时间比另一电压值上长，瞬时频率就会保持在对应频率上，功率谱在该频率上将有一个峰值。该近似讨论的过程(称为准静态近似)有详细的论述[Rowe, 1965]。该结论由下述定理阐述。

定理　对 WBFM 信号，

$$s(t) = A_c \cos\left[\omega_c t + D_f \int_{-\infty}^{t} m(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right]$$

$$\beta_f = \frac{D_f \max[m(t)]}{2\pi B} > 1$$

其中，B 是 $m(t)$ 的带宽，WBFM 信号的归一化 PSD 可由下式近似：

$$\mathcal{P}(f) = \frac{\pi A_c^2}{2D_f}\left[f_m\left(\frac{2\pi}{D_f}(f - f_c)\right) + f_m\left(\frac{2\pi}{D_f}(-f - f_c)\right)\right] \tag{5.66}$$

其中 $f_m(\cdot)$ 是调制信号的概率密度函数(PDF)。①

该定理在习题 6.60 中证明。

例题 5.8　用三角波调制的 WBFM 信号的频谱

我们将计算采用三角波调制信号[见图 5.14(a)]的 WBFM 信号的频谱。三角波调制相应的 PDF 如图 5.14(b)所示。PDF 的表示为

$$f_m(m) = \begin{cases} \dfrac{1}{2V_p}, & |m| < V_p \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{5.67}$$

其中，V_p 是三角波峰值电压。将该式代入式(5.66)，得到：

① 附录 B 中有 PDF 的定义和不同波形的 PDF 的例子。若读者对 PDF 不是非常熟悉，这部分内容可忽略。不要将调制信号的 PDF——$f_m(\cdot)$ 与频率变量 f 混淆。

$$\mathcal{P}(f) = \frac{\pi A_c^2}{2D_f}\left[\begin{Bmatrix} \dfrac{1}{2V_p}, & \left|\dfrac{2\pi}{D_f}(f-f_c)\right| < V_p \\ 0, & \text{其他} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{2V_p}, & \left|\dfrac{2\pi}{D_f}(f-f_c)\right| < V_p \\ 0, & \text{其他} \end{Bmatrix}\right]$$

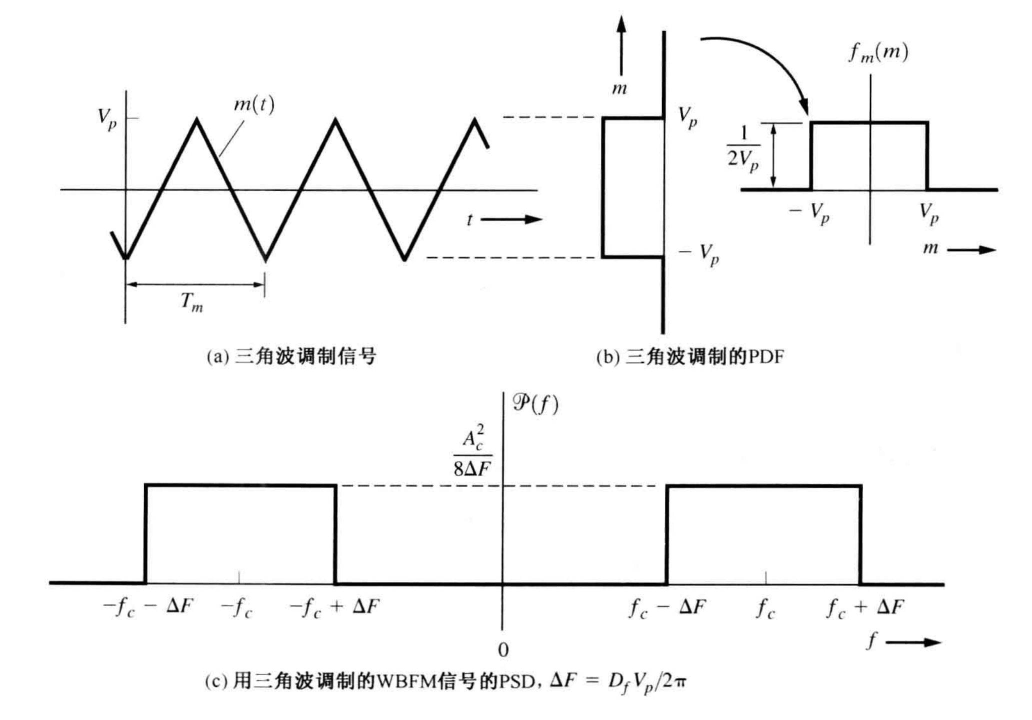
WBFM 信号的 PSD 变为

$$\mathcal{P}(f) = \begin{Bmatrix} \dfrac{A_c^2}{8\Delta F}, & (f_c-\Delta F) < f < (f_c+\Delta F) \\ 0, & \text{其他} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dfrac{A_c^2}{8\Delta F}, & (-f_c-\Delta F) < f < (-f_c+\Delta F) \\ 0, & \text{其他} \end{Bmatrix} \tag{5.68}$$

其中峰值频偏为

$$\Delta F = \frac{D_f V_p}{2\pi} \tag{5.69}$$

图 5.14(c) 中画出了该功率谱密度。注意，该结果是对实际 PSD 的近似。在本例中，调制信号是周期为 T_m 的周期信号，因此实际的谱是间隔为 $f_m = 1/T_m$ 的 δ 函数组成的线谱(如图 5.11 所示的正弦调制信号的间隔)。该近似结果给出了线谱的近似包络(若调制信号是非周期的，则准确的谱是连续的非线谱。)



(a) 三角波调制信号

(b) 三角波调制的PDF

(c) 用三角波调制的WBFM信号的PSD，$\Delta F = D_f V_p/2\pi$

图 5.14　三角波调制的 WBFM 信号的近似谱

在其他采用了正弦(周期)调制的例子中，精确的PSD包含了位于$f=f_c+nf_m$频率处且权重为$[A_cJ_n(\beta)]^2/2$的线谱(见图5.11)。对较高的调制指数，这些权重的包络近似于正弦的PSD，如附录B所示。

宽带数字PM信号的近似谱也可由式(5.66)计算得到。对于三角脉冲数字调制，其调制电压$m(t)$的PDF包含了位于离散电压值上的冲激函数。因此，宽带数字FM的PSD由一系列的δ函数近似。宽带二元频移键控(FSK)信号的近似频谱如图5.15所示。

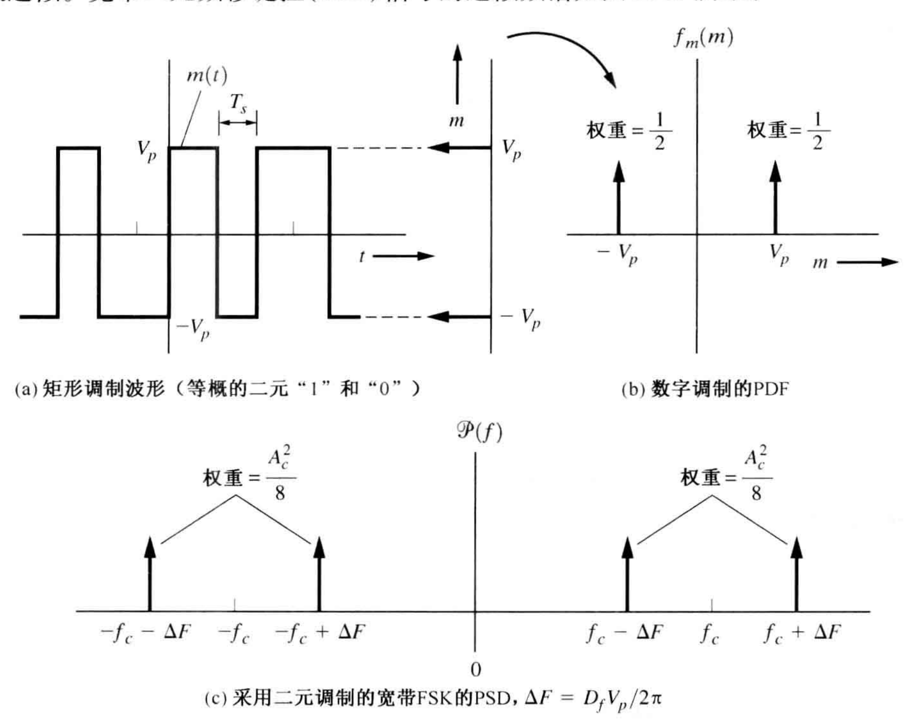


图5.15 宽带二元FSK的近似频谱

归纳起来，角度调制信号的一些重要性质如下：

- 角度已调信号是调制信号的非线性函数，因此信号带宽随调制指数的增加而增加。
- 离散载波电平的变化取决于调制信号，对某些特定类型的调制波形来说是零。
- 窄带角度调制信号的带宽是调制信号带宽的两倍(与AM信号相同)。
- 角度调制信号的实包络$R(t)=A_c$为常数，不取决于调制信号的电平。

5.6.5 角度调制系统中的预加重和去加重

在角度调制系统中，若对调制信号(在发射端)的频谱(如音频)的高端加强(称为预加重)，对接收机输出端的高频部分衰减(称为去加重)，那么接收机的输出信噪比可以得到加强。这样做使得整个基带频率响应是平坦的，增加了接收机输出的信噪比(见图5.16)。在预加重特性中，第2拐点频率f_2比调制信号的基带频谱(如音频调制时为25 kHz)高得多。在FM广播中，时间常数τ_1通常是75 μs，于是f_1位于2.12 kHz处。在发射机采用预加重而在接收机采用去加重的整个系统的最终频率响应在调制信号的频带上是平坦的。在FM广播系统中，采用75 μs的预加重，发射的信号是调制频率最多为2.1 kHz的FM信号，但是一个音频相位调制信号的频率大于2.1 kHz，因为预加重网络起到了将f_1和f_2进行差频的作用。因此，预加重FM实际上是

FM 和 PM 的结合，并且结合了两者在噪声性能上的优点。在第 7 章，我们将证明预加重-去加重提高了接收机的输出信噪比。

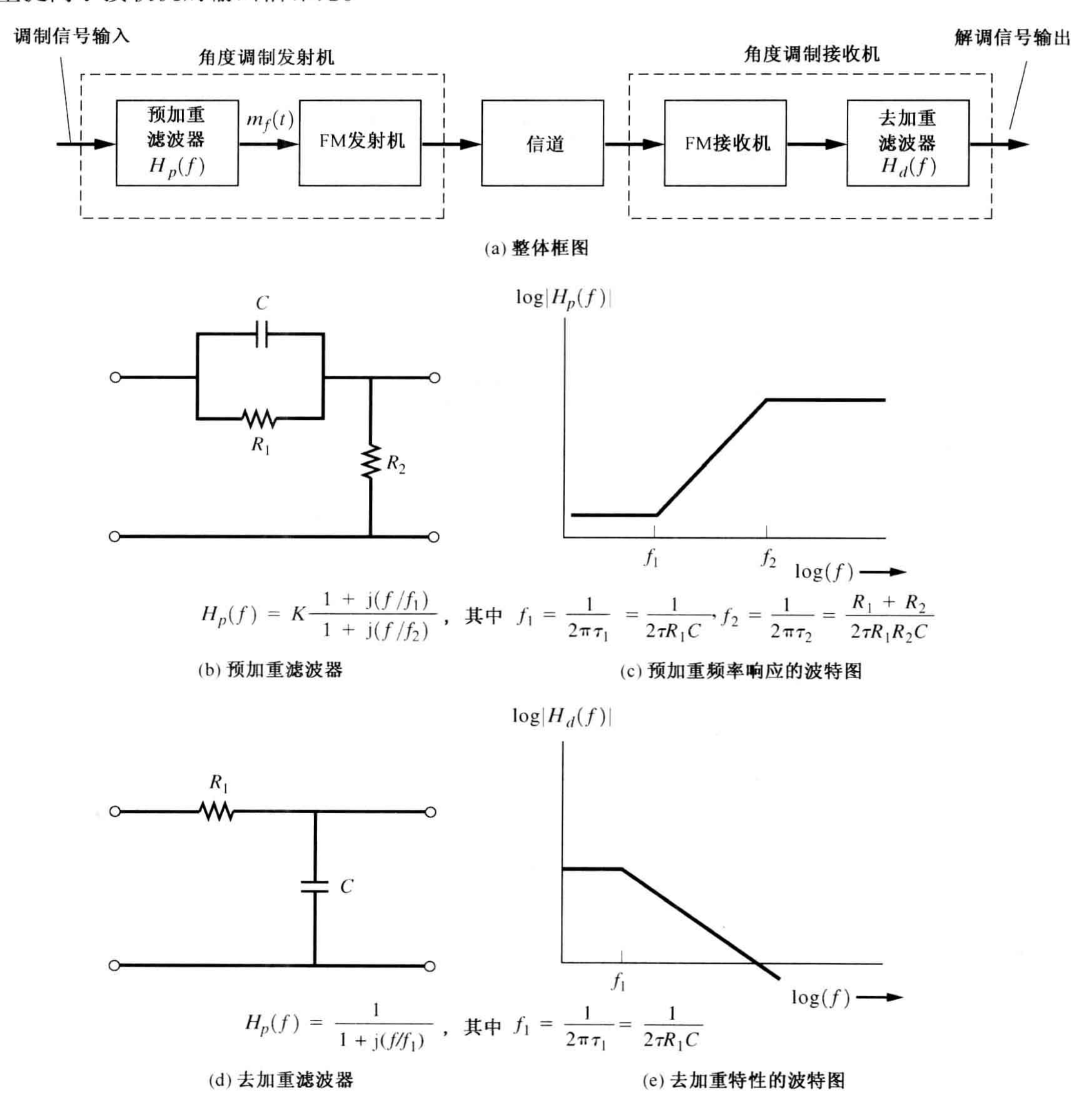


图 5.16　具有预加重和去加重的角度调制系统

5.7　频分复用(FDM)和调频(FM)立体声

频分复用(FDM)是一种在宽带信道上同时传送多个消息的技术，它首先将消息信号调制到几个子载波上，然后形成由这些已调子载波组成的复合基带信号。这个复合信号再调制到主载波上去，如图 5.17 所示。任何类型的调制(如 AM、DSB、SSB、PM、FM 等)都可以采用。子载波上采用的调制类型和主载波上采用的调制类型可以不同，但是，如图 5.17(b)所示，复合信号的频谱中包含的已调信号的频谱不能重叠；否则，在接收端输出的消息信号中将出现串话。复合基带信号在主发射机上调制，再产生在宽带信道上传送的 FDM 信号。

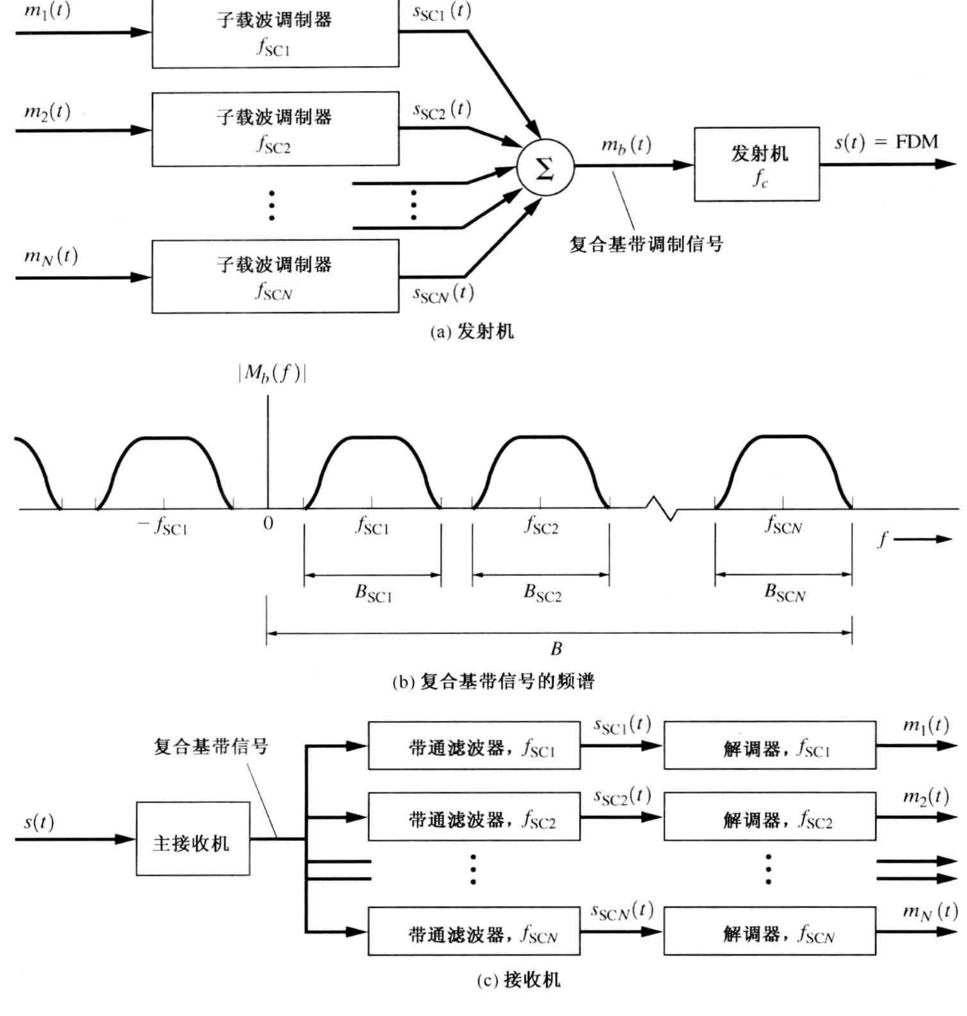


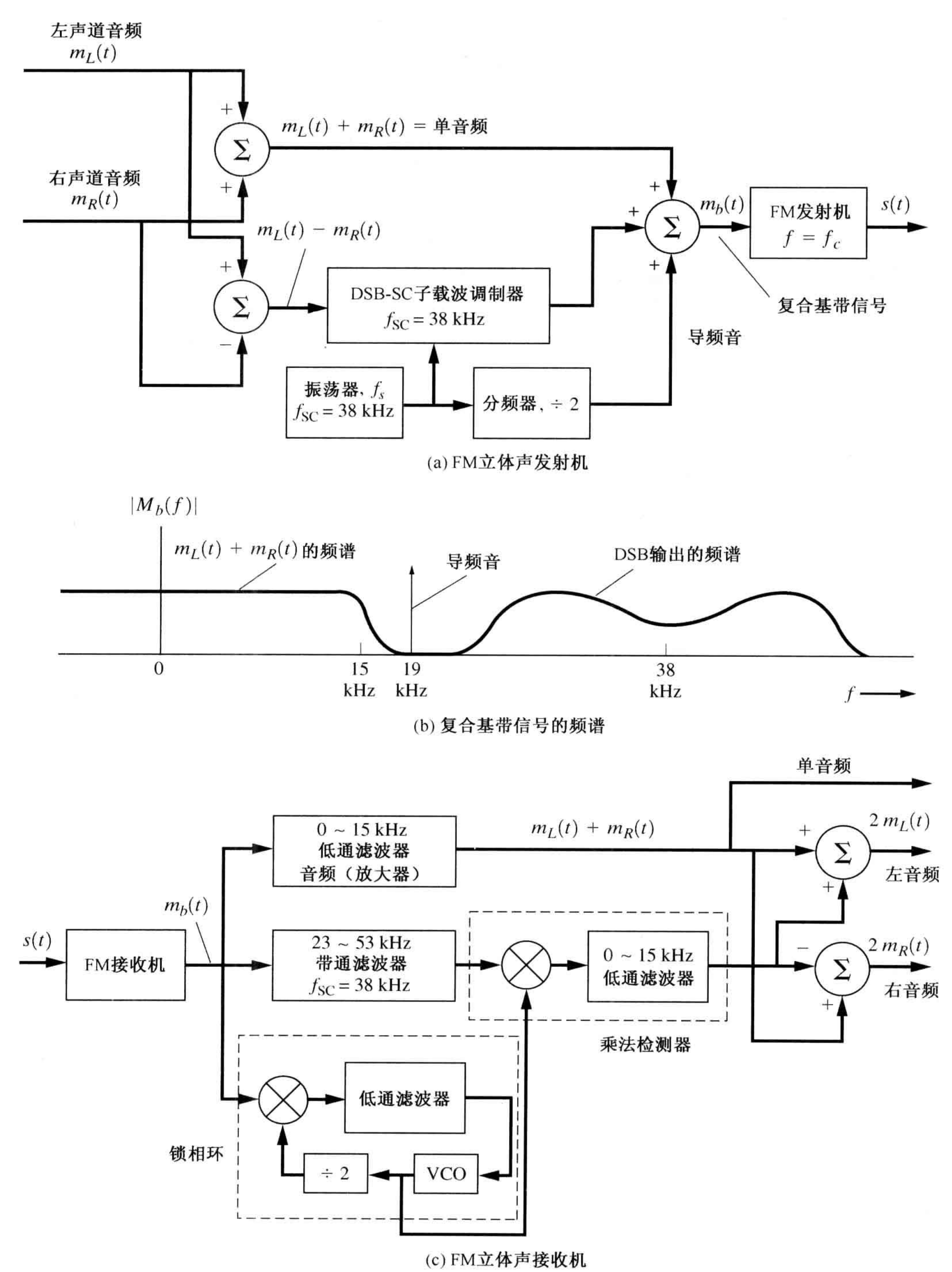
图 5.17 FDM 系统

接收到的 FDM 信号首先解调以恢复复合基带信号。复合基带信号再通过多个滤波器分成独立的已调子载波。于是，这些子载波再解调恢复出消息信号 $m_1(t)$, $m_2(t)$，等等。

美国所采用的 FM 立体声广播系统就是一个 FDM 系统的例子，而且它与 20 世纪 40 年代就存在的单声道 FM 系统兼容。也就是说，拥有传统单声道 FM 接收机的听众可听到单声道音频广播(包括左声道加右声道音频)，而拥有立体声接收机的听众在左扬声器上接收左声道音频，在右扬声器上接收右声道音频(见图 5.18)。为获得兼容的特性，将左声道和右声道音频组合(相加)以产生单声道信号。而音频差用来调制 38 kHz 的 DSB-SC 信号。将 19 kHz 的导频叠加到复合基带信号 $m_b(t)$ 上，以提供接收机进行相干(乘积)子载波解调的参考信号。由图 5.18(c)可知，该系统与现存的 FM 单声道接收机是兼容的。在习题 5.51 中，我们将得到用一种相对简单的开关(抽样)技术就能在一个操作中实现子载波的解调及左信号和右信号的分离。

联邦通信委员会(FCC)也会给 FM 广播站进行辅助通信授权(SCA)。这样就允许 FM 广播站增加一个 FM 子载波以传送第 2 套模拟音频节目或背景音乐，商业用户可将其应用于商店或办公室中。SCA FM 子载波的频率通常是 67 kHz，该频率不是 FCC 规则所确定的。此外，FCC

允许至多有 4 个 SCA 子载波，每一个都可承载数据或模拟音频。在 57 kHz 子载波上采用低于 1200 bps的数据率，无线电广播数据系统（RBDC）可提供附属文本信息，如站的呼号、节目的名称、音乐家的名字以及自动交通堵塞报告。



(a) FM立体声发射机

(b) 复合基带信号的频谱

(c) FM立体声接收机

图 5.18　FM 立体声系统

5.8 FM 广播技术标准以及数字 FM 广播

在美国大约有 9000 个 FM 广播站。表 5.4 给出了一些被 FM 系统采用的 FCC 技术标准。在美国，根据其所要覆盖的范围，将 FM 广播站分为 3 类。其中，A 类的最大有效发射功率(ERP)为 6 kW，在一般地区的最大天线高度为 300 英尺。ERP 是平均发射输出功率乘以传输线(一个小于 1 的数)和天线的增益(参见 8.9 节对某些 TV ERP 的计算)。B 类站的最大 ERP 为50 kW，一般地区最大的天线高度为 500 英尺。B 类站位于美国的东北部、加州南部、波多黎各以及维京群岛。C 类站位于美国其他区域。它们的最大 ERP 为 100 kW，一般地区的最大天线高度为 2000 英尺。如表中所示，FM 广播站还可进一步分为商业性的和非商业性的。非商业性广播站工作在 FM 频段的 88.1 ~ 91.9 MHz 段上，而且提供非商业的教育节目。在 FM 频段的商业段，即 92.1 ~ 107.9 MHz，有一些专业的频率点是为 A 类站保留的，其他则分配给 B 类和 C 类广播站。从[www.fcc.gov/mb/audio/fmg.html]可获得这些频率以及每个城市被分配了哪些专门站点的列表。

表 5.4 FCC FM 标准

服务类型	项　目	FCC 标准
FM 广播	分配的频率 f_c	从 88.1 MHz(FM 信道 201) ~ 107.9 MHz(FM 信道 300)，步进为 200 kHz
	信道带宽	200 kHz
	非商业性广播站	88.1 MHz(信道 201) ~ 91.9 MHz(信道 220)
	商业广播站	92.1 MHz(FM 信道 221) ~ 107.9 MHz(FM 信道 300)
	载波频率稳定度	分配的频率 ± 2000 Hz
	100% 调制[a]	$\Delta F = 75$ kHz
	音频频率响应[b]	50 Hz ~ 15 kHz，尾随一条 75 μs 的预加重曲线
	调制指数	5(对于 $\Delta F = 75$ kHz 和 $B = 15$ kHz)
	% 谐波失真[b]	<3.5%(50 ~ 100 Hz) <2.5%(100 ~ 7500 Hz) <3.0%(7500 ~ 15 000 Hz)
	FM 噪声	在 400 Hz，比 100% 调制至少低 60 dB
	AM 噪声	在 50 Hz ~ 15 kHz 波段上，比 100% AM 的相应电平低 50 dB
	最大功率许可	100 kW 的水平极化加上 100 kW 的垂直极化
双向 FM 移动广播	100% 调制	$\Delta F = 5$ kHz
	调制指数	1(对于 $\Delta F = 5$ kHz 和 $B = 5$ kHz)
	频段内的载波频率	32 ~ 50 MHz(低 VHF 波段) 144 ~ 174 MHz(2m 业余波段) 148 ~ 174 MHz(高 VHF 波段)[c] 420 ~ 450 MHz(3/4 业余波段) 450 ~ 470 MHz(UHF 波段) 470 ~ 512 MHz(UHF，T 波段) 806 ~ 928 MHz(900 MHz 波段)
模拟电视伴音(FM)信号	100% 调制	$\Delta F = 25$ kHz
	调制指数	1.67(对于 $\Delta F = 25$ kHz 和 $B = 15$ kHz)

[a] 对立体声传输，19 kHz 导频提供了至少差不多 75 kHz 的峰值偏移的 10%。若采用 SCA，每个 SCA 子载波也最多提供了 10%，所以总的峰值偏移是 75 kHz 的 110%。

[b] 根据 FCC 新的解除管制政策，尽管广播仍采用这些要求作为最小可接受性能的准则，但它们已从 FCC 规则中删除。

[c] 在 5 kHz 带宽信道中也允许幅度抑制 SSB 出现在 150 ~ 170 MHz 波段。

5.8.1　数字调频广播

在美国，联邦通信委员会已经为调频频段（即 88.1 ~ 107.9 MHz）的数字广播采用了带内同频数字声音广播（IBOC）系统。该 IBOC 系统提供数字音频数据和辅助数字数据与传统的调频信号（由模拟的音频调制）的同时传输。于是，一个传统的调频接收机可用于接收模拟的音频信号。一个由内置编解码器的 IBOC 接收机可用于将调频 IBOC 信号转化为立体声音频。若接收到的调频 IBOC 信号非常微弱，那么收听者将从信号的调频部分听到传统的模拟音频。若收到的信号较强，那么从 IBOC 数据译码后的音频将几乎达到 CD 立体声的质量。若信号强度介于微弱和强之间，那么接收机将产生一个来自于调频和 IBOC 部分的混合音频。

正如 5.12 节中讨论的那样，正交频分复用技术（OFDM）用于产生 IBOC 信号。为了生成 IBOC 信号，来自发射机的数据被分成两个正交频分复用组，放置在传统的调频信号的邻近边带之中。一个正交频分复用组被放置在上边带之中，而另外一个被放置在下边带之中。边带之间相互独立，但是数据的划分使得仅需要一个边带就可以恢复降低质量的音频。高保真度的立体声音频的恢复需要来自于所有边带的数据（所有两个正交频分复用组）。

调频 IBOC 信号的带宽为 400 kHz，但是载波之间的间隔仍然为 200 kHz。于是，相邻信道的站点之间存在潜在的干扰。然而，调频站的现有频率分配是把相邻的信道分配给距离较远的站点，所以它们的覆盖区域很少有重叠。于是分配了相邻信道的站点之间存在极少的调频 IBOC 干扰。该项技术的更多信息以及发射调频 IBOC 信号的站的列表，请在因特网上搜索 IBOC FM。

5.9　二元已调带通信号

利用在表 4.1 中首次给出并且在前述章节中研究的 AM、PM、FM 或 QM（正交调制）信号的复包络可产生数字已调带通信号。对数字已调信号，调制信号 $m(t)$ 是在第 3 章中所研究的二元或多电平线路码的数字信号。在本节中，我们将详细讨论二元已调信号。在 5.10 节和 5.11 节将对多电平和最小频移键控数字已调信号进行讨论。

如图 5.19 所示，最常见的二元带通信号传输技术如下：

- 开关键控（OOK），也称为幅移键控（ASK），它由单极性二进制信号键控（转换）正弦载波的开和关组成。OOK 等价于 DSB-SC 信号上的单极性二进制调制[见式(5.13)]。该技术的一个例子是摩斯码的无线电传输。OOK 是模拟通信系统之前首个采用的调制技术之一。
- 二元频移键控（BPSK），根据单极性二进制信号将正弦载波的相位在 0°和 180°间切换。BPSK 等效于采用数字波形的 PM 信号调制，也等效于用双极性波形调制的 DSB-SC 信号。
- 频移键控（FSK），根据基带数字信号将载波的频率在传号频率（如对应于传“1”）和空号频率（如对应于传“0”）之间切换而组成。FSK 等价于用二元数字信号调制 FM 载波。

如 3.6 节所述，数字信号的带宽应最小化以节省频谱资源。为此，可采用预调制升余弦滚降滤波器以最小化数字信号的带宽，同时还不会引入码间串扰。这样成形的基带数字信号产生在发射机中作为调制信号的模拟基带波形。图 5.19(f) 给出了采用预调制滤波器时的 DSB-SC 信号。因此，当采用预调制滤波时，图 5.19(d) 所示的 BPSK 信号变成 DSB-SC 信号[见图 5.19(f)]。

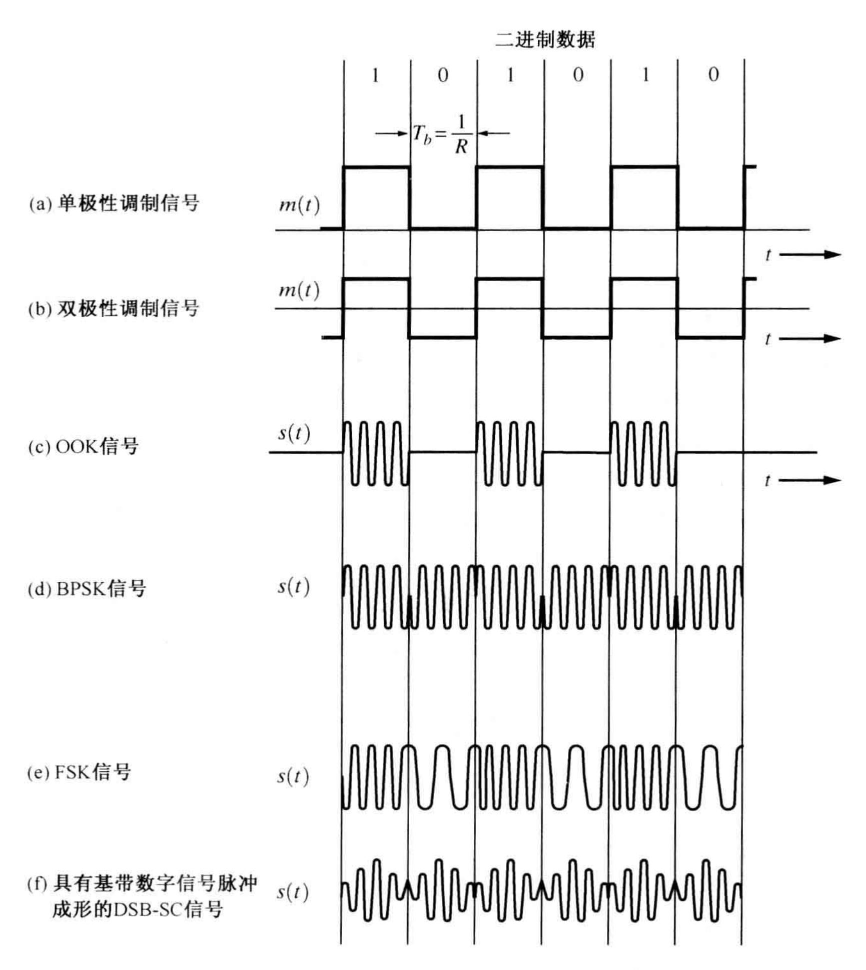


图 5.19 带通数字已调信号

5.9.1 开关键控(OOK)

OOK 信号可表示为:

$$s(t) = A_c m(t) \cos \omega_c t \tag{5.70}$$

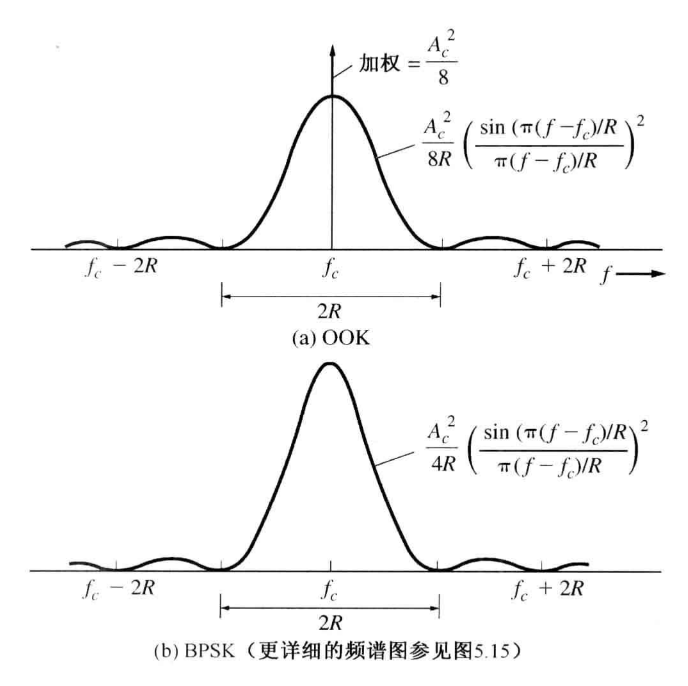
其中, $m(t)$是单极性基带数据信号, 如图 5.19(a)所示。于是, 复包络就简单地表示为

$$g(t) = A_c m(t), \quad \text{对于OOK} \tag{5.71}$$

该复包络的 PSD 正比于单极性信号的 PSD。利用式(3.39b), 我们得到该 PSD 为:

$$\mathcal{P}_g(f) = \frac{A_c^2}{2}\left[\delta(f) + T_b\left(\frac{\sin \pi f T_b}{\pi f T_b}\right)^2\right], \quad \text{对于OOK} \tag{5.72}$$

其中, $m(t)$的峰值 $A=\sqrt{2}$, 因此 $s(t)$的平均归一化功率为 $A_c^2/2$。将式(5.72)代入式(5.2b), 可得到相应的 OOK 信号的 PSD。图 5.20(a)画出了正频率部分的 PSD, 其中 $R=1/T_b$ 为比特率。零点 - 零点间的带宽 $B_T=2R$, 绝对带宽 $B_T=\infty$。同时, OOK 信号的传输带宽为 $B_T=2B$, 其中 B 是基带信号带宽, 因为 OOK 是 AM 型调制。



(a) OOK

(b) BPSK（更详细的频谱图参见图5.15）

图 5.20　带通数字信号的 PSD(正频率部分)

若采用升余弦滚降滤波器(保持带宽不变)，滤波后的二元信号的绝对带宽与比特率 R 的关系由式(3.74)给出，其中对二进制数字信号 $D = R$。因此，绝对基带信号带宽为

$$B = \frac{1}{2}(1 + r)R \tag{5.73}$$

其中，r 是滤波器的滚降系数。由此得到采用升余弦滚降滤波的 OOK 信号的绝对传输带宽为

$$B_T = (1 + r)R \tag{5.74}$$

因为 OOK 是 AM 型调制，所以对 OOK 信号可以采用包络检波器(非相干检波)或乘积检波器(相干检波器)来检测。

(在射频信号很弱的接收机中，可采用图 4.29 所示的超外差接收电路，并在中频输出之后接其中的一个检波器电路。)这些检波器由图 5.21(a)和图 5.21(b)给出。对乘法检测，必须提供载波参考信号 $\cos(\omega_c t)$。这些通常由锁相环(PLL)电路(在 4.14 节讨论的)产生，其锁相环锁定在 OOK 信号的离散载波频率上[见图 5.20(a)]。

对 OOK 的最优检测——即当输入的 OOK 信号被加性白色高斯噪声污染时，获得最低的误比特率——需要使用匹配滤波处理的乘法检测器。如图 5.21(c)所示，图中给出了 OOK 信号当相应的输入数据流为 1101 时，接收电路不同点上的波形。对匹配滤波器的运行、性能及实现的详细讨论将在 6.8 节给出。注意，匹配滤波器还需要一个时钟信号。该信号在每个比特区间的开始对积分器复位，在每个比特区间末尾对抽样-保持电路进行定时。比特同步电路(第 4 章讨论过)可提供时钟信号。

图 5.21(c)中的 OOK 信号的最优相干检测器比图 5.21(a)中的非相干 OOK 检测器实现起来更为昂贵一些。如果输入噪声较小，在综合考虑价格和噪声性能的情况下，非相干接收机有可能是最佳的解决方案。最优相干检测和非最优非相干检测在 BER 性能上的折中将在 7.6 节中进行分析。

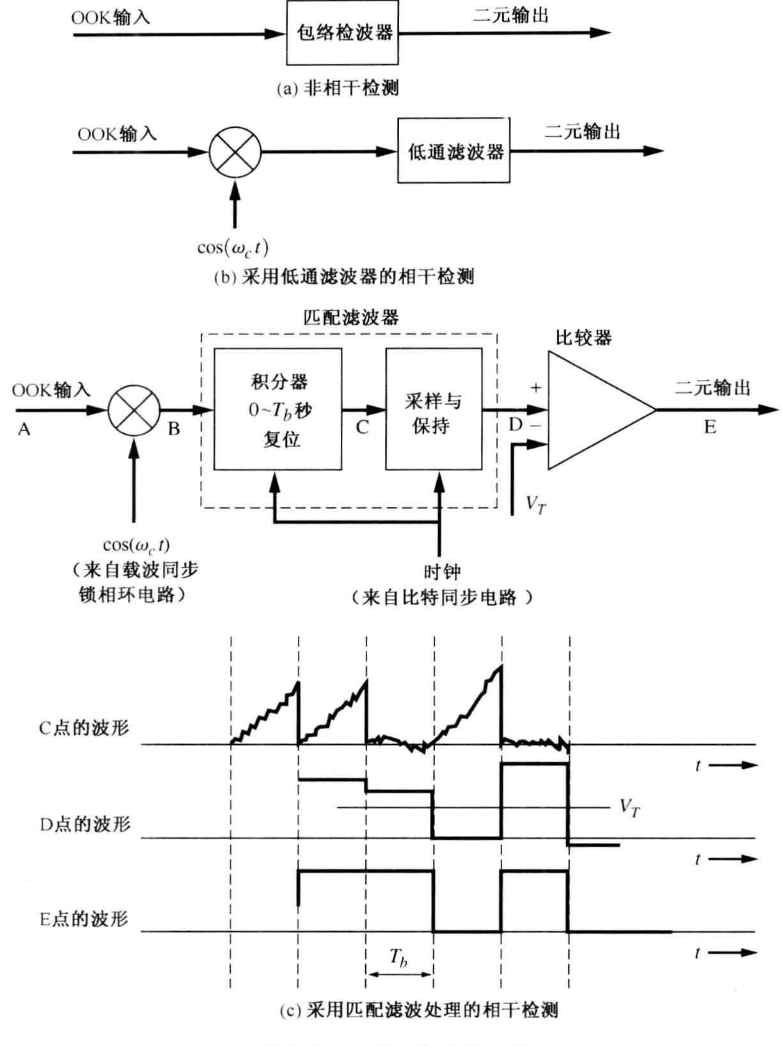


图 5.21　OOK 信号的检测

5.9.2　二元相移键控(BPSK)

二元相移键控 BPSK 信号表示为

$$s(t) = A_c \cos[\omega_c t + D_p m(t)] \tag{5.75a}$$

其中，$m(t)$是双极性基带数据信号。为方便起见，令 $m(t)$峰值为 ±1，并且形状为矩形脉冲。

我们现在证明 BPSK 也是一种 AM 型的调制。将式(5.75a)展开，得到

$$s(t) = A_c\cos(D_p m(t))\cos\omega_c t - A_c\sin(D_p m(t))\sin\omega_c t$$

由于$m(t)$取值为 ±1，并且 $\cos(x)$ 和 $\sin(x)$ 分别是 x 的偶函数和奇函数，可得到 BPSK 信号的表达式可简化为

$$s(t) = \underbrace{(A_c\cos D_p)\cos\omega_c t}_{\text{导频载波项}} - \underbrace{(A_c\sin D_p)\,m(t)\sin\omega_c t}_{\text{数据项}} \tag{5.75b}$$

峰偏差的值 $\Delta\theta = D_p$ 决定了导频载波项的值。

对数字角度调制信号，数字调制指数 h 定义为

$$h = \frac{2\Delta\theta}{\pi} \tag{5.76}$$

其中，$2\Delta\theta$ 是发送一个符号所需时间 T_s 内的最大峰-峰相位偏移(rad)。对于二元信号，符号时间等于比特时间 ($T_s = T_b$)。

当 $m(t) = \pm 1$ 时，$\Delta\theta = D_p$，峰值偏移确定了导频载波项的值。若 D_p 较小，导频载波项相对数据项的幅度要大很多。因此，数据项中包含的功率非常少(而数据项包含了源信息)。为最大化信号效率(以使得错误概率较低)，应增大数据项的功率。这可以通过令 $\Delta\theta = D_p = 90° = \pi/2$ rad 弧度来实现，即对应的数字调制指数 $h = 1$。在这种 $h = 1$ 的最优情况下，BPSK 信号变成

$$s(t) = -A_c m(t) \sin \omega_c t \tag{5.77}$$

在全书中，我们都假设 BPSK 调制的 $\Delta\theta = 90°$，$h = 1$ (除非另有说明)。式(5.77)表明 BPSK 等价于采用双极性基带数据波形的 DSB-SC 调制。这种 BPSK 信号的复包络为

$$g(t) = \mathrm{j}A_c m(t), \quad \text{对于BPSK} \tag{5.78}$$

利用式(3.41)，得到复包络的 PSD 为

$$\mathcal{P}_g(f) = A_c^2 T_b \left(\frac{\sin \pi f T_b}{\pi f T_b}\right)^2, \text{对于BPSK} \tag{5.79}$$

其中，$m(t)$ 的值为 ± 1，于是 $s(t)$ 的平均归一化功率为 $A_c^2/2$。将式(5.79)代入式(5.2b)，即将基带频谱搬移到载波频率上，即可获得对应的 BPSK 信号的 PSD。BPSK 的谱示于图 5.20(b)。BPSK 的零点-零点带宽也是 $2R$，同 OOK 一样。

为检测 BPSK 信号，应采用同步检测方式，如图 5.22(a)所示。由于 BPSK 信号中没有离散载波项，所以仅当一个低电平导频载波与 BPSK 信号同时传输时，可采用锁相环提取载波参考信号。否则，可用科斯塔环或平方环(见图 5.3)从该 DSB-SC(即 BPSK)信号中合成载波参考信号以进行相干检测。但是正如 5.4 节讨论的那样，必须解决 180°相位模糊问题。这可通过在发射机输入端采用差分编码、在接收机输出端采用差分解码来实现，如第 3 章的图 3.17 所示。

对 BPSK 的最优检测(即在 AWGN 情形下最低的 BER)，可用如图 5.21(c)所示的积分-清除匹配滤波器代替图 5.22(a)所示的低通滤波器，其中对于 BPSK 的情形，V_T 设为 0 V。7.3 节给出了最终的误比特率。

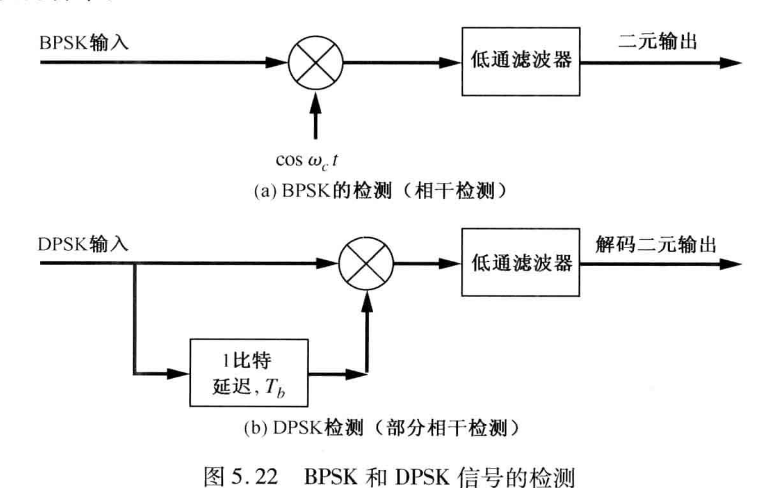


图 5.22　BPSK 和 DPSK 信号的检测

5.9.3 差分相移键控(DPSK)

相移键控信号不能进行非相干检测。但是可采用部分相干技术，即前一信号区间上出现的信号给当前信号区间上的信号提供相位参考。图5.22(b)中的接收机描述了该项技术，其中采用(1比特)延迟和乘法器作为差分解码器。于是，若BPSK信号上的数据进行差分编码(例如，见表3.4)，那么解码后的数据序列将在接收机输出端得以恢复。该技术包含了对差分编码后的BPSK信号传输，称为DPSK。

对于DPSK的最优检测，用积分-清除匹配滤波器代替图5.22的低通滤波器，而DPSK输入信号应由脉冲响应为 $h(t)=\Pi[(t-0.5T_b)/T_b]\cos(\omega_c t)$ 的带通滤波器预滤波(要了解该最优接收机，更多细节请见图7.12)。由此产生的BER由式(7.66)和式(7.67)给出。

在实际系统中，经常用DPSK取代BPSK。这是因为DPSK接收机不需要载波同步电路。

5.9.4 频移键控(FSK)

根据产生FSK信号的方法不同，可将其分为两种不同类型。一种如图5.23(a)所示，通过发射机输出在两个不同振荡器间切换而得到FSK。这种方法产生的输出波形在开关转换时刻是不连续的，称为不连续相位FSK，其 $\theta(t)$ 在开关转换时间是不连续的。不连续相位FSK信号可由下式表达：

$$s(t)=A_c\cos[\omega_c t+\theta(t)]=\begin{cases}A_c\cos(\omega_1 t+\theta_1), & t\text{ 位于发送1的时间间隔内}\\ \\ A_c\cos(\omega_2 t+\theta_2), & t\text{ 位于发送0的时间间隔内}\end{cases} \tag{5.80}$$

其中，f_1 称为传号(二元的1)频率，f_2 称为空号(二元的0)频率。θ_1 和 θ_2 是两个振荡器的初始相位。不连续相位函数为

$$\theta(t)=\begin{cases}\omega_1 t+\theta_1-\omega_c t, & t\text{ 位于发送1的时间间隔内}\\ \omega_2 t+\theta_2-\omega_c t, & t\text{ 位于发送0的时间间隔内}\end{cases}$$

因为FSK发射机通常不是这么构造的，我们将致力于第二种类型的讨论，见图5.23(b)。

如图5.23(b)所示，连续相位FSK信号是通过将数据信号送入频率调制器而产生的。这种FSK信号可表示(见5.6节)为

$$s(t)=A_c\cos\left[\omega_c t+D_f\int_{-\infty}^{t}m(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\right]$$

或者

$$s(t)=\mathrm{Re}\{g(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c t}\} \tag{5.81a}$$

其中，

$$g(t)=A_c\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta(t)} \tag{5.81b}$$

$$\theta(t)=D_f\int_{-\infty}^{t}m(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda,\quad \text{对于FSK} \tag{5.81c}$$

其中，$m(t)$ 是基带数字信号。尽管 $m(t)$ 在开关转换时刻是不连续的，但是其相位函数 $\theta(t)$ 是连续的，这是因为 $\theta(t)$ 与 $m(t)$ 的积分值成正比。如果串行数据输入波形是二进制的，如双极性基带信号，则产生的FSK信号称为二进制FSK信号。多电平输入信号将产生多电平FSK信

号。在本节中我们假设输入为二进制信号，并对二进制 FSK 信号的性质进行分析。

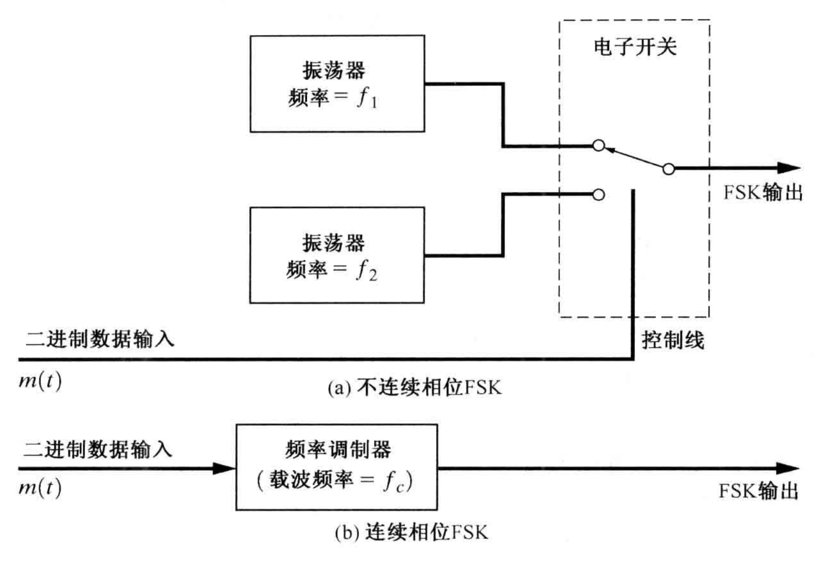


图 5.23　FSK 的产生

在通常情况下，由于复包络 $g(t)$ 是 $m(t)$ 的非线性函数，所以 FSK 信号的频谱难以计算。但如下例所示，5.6 节推导的方法是可以应用的。

例题 5.9　贝尔型 103FSK 调制解调器的频谱

今天，个人计算机经常通过使用连接到双绞电话线的调制解调器（见 8.3 节）或者使用 QAM 信号的同轴电缆调制解调器（下一节中所述）连接到互联网服务器上。曾经，个人计算机是通过调制解调器和模拟拨号电话线与远程计算机相连的。贝尔型 103 调制解调器是这种拨号连接的一个例子，并且它使用 FSK 信号。FSK 信号将继续用于电话呼叫 ID 信号（贝尔 202 标准；见表 8.1）和许多无线应用之中，因为 FSK 的效率较高。

我们将以 300 bps 贝尔系统的 103 调制解调器标准为例来计算 FSK 信号的频谱。由图 5.24，我们看到每个调制解调器都包括一个 FSK 发射机和 FSK 接收机。这样计算机终端既可“说”又可“听”。我们使用两个 FSK 频段（一个以 1 kHz 为中心，另一个以 2 kHz 为中心），这样计算机可同时“说”和“听”。这种方法称为全双工（在半双工中，计算机不能在“说”的时候“听”，或者相反；在单工中，计算机只能“说”或只能“听”）。这两个波段的标准传号和空号频率示于表 5.5。从该表中可看出峰-峰偏移为 $2\Delta F = 200$ Hz。

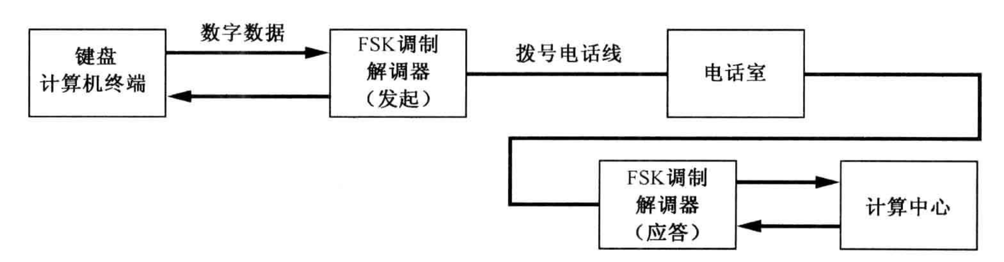


图 5.24　采用 FSK 调制的计算机通信

表 5.5 贝尔型 103 调制解调器传号和空号频率

	发起调制解调器 (Hz)	应答调制解调器 (Hz)
传输频率		
传号(二元码 1)	$f_1 = 1270$	$f_1 = 2225$
空号(二元码 0)	$f_2 = 1070$	$f_2 = 2025$
接收频率		
传号(二元码 1)	$f_1 = 2225$	$f_1 = 1270$
空号(二元码 0)	$f_2 = 2025$	$f_2 = 1070$

我们将对带宽最宽的 FSK 信号计算贝尔型 103 调制解调器的频谱，求得当输入数据信号由对应于交替数据模式(如 10101010)的确知(周期)方波组成时的频谱。[①] 如图 5.25(a)所示，其中 T_b 是一个比特的时间间隔，并且 $T_0 = 2T_b$ 是数据调制的周期。采用 5.6 节和例题 5.6得到的傅里叶级数方法可求得该频谱。由于调制信号是周期性的，那么 FSK 的频谱应是线谱(即 δ 函数)。由式(5.81c)和式(5.42)可知，当 $m(t)$ 取值为 ± 1 时，峰值频率偏移为 $\Delta F = D_f/(2\pi)$。由此产生了如图 5.25(b)所示的三角相位函数。由这幅图可知，数字调制指数为

$$h = \frac{2\Delta\theta}{\pi} = \Delta F T_0 = \frac{2\Delta F}{R} \tag{5.82}$$

其中，比特率为 $R = 1/T_b = 2/T_0$。在这个应用中，注意由式(5.82)给出的数字调制指数与由式(5.48)定义的 FM 调制指数相同，这是因为

$$h = \frac{\Delta F}{1/T_0} = \frac{\Delta F}{B} = \beta_f$$

假设是 $m(t)$ 的带宽定义为 $B = 1/T_0$。

复包络的傅里叶级数为

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \tag{5.83}$$

其中，$f_0 = \omega_0/2\pi = 1/T_0 = R/2$，

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{A_c}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j\theta(t)} e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{A_c}{T_0}\left[\int_{-T_0/4}^{T_0/4} e^{j\Delta\omega t - jn\omega_0 t} dt + \int_{T_0/4}^{3T_0/4} e^{-j\Delta\omega(t-(T_0/2))} e^{-jn\omega_0 t} dt\right] \end{aligned} \tag{5.84}$$

以及 $\Delta\omega = 2\pi\Delta F = 2\pi h/T_0$。式(5.84)化简为

$$c_n = \frac{A_c}{2}\left[\left(\frac{\sin[(\pi/2)(h-n)]}{(\pi/2)(h-n)}\right) + (-1)^n\left(\frac{\sin[(\pi/2)(h+n)]}{(\pi/2)(h+n)}\right)\right] \tag{5.85}$$

其中，数字调制指数 $h = 2\Delta F/R$，$2\Delta F$ 是峰-峰频移，R 是比特率。应用式(5.49)和式(5.59)，我们得到具有交替变化的数据的 FSK 信号的频谱为

$$S(f) = \tfrac{1}{2}[G(f-f_c) + G^*(-f-f_c)] \tag{5.86a}$$

---

① 对于随机数据的情形，$g(t)$ 的 PSD 由图 5.27 的 $h = 0.7 \approx 0.67$ 给出。

其中，

$$G(f) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \delta(f - nf_0) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \delta\left(f - \frac{nR}{2}\right) \tag{5.86b}$$

并且 c_n 由式(5.85)给出。

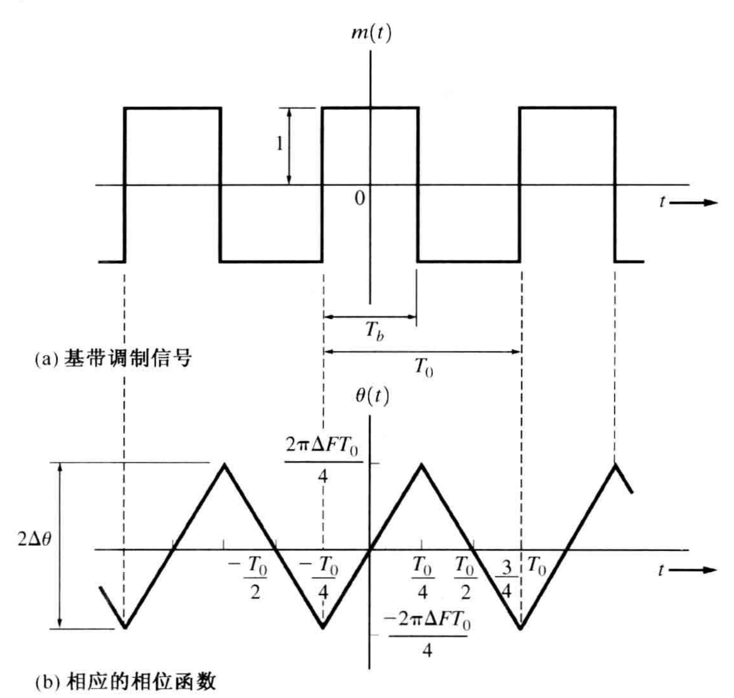


图 5.25　输入数据信号和 FSK 信号相位函数

若使用 PC，不同频移 ΔF 和比特率 R 的 FSK 频谱很容易通过计算得到。图 5.26 给出了在三组不同参数下由计算机算出的 FSK 频谱。图 5.26(a)给出了贝尔 103 的 FSK 频谱。在这种情况下，当采用贝尔 103 参数时，其数字调制指数为 $h=0.67$，且在传号和空号频率上没有线谱。图 5.26(b)和图 5.26(c)给出的是 $h=1.82$ 和 $h=3.33$ FSK 谱。注意，当调制指数增加时，频谱更集中于 f_1 和 f_2。宽带 FM 的 PSD 定理[见式(5.66)]也阐明了同样的结论，因为二进制调制的 PDF 包含了两个冲激函数(见图 5.15)。

FSK 信号的近似带宽 B_T 由卡森定律给出，$B_T=2(\beta+1)B$，其中 $\beta=\Delta F/B$。这等价于

$$B_T = 2\Delta F + 2B \tag{5.87}$$

其中，B 是数字(例如方波)调制波形的带宽。对于本例中的交替二元 1 和 0 测试波形，该方波调制波形的带宽(假设采用的是第一零点型带宽)为 $B=R$。由式(5.87)可知，FSK 的传输带宽为

$$B_T = 2(\Delta F + R) \tag{5.88}$$

其结果示于图 5.26。若采用升余弦滚降预调制滤波器，FSK 信号的传输带宽变为

$$B_T = 2\Delta F + (1 + r)R \tag{5.89}$$

对 $\beta \gg 1$ 的宽带 FSK，ΔF 在等式中占主要地位，以及 $B_T=2\Delta F$。对窄带 FSK，其传输带宽为 $B_T=2B$。

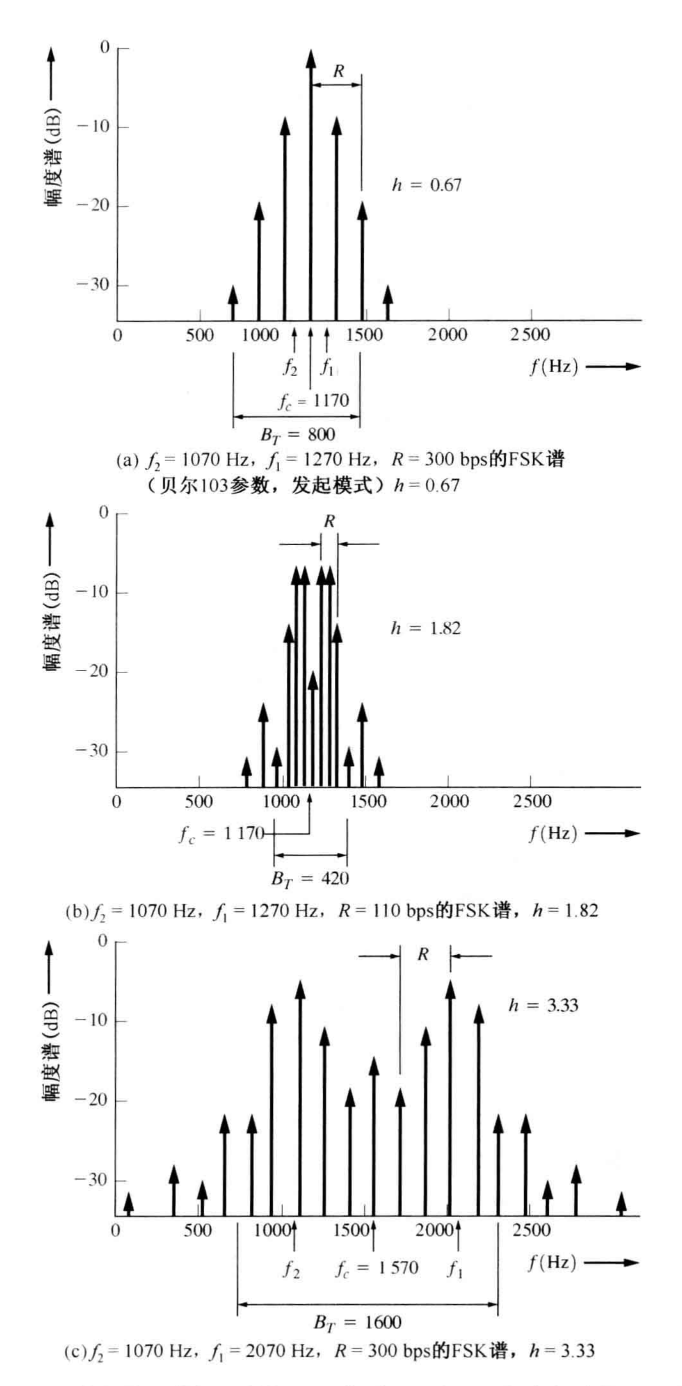


图 5.26 交替变化的数据调制的 FSK 频谱(只给出正频率部分单边幅度值)

对随机数据调制，连续相位 FSK 信号的精确的 PSD 难以计算。但是，也可采用一些高级的统计技术[Anderson and Salz, 1965; Bennett and Rice, 1963; Proakis, 1995, pp. 209-215]。FSK 信号复包络最终的 PSD 是①

① 假设 $h \neq 0, 1, 2, 3\cdots$，当 $h = 0, 1, 2, \cdots$时，谱中也存在离散项(δ 函数)。

$$\mathcal{P}_g(f) = \frac{A_c^2 T_b}{2} \times (A_1^2(f)[1 + B_{11}(f)] + A_2^2(f)[1 + B_{22}(f)] + 2B_{12}(f)A_1(f)A_2(f)) \tag{5.90a}$$

其中，

$$A_n(f) = \frac{\sin[\pi T_b(f - \Delta F(2n - 3))]}{\pi T_b(f - \Delta F(2n - 3))} \tag{5.90b}$$

并且

$$B_{nm}(f) = \frac{\cos[2\pi f T_b - 2\pi \Delta F T_b(n + m - 3)] - \cos(2\pi \Delta F T_b)\cos[2\pi \Delta F T_b(n + m - 3)]}{1 + \cos^2(2\pi \Delta F T_b) - 2\cos(2\pi \Delta F T_b)\cos(2\pi f T_b)} \tag{5.90c}$$

其中，ΔF 是峰值频率偏移，$R = 1/T_b$是比特率，数字调制指数为 $h = 2\Delta F/R$。图 5.27 中画出了几个不同的数字调制指数值的 PSD。该图中的曲线是利用 MATLAB 计算得到的。$h = 0.7 \approx 0.67$ 的曲线对应于例题 5.9 中的 300 bps 贝尔 103 FSK 调制解调器的 $g(t)$ 的 PSD。

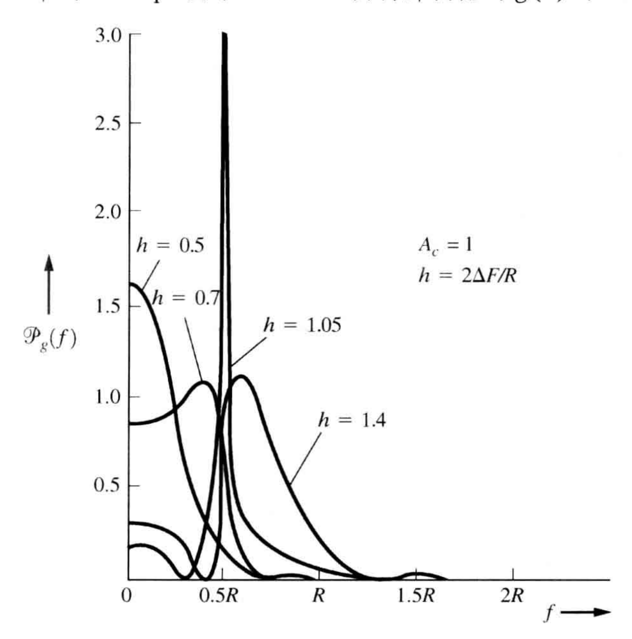


图 5.27　FSK 的复包络的 PSD(给出了正频率部分)(参见 M 文件 Example5_10.m)

例题 5.10　FSK 信号的 PSD

应用式(5.90)，计算并画出采用随机数据调制，并且 $A_c = 1$，$R = 1$ 以及 $h = 0.7$ 时的 FSK 信号的复包络的 PSD。计算过程和结果见 M 文件 Example5_10.m。将结果与图 5.27 进行比较。

如图 5.28 所示，FSK 信号既可用频率(非相干)检测器也可用两个乘法检测器(相干检波)进行检测。7.3 节和 7.4 节给出了对相干检测和非相干检测的详细分析并计算了 BER。当 FSK 信号被 AWGN 干扰后，要获得最低 BER，就应采用带有匹配滤波和门限设备(比较器)的相干检测器(见图 7.8)。

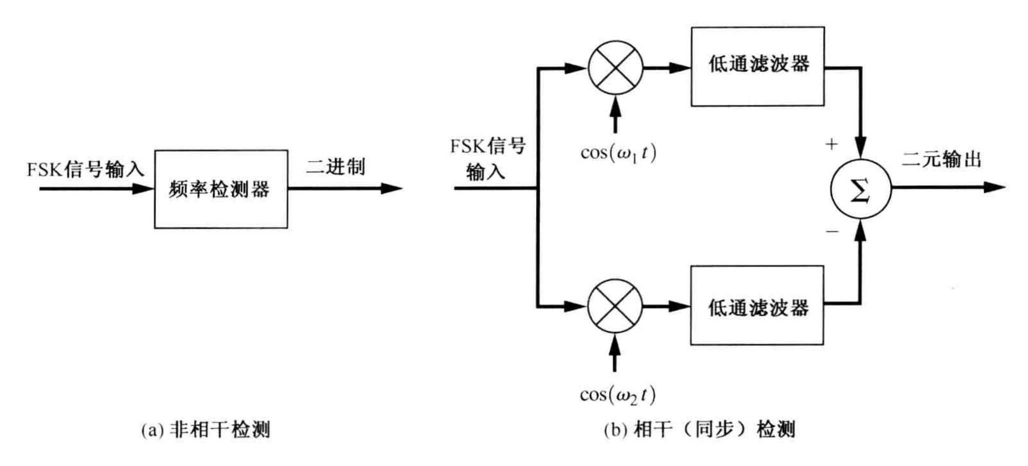


图 5.28 FSK 信号的检测

5.10 多电平已调带通信号

对于多电平信号，发射机输入端允许有两个电平以上的数字信号输入。图5.29 给出了如何用数模转换器(DAC)从串行二进制输入数据流生成多电平信号的技术。例如，假设采用 $\ell=2$ 比特的数模转换器。对矩形脉冲，多电平信号的电平数为 $M=2^\ell=2^2=4$，如图 3.14(a)所示。多电平信号的符号速率(波特)为 $D=R/\ell=\frac{1}{2}R$，其比特率为 $R=1/T_b$ bps。

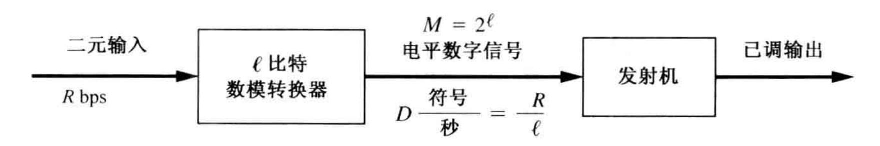


图 5.29 多电平数字传输系统

5.10.1 正交相移键控(QPSK)和 *M* 元相移键控(MPSK)

若发射机是具有 $M=4$ 电平的数字调制信号 PM 发射机，那么在其输出端产生 M 元的相移键控(MPSK)信号。假设是矩形数据脉冲，那么所允许的复包络 $g(t)=A_c e^{j\theta(t)}$ 的值将包含四个点，对四个多电平值中的每一个的 g 值(一般是复数)，对应于 θ 的四个可能相位。两种可能的 $g(t)$ 的集合示于图 5.30。例如，假设数模转换器所允许的多电平值为 −3 V、−1 V、+1 V 和 +3 V，则在图 5.30(a)中，这些多电平值可分别对应于 PSK 的相位 0°、90°、180°和 270°。在图 5.30(b)中，那些电平值将分别对应于载波相位 45°、135°、225°和 315°。除了在载波相位参考上有一个相移以外，这两个信号星座图在本质上是相同的。① 这种 $M=4$ 的 M 元的 PSK 称为正交相移键控调制。

MPSK 也可用复包络中的 x 和 y 分量分别调制的两个正交载波而产生(取代使用的相位调制器)。在这种情形下，

$$g(t)=A_c e^{j\theta(t)}=x(t)+jy(t) \tag{5.91}$$

① 星座图是指对应于可能的数字信号的信号矢量所绘成的 N 维图(见 3.4 节)。

其中 x 和 y 的值分别为

$$x_i = A_c \cos\theta_i \tag{5.92}$$

和

$$y_i = A_c \sin\theta_i \tag{5.93}$$

对应 MPSK 信号所允许的相位值 θ_i，$i=1, 2, \cdots, M$。这种情形由图 5.31 给出，其中信号处理电路完成了式(5.92)和式(5.93)的作用。图 5.30 给出了两种 QPSK 信号星座图所允许的相角 θ_i 和(x_i, y_i)分量间的关系。这与图 4.28 所示的生成已调信号的正交法相同。

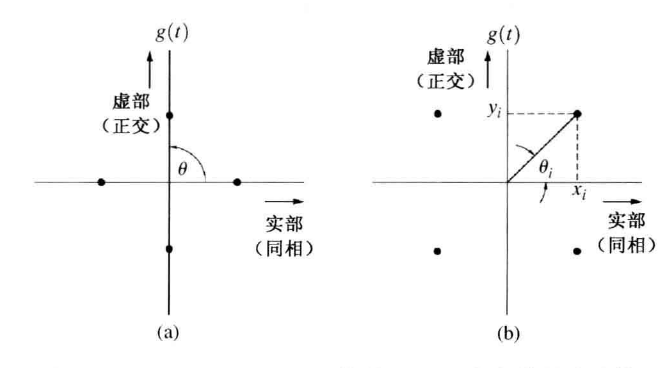


图 5.30　QPSK 和 π/4 QPSK 信号星座图(复包络的允许值)

(a) 生成一般信号星座图的调制器

(b) 生成矩形信号星座图的调制器

图 5.31　QAM 信号的产生

对矩形数据脉冲，QPSK 信号的包络为常数。也就是说，信号没有进行幅度调制，甚至于在存在 180°相移的数据传输期间，因为数据值的转换(如从 +1 到 -1)是瞬时的。矩形数据在 QPSK 信号上产生$(\sin x/x)^2$型的功率谱，该谱具有较大的非理想旁瓣(见图 5.33)。如果数据脉冲经过对应于升余弦滚降滤波器的脉冲波形后，那么非理性旁瓣可以消除。遗憾的是，这会在输出的 QPSK 信号上产生 AM 效应，因为出现 180°相位转移时，滤波后的数据波形不能从一个峰值瞬时转移到另一个峰值。尽管滤波解决了频谱具有较差的旁瓣的问题，但是它产生了另一个问题：QPSK 信号上的 AM。由于 AM 效应，如果要无失真放大 QPSK 信号，应采用低效率的线性(A 类或 B 类)放大器，而不是高效率的非线性(C 类)放大器。在便携通信系统中，这些放大器对电池容量的要求至少提高了 50%。对该问题的可能解决方法是采用偏移 QPSK(OQPSK)或 $\pi/4$ QPSK，这两种方法只有轻微的 AM 效应(OQPSK 和 $\pi/4$ QPSK 将在下一节讨论)。

5.10.2 正交幅度调制(QAM)

如图 5.31 所示，正交载波信号被称为正交幅度调制(QAM)。总的来说，QAM 的信号星座图不局限于只在一个圆周上(半径为 A_c，例如 MPSK 的情形)有允许信号点。一般的 QAM 信号为

$$s(t) = x(t)\cos\omega_c t - y(t)\sin\omega_c t \tag{5.94}$$

其中，

$$g(t) = x(t) + \mathrm{j}y(t) = R(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta(t)} \tag{5.95}$$

例如，图 5.32 给出了一个流行的包含 16 个符号($M=16$)的 QAM 星座图，对于 16 个允许信号中的每一个，其(R_i,θ_i)和(x_i,y_i)之间的关系可以很容易地通过计算得到。这种类型的调制用于2400 bps V.22 bis 的计算机调制解调器中。这里，x_i 和 y_i 在每一维上均可有 4 个电平值。如图 5.31(b)所示，采用 2($\ell/2=2$)比特数模转换器和正交平衡调制器就可生成 16 符号的 QAM 信号。

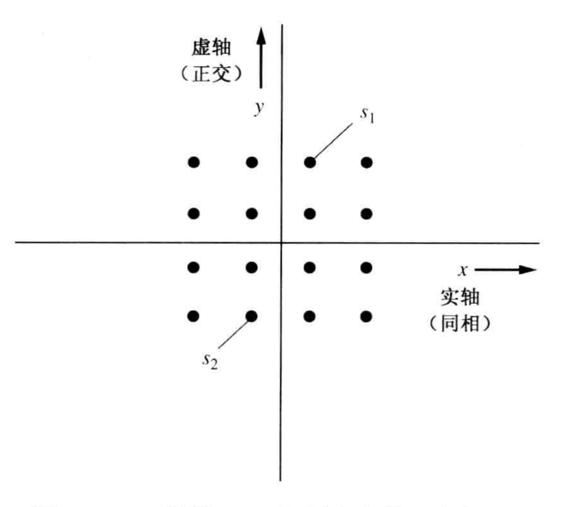


图 5.32 16 符号 QAM 星座图(每维 4 个电平)

例题 5.11 QAM 信号

应用式(5.94)，计算并画出 QAM 信号。令 $x(t)$ 为四电平梯级信号，其阶梯为 -3，-1，1 和 3，并且阶梯的宽度为 1 s。令 $y(t)$ 为四电平梯级信号并且具有相同的阶梯，但是其阶梯的宽度为 4 s。画出 QAM 信号的星座图。画出在时间间隔 $0<t<16$ s 上的 $x(t)$、$y(t)$ 和 QAM 信号。计算过程和结果见 M 文件 Example5_11.m。

波形的同相分量和正交分量表示为

$$x(t) = \sum_n x_n h_1\left(t - \frac{n}{D}\right) \tag{5.96}$$

以及

$$y(t) = \sum_n y_n h_1\left(t - \frac{n}{D}\right) \tag{5.97}$$

其中 $D = R/\ell$，(x_n, y_n) 代表中心在 $t = nT_s = n/D$ 秒的符号时间内所允许的某一个 (x_i, y_i) 值（发送每一个符号需 T_s 秒）。$h_1(t)$ 是代表每个符号的脉冲波形。如果不限制 QAM 信号的带宽，脉冲波形将为 T_s 秒宽的矩形。表 5.6 和表 5.7 给出了一些 QAM 调制解调器标准的例子。这些调制解调器提供从个人计算机到 ISP（互联网业务提供商）的连接。

表 5.6　V.32 调制解调器标准

	项　目	信号星座
数据	串行数据，异步或同步，在双金属线上全双工	选择 2∶32QAM 或 QPSK
载波频率	发射[a]：1800 Hz 接收[a]：1800 Hz	
选择 1		
数据率	对于高信噪比 9600 bps 对于低信噪比 4800 bps	
调制	32QAM，2400 波特，对于高信噪比使用每个符号 4 个数据比特加 1 个编码比特的网格编码调制（见图 1.9，其中 $n=3$ 并且 $m-k=2$） QPSK，2400 波特（状态 A，B，C，D），对于低信噪比	
选择 2		选择 2：16QAM 或 QPSK
数据速率	对于高信噪比 9600 bps 对于低信噪比 4800 bps	
调制	16QAM，2400 波特，对于高信噪比 QPSK，2400 波特（状态 A，B，C，D），对于低信噪比	

[a] 该调制解调器使用双线到四线的转换以得到发射和接收线。

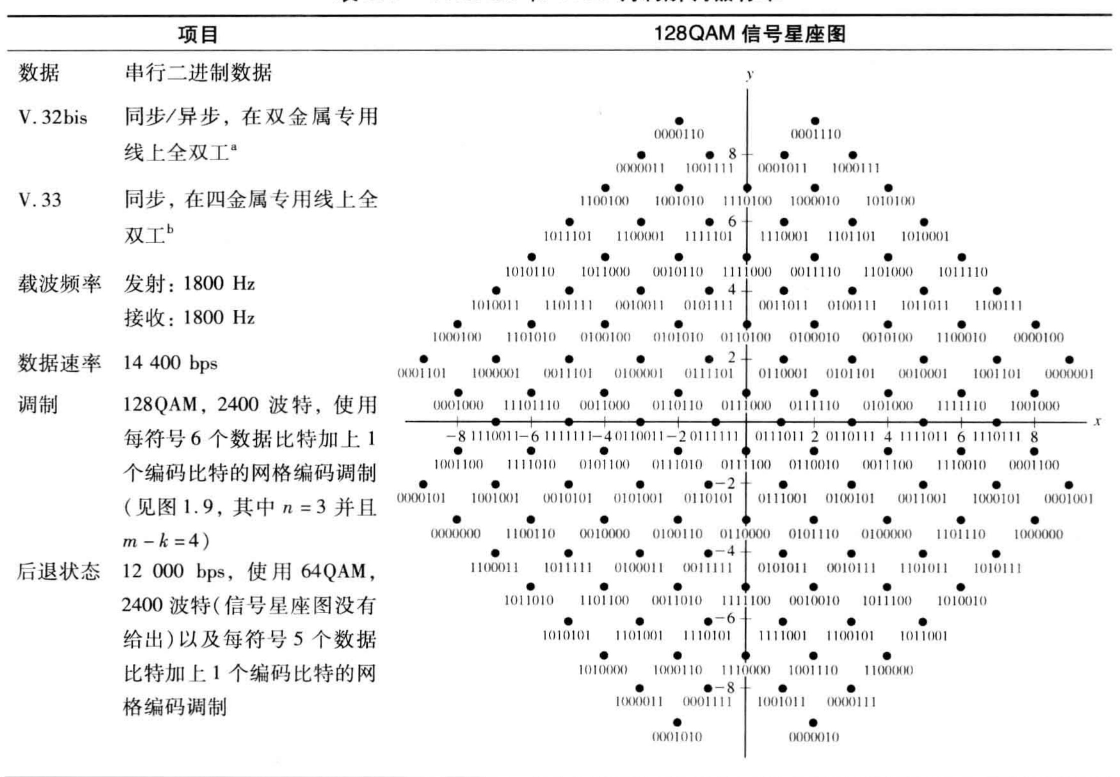
在一些应用中，$x(t)$ 和 $y(t)$ 分量之间的定时有 $T_s/2 = 1/(2D)$ 秒的偏移，即 $x(t)$ 由式(5.96)给出，而偏移为

$$y(t) = \sum_n y_n h_1\left(t - \frac{n}{D} - \frac{1}{2D}\right) \tag{5.98}$$

一种常见的偏置信号是偏移 QPSK（OQPSK），它与 $M=4$ 时的偏移 QAM 相同。当 $h_1(t)$ 具有正弦类的脉冲波形时是 QPSK 的一个特例，称之为最小频移键控（MSK）。这种调制将在下面的小

节中讨论。若 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分量具有不等功率或不等数据速率(或两者都不等)，则 QPSK 信号被称为是不平衡的。

表 5.7 V.32 bis 和 V.33 调制解调器标准

项目		128QAM 信号星座图
数据	串行二进制数据	
V.32bis	同步/异步，在双金属专用线上全双工[a]	
V.33	同步，在四金属专用线上全双工[b]	
载波频率	发射：1800 Hz 接收：1800 Hz	
数据速率	14 400 bps	
调制	128QAM，2400 波特，使用每符号 6 个数据比特加上 1 个编码比特的网格编码调制(见图 1.9，其中 $n=3$ 并且 $m-k=4$)	
后退状态	12 000 bps，使用 64QAM，2400 波特(信号星座图没有给出)以及每符号 5 个数据比特加上 1 个编码比特的网格编码调制	

[a] V.32bis 调制解调器使用双线和一个内置的双线到四线混合以获得发射和接收线。

[b] V.33 使用双线来发射，并使用双线来接收。

5.10.3 OQPSK 和 π/4QPSK

偏移正交相移键控(OQPSK)是 $M=4$ 的 PSK 调制，其 I(同相)分量和 Q(正交)分量的数据传输时间有 $\frac{1}{2}$ 个符号间隔的偏移(即 1 比特)。式(5.96)和式(5.98)描述了这种技术，其偏移为 $1/(2D)$。因为与 QPSK 信号上的 AM 相比，该偏移极大地减少了 OQPSK 信号上的 AM 分量，所以当采用非矩形(滤波后的)数据脉冲时，该偏移就保证了这一优点。由于数据是偏移的，所以 I 和 Q 信号不能同时改变，因此 QPSK 调制的最大相位转移仅有 90°(QPSK 为 180°)，从而减少了 AM 分量。

π/4 正交相移键控是由相对于对方有 $\pi/4=45°$ 角旋转的两个 QPSK 星座图交替出现而产生的。如图 5.30 所示，这两个 QPSK 星座图是这样交替使用的：若给定的一个对应于 2 比特输入数据的点在某一个星座图上，那么新读入的 2 比特数据从另外一个星座图上确定下一个点，即这两个新输入的比特根据其值产生 ±45°或 ±135°的相移。例如，11 对应 $\Delta\theta=45°$ 的相移，10 对应 $\Delta\theta=-45°$ 的相移，01 对应 $\Delta\theta=135°$，00 对应 $\Delta\theta=-135°$。因为采用了差分编码形式，所以被称为 π/4 差分正交相移键控(π/4 DQPSK)。

在接收端，π/4QPSK 数据可容易地由 FM 检波器及后面级联一个在一个符号周期(2 比特)上积分的可重置的积分器来检测。FM 检波器产生相位导数，积分器计算在符号区间上出现的相移，结果是 ±45°和 ±35°这 4 个可能的相移中的一个。例如，如果积分器输出端检测到的相移是 −45°，对应检测到的数据就是 10。采用基带 IQ 处理或中频(IF)差分检测，都可检测到 π/4 QPSK上的数据[Rappaport,2002]。计算机仿真表明，上述三种结构的接收机具有几乎相同的 BER 性能[Anvari 和 Woo，1991]。在 AWGN 信道中，三种差分(非相干)检波器的 BER 性能大约比 QPSK 的 BER 性能低 3 dB，但是 π/4 QPSK 的相干检测与 QPSK 具有相同的 BER(如图 7.14所示)。对于非矩形数据脉冲，由于与 QPSK 方式的 180°的最大相移相比，π/4 QPSK的最大相移是 135°，因此 π/4 QPSK 上的 AM 分量要小于 QPSK 上的 AM 分量。OQPSK 上的 AM 分量更小，因为它的最大相移是 90°。然而，π/4 QPSK 易于检测，并且已经被 TDMA 蜂窝电话系统所采用(见第 8 章)。

这些信号的功率谱将在下一节讨论。

5.10.4 MPSK、QAM、QPSK、OQPSK 和 π/4 QPSK 的 PSD

对于比特是矩形形状的信号，其 MPSK 和 QAM 信号的 PSD 相对容易计算。在这种情况下，采用适当的频率尺度，其 PSD 与我们求得的 BPSK 信号的谱的形状相同。

应用式(6.70d)得到 MPSK 或 QAM 信号的复包络 $g(t)$ 的 PSD。已知

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n f(t - nT_s) \tag{5.99}$$

其中，c_n是代表第 n 个符号脉冲间隔内的多电平值的复数随机变量。$f(t) = \Pi(t/T_s)$是宽为 T_s的矩形信号脉冲，$D = 1/T_s$ 是符号(或波特)率。矩形脉冲傅里叶变换为

$$F(f) = T_s\left(\frac{\sin \pi f T_s}{\pi f T_s}\right) = \ell T_b\left(\frac{\sin \ell \pi f T_b}{\ell \pi f T_b}\right) \tag{5.100}$$

其中，$T_s = \ell T_b$，即有 l 个比特表示每个允许的多电平值。对于对称(双极性型)信号——例如，图 5.32 所示的 $M = 16$——每个电平值等概率出现，c_n 的均值为

$$m_c = \overline{c_n} = 0 \tag{5.101a}$$

并且方差为

$$\sigma_c^2 = \overline{c_n c_n^*} = \overline{|c_n|^2} = C \tag{5.101b}$$

其中，C 是正的实常数。将式(5.100)和式(5.101)代入式(6.70d)，得到采用方波比特形状的数据调制的 MPSK 和 QAM 信号复包络的 PSD 为

$$\mathcal{P}_g(f) = K\left(\frac{\sin \pi f \ell T_b}{\pi f \ell T_b}\right)^2, \text{对于MPSK和QAM} \tag{5.102}$$

其中，$K = C\ell T_b$，$M = 2^\ell$是星座图中的点个数，比特率为 $R = 1/T_b$。当全部传输功率为 P W 时，因为 $\int_{-\infty}^{\infty} P_s(f)\,df = P$，所以 K 值为 $K = 2P\ell T_b$。图 5.33 中画出了复包络的 PSD。如式(5.2b)所描述的那样，将图 5.33 中的 PSD 搬移到载波频率上，就可得到 MPSK 和 QAM 信号的 PSD。当 $\ell = 1$ 时，图中的曲线是 BPSK 的 PSD[将 $\ell = 1$ 时的图 5.33 与图 5.20(b)进行比较]。同时还应注意，式(5.102)描述的带通多电平信号的复包络的 PSD 与从式(3.53)得到的基带多电平信号的 PSD 在本质上是相同的。

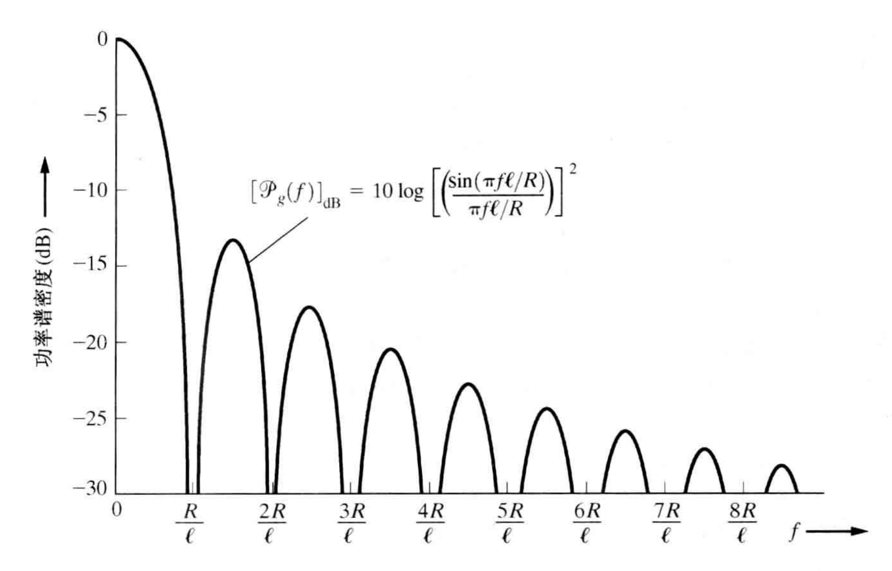


图5.33　采用矩形数据脉冲的MPSK和QAM的复包络的PSD，其中$M=2^\ell$，R是比特率，$R/\ell=D$是波特率(给出了正频率部分)。对QPSK、OQPSK和π/4 QPSK的复包络的PSD采用$\ell=2$(参见M文件Example5_12.m)

例题5.12　MPSK和QAM信号的PSD

应用式(5.102)，画出采用矩形数据脉冲的MPSK和QAM的PSD(如图5.33所示)。计算过程和结果见M文件Example5_12.m。

式(5.102)和图5.33还画出了$\ell=2(M=4)$时的矩形数据脉冲所对应的QPSK、QOPSK和π/4 QPSK的PSD。对于非矩形脉冲数据调制，依据式(5.102)的推导步骤，用合适的脉冲转移函数代替式(5.100)，也可推得其PSD的表达式。例如，对于升余弦滚降滤波，其中$f_0=1/(2\ell T_b)$，图5.33的PSD变为$P_g(f)=20\log[\,|H_e(f)|\,]$，其中$H_e(f)$是式(3.69)和图3.26(a)所示的升余弦转移函数。

由图5.33，我们得到当使用矩形数据脉冲时，MPSK和QAM的零点-零点传输带宽为

$$B_T = 2R/\ell \tag{5.103}$$

将式(5.103)代入式(3.55)，得到使用矩形数据脉冲的MPSK和QAM的频谱效率为

$$\eta = \frac{R}{B_T} = \frac{\ell}{2}\,\frac{\text{bps}}{\text{Hz}} \tag{5.104}$$

其中，$M=2^\ell$是信号星座图中点的个数。对于$M=16$的QAM信号，其频谱效率为$\eta=2$ bps每赫兹带宽。

5.10.5　采用升余弦滤波的MPSK、QAM、QPSK、OQPSK和π/4QPSK信号的频谱效率

图5.33给出了对应矩形脉冲符号时的频谱，其频谱的旁瓣非常糟糕。第一个旁瓣仅衰减了13.4 dB。若采用升余弦滤波可消除旁瓣(因为升余弦滤波器具有绝对带限的频率响应)。参考3.6节，我们选择升余弦滤波器的6 dB带宽为符号(波特)率的一半，以消除码间串扰(ISI)，即$f_0=\frac{1}{2}(R/\ell)$。升余弦滤波器的缺点是给MPSK信号引入了AM分量(并且修改了QAM信号上

的 AM)。在实际系统中，为了在接收的滤波脉冲上避免码间串扰，并且使得由信道噪声引起的比特错误最小化，通常在发射机中采用具有平方根升余弦(SRRC)频率响应的滤波器，同时在接收机也采用另一个 SRRC 滤波器。但是 SRRC 滤波器也给传输信号带来了 AM 分量。若总的脉冲波形满足升余弦滚降滤波器特性，则利用式(3.74)，M 电平调制信号的绝对带宽为

$$B = \frac{1}{2}(1 + r)D \tag{5.105}$$

其中，$D = R/\ell$，r 是滤波器特性的滚降因子。而且，从我们对 AM(以及 DSB-SC)的研究来看，可知传输带宽与调制带宽的关系是 $B_T = 2B$，因此升余弦滤波后脉冲波形的 QAM 信号的绝对传输带宽为

$$B_T = \left(\frac{1 + r}{\ell}\right)R \tag{5.106}$$

与之形成对比的是具有矩形脉冲波形的 QAM 的绝对带宽为无穷大(和 $B_T = 2R/\ell$ 的零点带宽)，如图 5.33 所示。

因为 $M = 2^\ell$，这意味着 $\ell = \log_2 M = (\ln M)/(\ln 2)$，经升余弦滤波的 QAM 型信号的频谱效率为

$$\eta = \frac{R}{B_T} = \frac{\ln M}{(1 + r)\ln 2}\frac{\text{bp/s}}{\text{Hz}} \tag{5.107}$$

这个结论很重要，因为它告诉我们对于给定的带宽采用的最大信号速率。由于 MPSK 是 QAM 的特例，因此该结论也适用于 MPSK。式(5.107)可用于生成表 5.8，该表描述了 QAM 调制允许的每赫兹传输带宽的比特率。例如，假设要在带宽为 2.4 MHz 的通信卫星上传输信号。若采用 50% 滚降系数的 BPSK($M = 2$)，则可以 $B_T \times \eta = 2.4 \times 0.677 = 1.6$ bps 的速率传输信号。但是若采用 25% 滚降系数的 QPSK($M = 4$)，则可以 $2.4 \times 1.6 = 3.84$ Mbps 的速率传输信号。

表 5.8　采用升余弦滚降脉冲成形的 QAM 信号的频谱效率
(对QPSK、OQPSK和π/4 QPSK信号采用 $M = 4$)

电平数 M(符号)	DAC 的大小 ℓ(比特)	$\eta = \frac{R}{B_T}\left(\frac{\text{bps}}{\text{Hz}}\right)$					
		$r = 0.0$	$r = 0.1$	$r = 0.25$	$r = 0.5$	$r = 0.75$	$r = 1.0$
2	1	1.00	0.909	0.800	0.667	0.571	0.500
4	2	2.00	1.82	1.60	1.33	1.14	1.00
8	3	3.00	2.73	2.40	2.00	1.71	1.50
16	4	4.00	3.64	3.20	2.67	2.29	2.00
32	5	5.00	4.55	4.00	3.33	2.86	2.50

为了保持带宽,式(5.107)的电平数 M 不能增加太多。因为如果 M 增加太多,对给定的峰值包络功率(PEP),信号星座图上信号点间的距离将缩小,接收信号中的噪声将产生错误(噪声将接收信号向量搬移到对应于一个不同信号电平的新的位置上)。然而,我们知道若要保持较低的错误概率,R 一定要小于信道容量 C(见 1.9 节)。于是,应用式(1.10),我们要求

$$\eta < \eta_{\max} \tag{5.108a}$$

其中，

$$\eta_{\max} = \log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right) \tag{5.108b}$$

5.11 最小频移键控(MSK)和 GMSK

最小频移键控是开发的另外一种带限技术。其优点是产生恒定幅度的信号，因而可用 C 类放大器无失真放大。我们将会看到，MSK 等效于采用正弦脉冲成形的 OQPSK[对于 $h_i(t)$]。

定义 最小频移键控(MSK)是生成正交信号的、具有最小调制指数($h=0.5$)的连续相位 FSK。

首先，我们证明 $h=0.5$ 是正交连续相位 FSK 所允许的最小调制指数。对在比特间隔 $0<t<T_b$ 上传输的二元码“1”，FSK 信号为 $s_1(t)=A_c\cos(\omega_1 t+\theta_1)$，而传输“0”时，FSK 信号为 $s_2(t)=A_c\cos(\omega_2 t+\theta_2)$，其中为了在切换时刻 $t=0$ 保持连续相位，$\theta_1=\theta_2$。对于正交信号，要求在比特间隔上两信号乘积的积分应为0。于是，我们要求

$$\int_0^{T_b} s_1(t)s_2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{T_b} A_c^2\cos(\omega_1 t+\theta_1)\cos(\omega_2 t+\theta_2)\mathrm{d}t = 0 \tag{5.109a}$$

这简化为要求

$$\frac{A_c^2}{2}\left[\frac{\sin[(\omega_1-\omega_2)T_b+(\theta_1-\theta_2)]-\sin(\theta_1-\theta_2)}{\omega_1-\omega_2}\right] + \frac{A_c^2}{2}\left[\frac{\sin[(\omega_1+\omega_2)T_b+(\theta_1+\theta_2)]-\sin(\theta_1+\theta_2)}{\omega_1+\omega_2}\right]=0 \tag{5.109b}$$

由于 $\omega_1+\omega_2$ 较大①，所以上式中第2项可忽略，于是该要求变为

$$\frac{\sin[2\pi h+(\theta_1-\theta_2)]-\sin(\theta_1-\theta_2)}{2\pi h}=0 \tag{5.110}$$

其中，$(\omega_1-\omega_2)T_b=2\pi(2\Delta F)T_b$，并且由式(5.82)，$h=2\Delta FT_b$。对于连续相位 FSK，$\theta_1=\theta_2$，且式(5.110)满足 $h=0.5$ 的最小值，或峰值频率偏移

$$\Delta F=\frac{1}{4T_b}=\frac{1}{4}R,\quad \text{对于MSK} \tag{5.111a}$$

对不连续相位 FSK，$\theta_1\neq\theta_2$；满足正交性的最小值是 $h=1.0$ 或者

$$\Delta F=\frac{1}{2T_b}=\frac{1}{2}R,\quad \text{对于不连续相位 FSK} \tag{5.111b}$$

我们现在将说明 MSK 信号(它是 $h=0.5$ 的连续相位 FSK 信号)是采用正弦脉冲成形的 OQPSK。首先，考虑信号间隔$(0, T_b)$上的 FSK 信号。利用式(5.81)，复包络为

$$g(t)=A_c e^{\mathrm{j}\theta(t)}=A_c e^{\mathrm{j}2\pi\Delta F\int_0^t m(\lambda)\mathrm{d}\lambda}$$

其中，$m(t)=\pm1$，$0<t<T_b$。应用式(5.111)，得到复包络变为

$$g(t)=A_c e^{\pm\mathrm{j}\pi t/(2T_b)}=x(t)+\mathrm{j}y(t),\quad 0<t<T_b$$

其中，符号 ± 代表$(0, T_b)$时间间隔中的可能数据。于是，

---

① 若 $\omega_1+\omega_2$ 没有足够大以使得第2项可忽略，选择 $f_c=\frac{1}{2}m/T_b=\frac{1}{2}mR$，其中 m 是正整数。这将使得第二项为0($f_1=f_c-\Delta F$, $f_2=f_c+\Delta F$)。

$$x(t) = A_c \cos\left(\pm 1 \frac{\pi t}{2T_b}\right), \quad 0 < t < T_b \tag{5.112a}$$

$$y(t) = A_c \sin\left(\pm 1 \frac{\pi t}{2T_b}\right), \quad 0 < t < T_b \tag{5.112b}$$

而 MSK 信号为

$$s(t) = x(t)\cos \omega_c t - y(t)\sin \omega_c t \tag{5.112c}$$

图 5.34 给出了一个典型的输入数据波形 $m(t)$ 及最终的正交调制波形 $x(t)$ 和 $y(t)$。由式(5.112a)和式(5.112b)，并且注意到 $\cos[\pm\pi t/(2T_b)] = \cos[\pi t/(2(T_b)]$ 和 $\sin[\pm\pi t/(2T_b)] = \pm\sin[\pi t/(2(T_b)]$，我们看到在信号间隔 $(0, 2T_b)$ 上，时间间隔 $(0, T_b)$ 中 $m(t)$ 的符号 ±1 只影响 $y(t)$，而不影响 $x(t)$。同时也注意到 $y(t)$ 的脉冲 $\sin[\pi t/(2T_b)]$ 是 $2T_b$ 秒宽。同样，在时间间隔 $(T_b, 3T_b)$ 上，$m(t)$ 在 $(T_b, 2T_b)$ 上的 ± 符号只影响 $x(t)$，不影响 $y(t)$。换言之，$m(t)$ 的二进制数据交替调制 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分量。$x(t)$ 和 $y(t)$ 符号的脉冲形状（宽度为 $2T_b$ 而非 T_b）是正弦形状，如图中所示。因此，MSK 等价于用正弦脉冲成形的 OQPSK 调制。

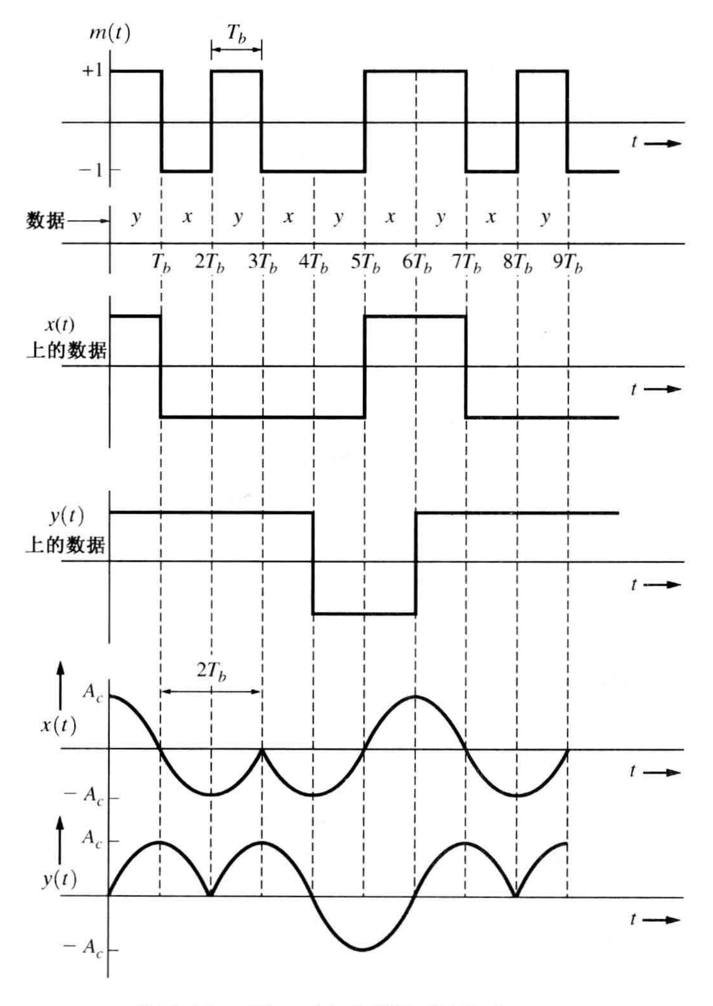


图 5.34　MSK 正交分量波形（Ⅱ型 MSK）

如图 5.34 所示，$x(t)$ 和 $y(t)$ 的波形阐明了所谓的Ⅱ型 MSK 的含义[Bhargava，Haccoun，Matyas 和 Nuspl，1981]，其基本脉冲波形总是正的半个余弦波。而Ⅰ型 MSK 的脉冲波形[对 $x(t)$ 和 $y(t)$]是交替出现的半个正负余弦波形。对于Ⅰ型和Ⅱ型 MSK，可以证明输入数据 $m(t)$ 和最终的 MSK 信号的传号频率 f_1 和空号频率 f_2 间没有一一对应关系。计算作为不同比特时间间隔上的 $m(t)$ 所代表的数据的函数的瞬时频率 f_i 就可以证明这一点。瞬时频率为 $f_i = f_c + (1/2\pi)[d\theta(t)/dt] = f_c + \Delta F$，其中 $\theta(t) = \arctan[y(t)/x(t)]$。± 号可由 $m(t)$ 上的数据符号决定，也可由用于得到每个比特间隔 T_b 上的 $x(t)$ 和 $y(t)$ 波形的编码技术(Ⅰ型或Ⅱ型)决定。要获得Ⅰ类 MSK 信号和称为快速频移键控(FFSK)信号的 $h = 0.5$ 的 FSK 信号间的一一对应频率关系，输入Ⅰ型 FSK 调制器的数据应首先差分编码。习题 5.80、习题 5.81 及习题 5.82 的 MATLAB 解给出了Ⅰ型和Ⅱ型 MSK 及 FFSK 波形的例子。不考虑已知的不同之处，FFSK、Ⅰ类 MSK 及Ⅱ类 MSK 均是恒定幅度、连续相位的 FSK 信号，其数字调制指数为 $h = 0.5$。

例题 5.13 Ⅱ型 MSK 信号

假定数据由图 5.34(a)给出。对Ⅱ型 MSK 信号，计算并画出 I 路和 Q 路已调信号波形及Ⅱ型 MSK 信号 $s(t)$。计算过程和结果见 M 文件 Example5_13.m。

MSK(Ⅰ型和Ⅱ型)的 PSD 可按如下方法计算：因为 $x(t)$ 和 $y(t)$ 具有相互独立的数据且其直流分量为 0，并且因为 $g(t) = x(t) + jy(t)$，所以其复包络的 PSD 为

$$\mathcal{P}_g(f) = \mathcal{P}_x(f) + \mathcal{P}_y(f) = 2\mathcal{P}_x(f)$$

其中，$\mathcal{P}_x(f) = \mathcal{P}_y(f)$①，这是因为 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的脉冲形状相同。当将式(3.40)代入式(3.36a)且脉宽为 $2T_b$ 时，该 PSD 变为

$$\mathcal{P}_g(f) = \frac{2}{2T_b}|F(f)|^2 \tag{5.113}$$

其中，$F(f) = \mathcal{F}[f(t)]$，而 $f(t)$ 是脉冲波形。对于半余弦脉冲的 MSK，得到：

$$f(t) = \begin{cases} A_c\cos\left(\dfrac{\pi t}{2T_b}\right), & |t| < T_b \\ 0, & \text{否则} \end{cases} \tag{5.114a}$$

并且傅里叶变换为

$$F(f) = \frac{4A_cT_b\cos 2\pi T_b f}{\pi[1-(4T_bf)^2]} \tag{5.114b}$$

于是，MSK 信号的复包络的 PSD 为

$$\mathcal{P}_g(f) = \frac{16A_c^2T_b}{\pi^2}\left(\frac{\cos^2 2\pi T_b f}{[1-(4T_bf)^2]^2}\right) \tag{5.115}$$

其中，MSK 信号中的归一化功率为 $A_c^2/2$。如式(5.2b)描述的那样，将该频谱搬移至载波频率即可获得 MSK 信号的 PSD。MSK 复包络的 PSD 是图 5.35 中的实线。

例题 5.14 MSK 信号的 PSD

计算并画出 MSK 信号的 PSD。计算过程和结果见 M 文件 Example5_13.m。将该结果与图 5.35 中的结果进行比较。

① 这里原文为 $\mathcal{P}_x(x)$，似有误。——译者注

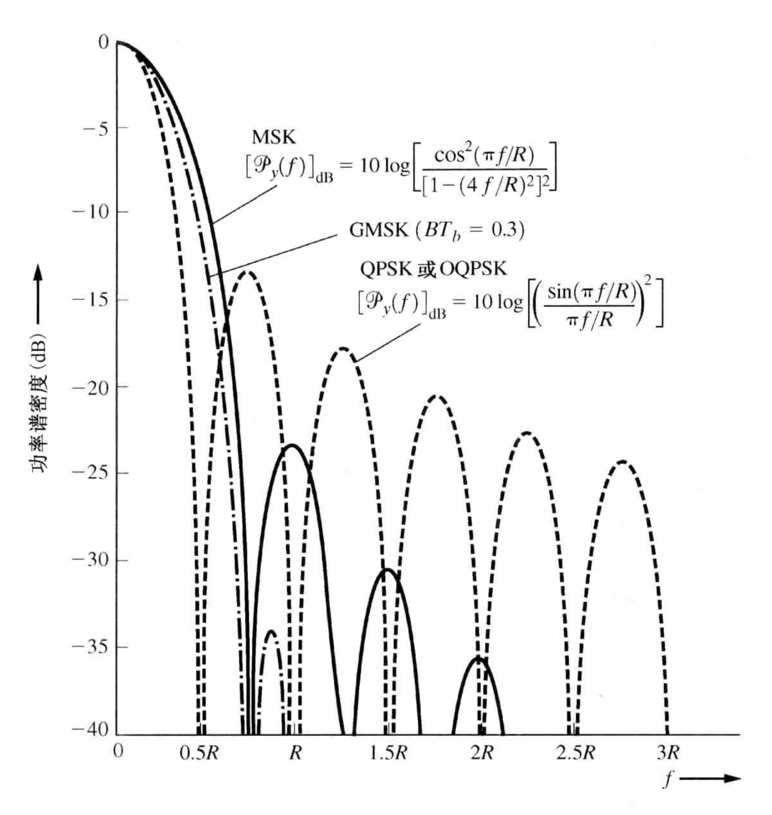


图 5.35　MSK、GMSK、QPSK 及 OQPSK 的复包络的 PSD，其中 R 是比特率（画出了正频率部分）

另一种 MSK 是高斯滤波 MSK(GMSK)。对 GMSK，数据(矩形脉冲)在调制到载波以前，先要经过一个频响特性具有高斯形状的滤波器。该高斯低通滤波器的传输函数为

$$H(f) = e^{-[(f/B)^2(\ln 2/2)]} \tag{5.116}$$

其中，B 是滤波器的 3 dB 带宽。该滤波器减小了发射的 MSK 信号的频谱旁瓣。GMSK 的 PSD 很难计算出来，但可以采用计算机仿真得到[Muroto,1981]。图 5.35 画出了 3 dB 带宽是比特率的 0.3 倍时 MSK 信号频谱(即 $BT_b = 0.3$)。BT_b 值更小时，谱旁瓣减小得更多，但是码间串扰(ISI)增加了。在蜂窝电话应用中，$BT_b = 0.3$ 在相对较低的旁瓣和低于噪底可容忍的 ISI 之间给出了一个很好的折中。$BT_b = 0.3$ 时 GMSK 频谱的旁瓣比 MSK、QPSK 和 OQPSK(矩形数据脉冲)的小。而且由于 GMSK 是 FM 型调制，因而具有常数包络。因此，GMSK 可以由高效率的 C 类放大器无失真放大。GMSK 和 MSK 既可进行相干检测，也可进行非相干检测(见 7.5 节)。如第 8 章中所讨论的那样，GSM 蜂窝电话系统采用的是 $BT_b = 0.3$ 的 GMSK 调制。

其他的数字调制技术，例如平滑调频(TFM)的频谱特性比 MSK 的要好[DeJager and Dekker,1978; Pettit,1982;Taub and Schilling,1986]，而且占用最小频谱的 FSK 型信号的最优脉冲波形也已找到[Campanella,LoFaso and Mamola,1984]。

MSK 信号可由图 5.36 所示的任何一种方法产生。图 5.36(a)给出了 FFSK 信号的产生(等价于对输入数据差分编码的 Ⅰ 型 MSK 信号)。这里采用了一个具有峰值偏移 $\Delta_F = 1/(4T_b) = (1/4)R$的简单 FM 型调制器。图 5.36(b)给出了一个 Ⅰ 型 MSK 调制器，它是对式(5.112)的实现。由于并行使用了同相(Ⅰ)和正交相位(Q)信道，这种产生 MSK 的方法又称为并行方法。图 5.36(c)给出了产生 MSK 的串行方法。在这种方法中，首先在载波频率 $f_2 = f_c - \Delta F$ 上产生

BPSK 信号，然后信号通过一个中心频率为$f_1=f_c+\Delta F$的带通滤波器产生载波频率为f_c的 MSK 信号。(该方法的正确性见习题5.83 的证明。)MSK 的更多的性质由 Leib 和 Pasupathy[1993]给出。

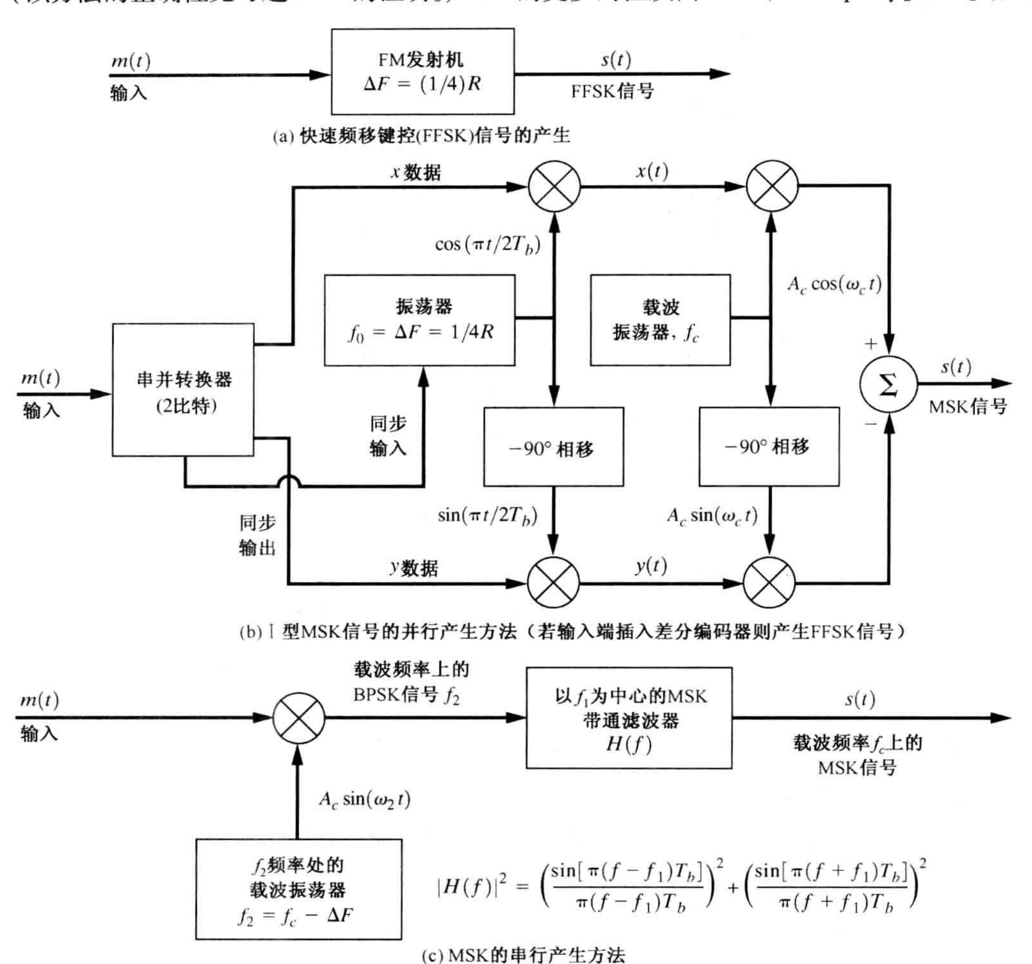


图 5.36　MSK 信号的产生

表5.9 中对5.9 节、5.10 节和5.11 节中的数字带通信号传输技术进行了总结。表中对采用矩形数据脉冲并且对两种不同的带宽准则——零点-零点带宽和30 dB 带宽，给出了不同类型的数字信号的频谱效率。η值越大，表明谱效率越高。当然，如表5.8 所示，若对矩形脉冲采用升弦滚降滤波将减少其带宽和增加η。高斯滤波可以替代之，但会带来码间串扰(ISI)。

表 5.9　数字信号的频谱效率

信号的类型	频谱效率，$\eta=\frac{R}{B_T}$	
	零点-零点带宽	30 dB 带宽
OOK 和 BPSK	0.500	0.052
QPSK，OQPSK，π/4QPSK	1.00	0.104
MSK	0.667	0.438
16QAM	2.00	0.208
64QAM	3.00	0.313

当设计通信系统时，除了考虑信号所占用的频谱外，还需要考虑代价和误码性能。第 7 章中将讨论误码性能这一话题。

5.12　正交频分复用(OFDM)

正交频分复用(OFDM)是一种采用大量已调载波并行传输数据的技术，这些载波间距要求足够大以使得载波间相互正交。如我们将看到的那样，OFDM 具有抗多径信道造成的数据错误的能力。

在 T 秒的时间间隔上，OFDM 信号的复包络为

$$g(t) = A_c \sum_{n=0}^{N-1} w_n \varphi_n(t), \quad 0 > t > T \tag{5.117a}$$

其中，A_c 是载波幅度，w_n 是 N 元并行数据向量 $\mathbf{w} = [w_0, w_1, \cdots, w_{N-1}]$ 的元素，正交载波为

$$\varphi_n(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_n t}, \qquad \text{其中 } f_n = \frac{1}{T}\left(n - \frac{N-1}{2}\right) \tag{5.117b}$$

每一载波上的数据符号的持续期为 T 秒，载波间相隔 $1/T$ Hz。这保证了载波的正交性，因为 $\varphi_n(t)$ 在 T 秒的时间间隔上满足式(2.77)的正交条件(如例题 2.12 所示)。因为载波是正交的，所以可以不受其他载波干扰而将间隔很近的载波上的数据检测出来。

OFDM 的一个重要优点是它的信号可以由 FFT 数字信号处理技术生成。例如，如果排除式(5.117b)中的频率偏移 $(N-1)/2T$，并且将式(5.117b)代入式(5.117a)，式中 $t = kT/N$，则可得到由式(2.117)定义的 IFFT 向量的元素。因此，OFDM 信号可由图 5.37 所示的 IFFT 算法产生。在该图中，同相分量$(I)\,x(t)$和正交分量$(Q)\,y(t)$确定复包络 $g(t)$，即 $g(t) = x(t) + \mathrm{j}y(t)$[这是图 4.28(b)的通用发射机的一个应用]。

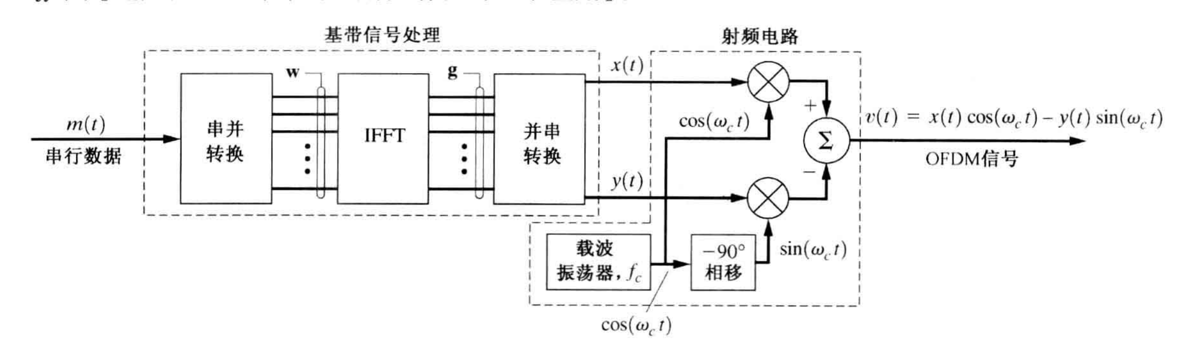


图 5.37　OFDM 发射机

参考图 5.37，令输入的每个串行数据符号的持续时间为 T_s 秒。这些数据可以是二元的(±1)以产生 BPSK 已调载波，或者是多电平的串行复数以产生(与之相称的)QPSK、MPSK 或 QAM 载波。$D_s = 1/T_s$是输入符号(波持)率。串并转换器一次读入 N 个输入的串行符号，在输出线上将其值($\mathbf{w}$ 的元素)保持 $T = NT_s$秒，其中 T 是 IFFT 的时间扩展。IFFT 用 $\mathbf{w}$ 计算 IFFT 输出矢量 $\mathbf{g}$，它包含代表复包络样本值的元素。并串转换器将 $\mathbf{g}$ 的元素依次移出，得到的就是式(5.117)所述的 OFDM 信号复包络的样本。$x(t)$ 和 $y(t)$ 是复包络的同相和正交分量。OFDM 信号由如图所示的 IQ 调制器产生。

在接收端，从接收到的 OFDM 信号恢复串行数据的步骤是：(1)解调信号产生同相(I)和正

交(Q)数据;(2)将串行数据转换为并行数据;(3)计算 FFT;(4)将 FFT 向量(并行数据)转换为串行数据输出。

FFT 向量的长度决定了抗多径信道造成的 OFDM 符号错误的能力。N 的选择应使 $T=NT_s$ 远大于接收到的多径信号中反射成分的最大时延。

OFDM 信号的 PSD 计算相对简单一些,因为式(5.117)的 OFDM 信号包含了被时间间隔为 T 秒的矩形脉冲数据调制的正交载波。因此,每个载波的 PSD 都是 $|\mathrm{Sa}[\pi(f-f_n)T]|^2$ 型。OFDM 信号复包络的总功率是

$$\mathcal{P}_g(f)=C\sum_{n=0}^{N-1}\left|\frac{\sin[\pi(f-f_n)T]}{\pi(f-f_n)T}\right|^2 \tag{5.118}$$

其中,$C=A_c^2\,\overline{|w_n|^2}\,T$,并且 $\overline{w_n}=0$。$N=32$ 时的频谱示于图 5.38 中。因为载波间距是 $1/T$ Hz 个并且总共有 N 个载波,所以 OFDM 信号的零点-零点带宽为

$$B_T=\frac{N+1}{T}=\frac{N+1}{NT_s}\approx\frac{1}{T_s}=D_s\,\mathrm{Hz} \tag{5.119}$$

其中,当 $N>10$ 时该近似比较合理,并且 D_S 是 OFDM 发射机串行输入数据的符号(波特)率。在更为先进的 OFDM 系统中,采用弧形(非矩形)脉冲波形可以减少 $B_T=D_s$ 频段以外的旁瓣。

例题 5.15 OFDM 信号的 PSD

计算并画出 OFDM 信号复包络的 PSD。计算过程和结果见 M 文件 Example5_15.m。将该结果与图 5.38 中的结果进行比较。

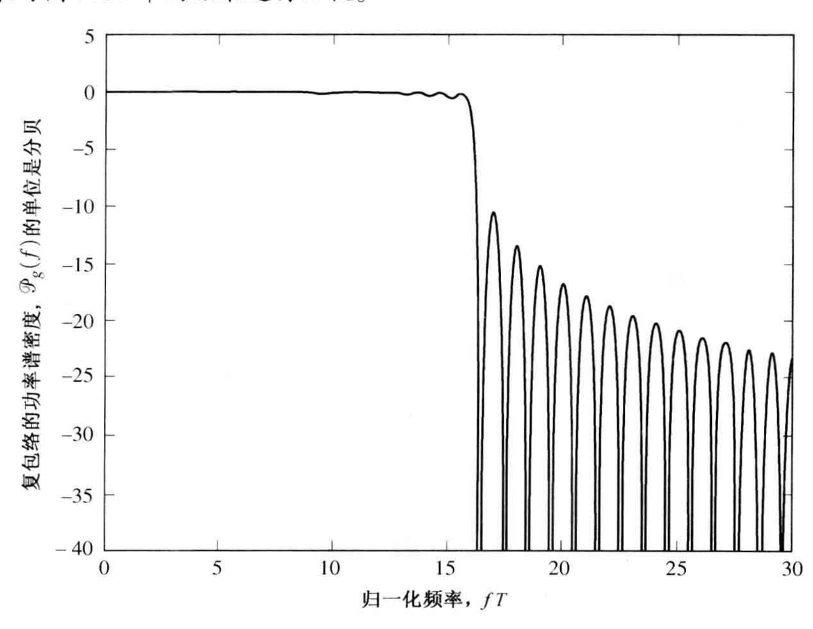


图 5.38 $N=32$ 时 OFDM 复包络的 PSD

在称为离散多音调制(DMT)的广义 OFDM 中,其每个载波上的数据率可变,它们取决于每个载波上的接收信噪比(SNR)。也就是说,在低信噪比的载波频率上的数据速率降低了(或者关掉此载波)。数据速率可随衰落条件的变化而调整,因而可实现在衰落信道上几乎无错误的传输。

OFDM 被欧洲数字广播系统(无线电和电视)、一些 ASDL 电话线调制解调器、Wi-Fi、WiMAX无线计算机网络及 4G 蜂窝网络所采用(见第 8 章以及维基百科中的 OFDM)。

5.13　扩频系统

在对通信系统的研究中，我们主要关心的是自然噪声下通信系统的频谱效率和能量效率（即检测到的 SNR 或误比特率）等性能。但是，在一些应用中，我们还需要考虑多址能力、抗干扰能力、抑制串扰能力及保密操作或低截获概率（后者在军事应用中尤为重要）。这些性能指标可以通过使用扩频技术来优化。

蜂窝电话和个人通信应用中需要多址能力，因为没有足够的可用频带给每个用户都分配一个永久频道，所以众多用户共享一定的频段。扩频技术可以通过码分多址技术来保证人们同时使用一个较宽的频带，是一种可供选择的频带共享方案。其他两种方法[时分多址（TDMA）和频分多址（FDMA）]在 3.9 节、5.7 节和 8.5 节进行了讨论。

有很多种类的扩频（SS）系统。一个系统要被称为 SS 系统，必须满足两个条件：

1. 被传输信号 $s(t)$ 的带宽要远大于消息信号 $m(t)$ 的带宽。
2. $s(t)$ 相对较宽的带宽是由一个称为扩频信号的独立调制波形 $c(t)$ 所产生的，并且接收端必须已知该信号，以检测消息信号 $m(t)$。

SS 信号为

$$s(t) = \text{Re}\{g(t)e^{j\omega_c t}\} \tag{5.120a}$$

复包络是 $m(t)$ 和 $c(t)$ 的函数。在大多数情况下，采用一个乘积函数，于是，

$$g(t) = g_m(t)g_c(t) \tag{5.120b}$$

$g_m(t)$ 和 $g_c(t)$ 是如表 4.1 给出的产生 AM、PM、FM 等常用类型调制的复包络函数。SS 信号根据对 $g_c(t)$ 使用的映射函数类型进行分类。

以下是一些最常见类型的 SS 信号：

- 直接序列（DS）。这里采用 DSB-SC 型的扩频调制[即 $g_c(t)=c(t)$]，而 $c(t)$ 是双极性 NRZ 信号。
- 跳频（FH）。$g_c(t)$ 是 FM 型的信号，由扩频码信号 $c(t)$ 得到 k 比特的字，决定了共有 $M=2^k$ 个跳变频率。
- 既包含 DS 也包含 FH 的混合技术。

在本章的余下部分，我们将详细讨论 DS 和 FH 系统是如何工作的。

5.13.1　直接序列扩频

假设信息波形 $m(t)$ 来自数字信号源，而且是双极性信号，其值为 ±1。而且，我们来分析 BPSK 调制的情形，其中 $g_m(t)=A_c m(t)$。于是，对于 DS，在式（5.120b）中，令 $g_c(t)=c(t)$，SS 信号的复包络变为

$$g(t) = A_c m(t)c(t) \tag{5.121}$$

由此得到的 $s(t)=\text{Re}\{g(t)e^{j\omega_c t}\}$ 称为二元相移键控数据、直接序列扩频、扩频信号（BPSK-DS-SS）等，其中 $c(t)$ 是双极性扩频信号。进一步，我们令该扩频信号由伪随机序列（PN）发生器生成，如图 5.39（b）所示，其中 $c(t)$ 的值为 ±1。$c(t)$ 的脉宽为 T_C，称为码片周期（与比特周期相比）。码产生器采用模 2 加法器和时钟周期为 T_C 秒的 r 级移位寄存器。可以证明 $c(t)$ 是周期性的。此外，合理安排移位寄存器和模 2 加法器的反馈抽头以使得 $c(t)$ 具有 N 个码片的最大周期，其中 $N=2^r-1$。这种类型的 PN 码生成器产生最大长度序列或 m 序列波形。

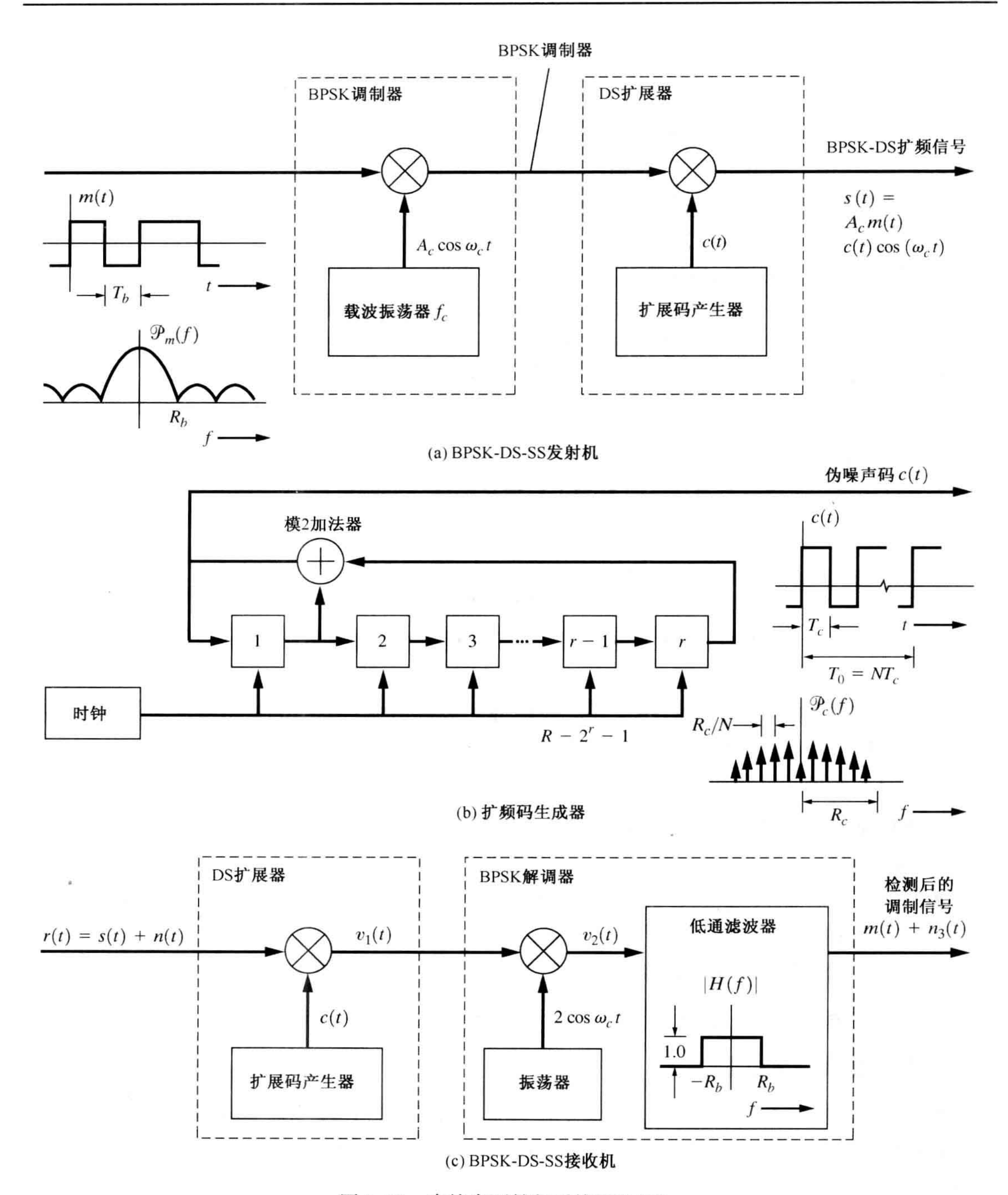


图 5.39 直接序列扩频系统(DS-SS)

最大长度序列的性质。以下是 m 序列的一些性质[Peterson, Ziemer 和 Borth, 1995]:

性质 1 在一个周期中,"1"的个数总比"0"的个数多 1。

性质 2 如果将某一 m 序列与其移位后的序列对码片进行模 2 求和,将得到该 m 序列的另一个移位序列。

性质 3 若将一个宽为 r(r 为移位寄存器的级数)的窗沿着 m 序列滑动 N 位,除了全 0 的 r 比特码字外,其他所有 r 比特码字将仅出现一次。

性质4　若“0”和“1”由 -1 V 和 +1 V 表示，则序列的自相关函数为

$$R_c(k) = \begin{cases} 1, & k = \ell N \\ -\dfrac{1}{N}, & k \neq \ell N \end{cases} \tag{5.122}$$

其中，$R_c(k) \triangleq (1/N)c_n c_{n+k}$，$c_n = \pm 1$。

波形 $c(t)$ 的自相关函数为

$$R_c(\tau) = \left(1 - \frac{\tau_\varepsilon}{T_c}\right)R_c(k) + \frac{\tau_\varepsilon}{T_c}R_c(k+1) \tag{5.123}$$

其中，$R_c(\tau) = \langle c(t)c(t+\tau)\rangle$，并且 τ_ε 定义为

$$\tau = kT_c + \tau_\varepsilon, \qquad 0 \leqslant \tau_\varepsilon < T_c \tag{5.124}$$

式(5.123)简化为

$$R_c(\tau) = \left[\sum_{\ell=-\infty}^{\ell=\infty}\left(1 + \frac{1}{N}\right)\Lambda\left(\frac{\tau - \ell NT_c}{T_c}\right)\right] - \frac{1}{N} \tag{5.125}$$

图5.40(a)中画出了该式的结果，显而易见，PN 波形的自相关函数是以 NT_c 为周期，其宽度为 $2T_c$ 的三角脉冲串，并且三角脉冲间的相关值为 $-1/N$。因为自相关函数是周期的，所以相应的 PSD 是线谱，即自相关函数表示成傅里叶级数的形式为

$$R_c(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_n e^{j2\pi n f_0 t} \tag{5.126}$$

其中，$f_0 = 1/(NT_c)$，$\{r_n\}$ 是傅里叶级数的系数。于是，应用式(2.109)得到

$$\mathcal{P}_c(f) = \mathcal{F}[R_c(\tau)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_n\delta(f - nf_0) \tag{5.127}$$

其中，傅里叶级数的系数为

$$r_n = \begin{cases} \dfrac{1}{N^2}, & n = 0 \\ \left(\dfrac{N+1}{N^2}\right)\left(\dfrac{\sin(\pi n/N)}{\pi n/N}\right), & n \neq 0 \end{cases} \tag{5.128}$$

图5.40(b)画出了它的 PSD。

现在我们证明相对于数据率 R_b，SS 信号的带宽很大，它主要由扩频信号 $c(t)$ 而非调制信号 $m(t)$ 所决定。参考图5.39，我们知道 $m(t)$ 和 $c(t)$ 的 PSD 都是 $[(\sin x)/x]^2$ 型的。由于假设码片速率 $R_c = 1/T_c$ 远大于数据率 $R_b = 1/T_b$，因此 $c(t)$ 的带宽远大于 $m(t)$ 的带宽，即 $R_c \gg R_b$。为了简化数学推导，用矩形谱近似这些 PSD，如图5.41(a)和图5.41(b)所示，因为 $m(t)$ 和 $c(t)$ 的功率都为1(都只有 ±1 值)，选择 PSD 的高度使得曲线下的面积为1。由式(5.121)，在时域上将 $m(t)$ 和 $c(t)$ 相乘就得到 $g(t)$，$m(t)$ 和 $c(t)$ 是相互独立的。因此，在频域上卷积可得到 BPSK-DS-SS 信号复包络的 PSD：

$$\mathcal{P}_g(f) = A_c^2\mathcal{P}_m(f) * \mathcal{P}_c(f) \tag{5.129}$$

图5.41(c)给出了 $m(t)$ 和 $c(t)$ 的近似 PSD。因为 $R_c \gg R_b$，所以 BPSK-DS-SS 信号的带宽主要由码片速度 R_c 所决定。例如，令 $R_b = 9.6$ kbps，$R_c = 9.6$ 兆码片/秒。于是 SS 信号的带宽为 $B_T \approx 2R_c = 19.2$ MHz。

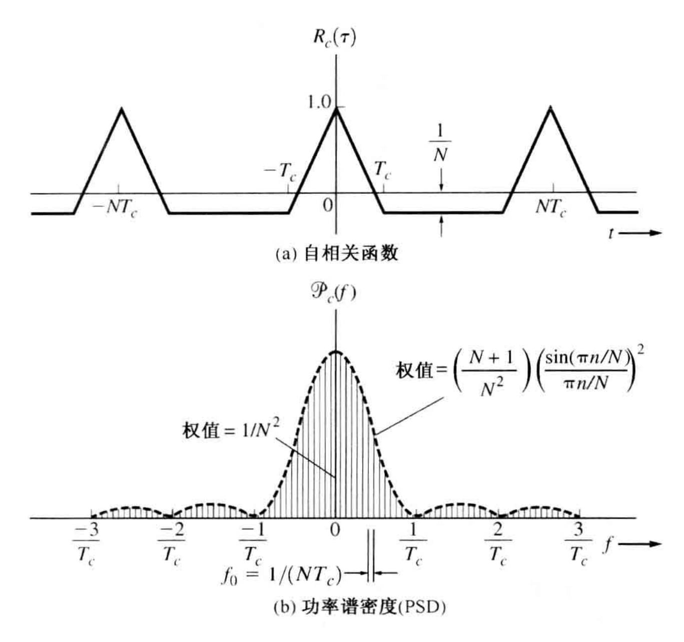


图 5.40　m 序列 PN 信号的自相关函数和 PSD

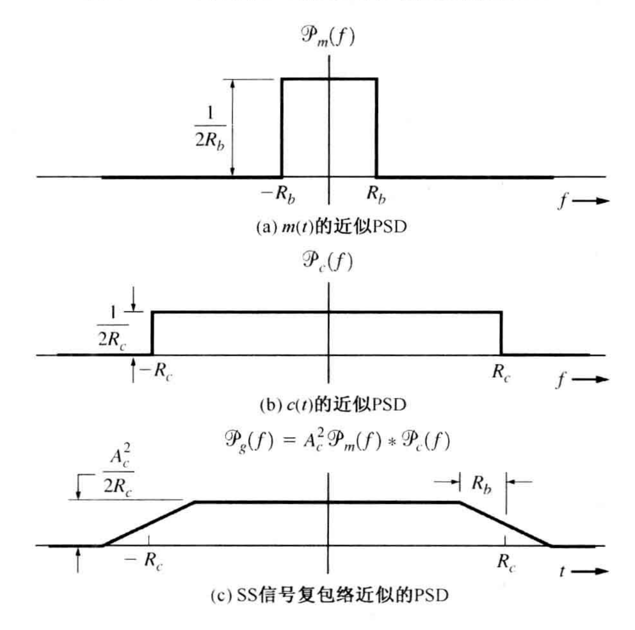


图 5.41　BPSK-DS-SS 信号的近似 PSD

从图 5.41，我们还可以证明扩频使信号不容易被窃听器检测到，即信号具有低截获概率。若不扩频[即 $c(t)$ 为 1]，带内的谱电平为 $A_c^2/(2R_b)$，如图 5.41(a)所示；若扩频，带内的谱电平为 $A_c^2/(2R_c)$，如图 5.41(c)所示。这时的减小量为 $\frac{R_c}{R_b}$ 倍。例如，对于刚才引用的 R_b 和 R_c 值，减小因子为(9.6 兆码片/秒)/(9.6 kbps) = 1000 或 30 dB。通常窃听器用频谱分析仪检测信号的存在，但是当使用了 SS 时，信号频谱值降低了 30 dB。这通常低于窃听器的底噪，因而 SS 信号不会被窃听器检测出来。

图5.39(c)给出了可恢复SS信号上的调制信号的接收机。该接收机有一个被PN生成器驱动的解扩电路，与发射机扩频码同步。假设接收机输入包括SS信号和窄带(正弦波)干扰信号，于是，

$$r(t) = s(t) + n(t) = A_c m(t)c(t)\cos\omega_c t + n_j(t) \tag{5.130}$$

其中，干扰信号为

$$n_j(t) = A_J \cos\omega_c t \tag{5.131}$$

在此，我们假设相对于信号功率 $A_c^2/2$，干扰功率为 $A_J^2/2$，并且对干扰最强的情形，干扰频率设为 f_c。参考图5.39(c)，我们得到解扩器的输出为

$$v_1(t) = A_c m(t)\cos\omega_c t + A_J c(t)\cos\omega_c t \tag{5.132}$$

因为 $c^2(t) = (\pm 1)2 = 1$，BPSK-DS-SS信号在解扩器输出端变成了BPSK信号，即在接收机输入端SS信号的带宽为 $2R_c$，但在解扩器输出端BPSK信号的带宽为 $2R_b$，对于前面引用的图就是1000∶1的减小量。BPSK解扩信号上的数据可由图中的BPSK检测电路恢复。

我们现在证明当 $R_b = 9.6$ kbps，$R_c = 9.6$ 兆码片/秒时，SS接收机具有30 dB的抗干扰能力。由式(5.132)可知，接收机输入端输入的窄带干扰信号由于乘以了 $c(t)$，被解扩器扩频。正是由于对干扰信号的扩频效应使得接收机具有抗干扰能力。由式(5.132)和图5.39(c)，可得到低通滤波器(LPF)的输入为

$$v_2(t) = A_c m(t) + n_2(t) \tag{5.133}$$

其中，

$$n_2(t) = A_J c(t) \tag{5.134}$$

且 $f = 2f_c$ 这一项可以忽略，因为它们不能通过LPF。由图5.39(c)，注意到接收机输出端的干扰功率为

$$\mathcal{P}_{n_3} = \int_{-R_b}^{R_b} \mathcal{P}_{n_2}(f)\,df = \int_{-R_b}^{R_b} A_J^2 \frac{1}{2R_c}\,df = \frac{A_J^2}{R_c/R_b} \tag{5.135}$$

以及低通滤波器输入的干扰功率为 A_J^2[$\mathcal{P}_{n_2}(f) = A_J^2 y/(2R_c)$，如图5.41(b)及式(5.134)所示]。对于一般的BPSK系统(即没有扩频)，$c(t)$ 为1，式(5.134)变为 $n_2(t) = A_J$，因此低通滤波器输出的干扰功率为 A_J^2 而非SS系统的 $A_J^2/(R_c/R_b)$。[两种情况下输出信号都是 $A_c m(t)$。]因此，SS接收机将窄带干扰的影响降低了 R_c/R_b，该因子 R_c/R_b 称为SS接收机的处理增益①。对于 $R_c = 9.6$兆码片/秒，$R_b = 9.6$ kbps的情形，处理增益为30 dB。这意味着要产生对一般的BPSK系统(无SS)同样的干扰效果，SS系统中的窄带干扰的功率应高30 dB。因此，对本例中采用的 R_c/R_b 值，SS技术提供了30 dB的抗干扰能力。

SS技术还可用于提供多址，称为码分多址(CDMA)。在此，每个用户都分配有一个扩频码以使得信号正交。该技术被用于CDMA蜂窝电话系统。多个SS信号可同时在同一频段上传输，而SS信号上的数据可被接收机解码，条件是该接收机采用与要解码的特定SS信号相同的PN码，并且与之同步。CDMA链路设计成既可工作在同步模式又可工作在异步模式下。对同步模式，所有用户的符号变化时刻都相同。该模式经常用于从基站(BS)到移动站(MS)的前向链路。对异步模式，不进行序列对齐。该模式用于从MS到BS的反向链路。异步模式的多址干扰较多，但设计的限制较少。

---

① 处理增益定义为没有经过SS的噪声功率除以经过SS的噪声功率的比值。这等价于 $(S/N)_{out}/(S/N)_{in}$ 这一比值，其中 $(S/N)_{in}$ 是接收机的输入信噪比，而 $(S/N)_{out}$ 是接收机的输出信噪比。

为了在传统窄带用户(如双向无线波段)已饱和的频段上容纳更多用户，一种可能就是分配新的SS站。这称为扩频覆盖。这样的SS站应以宽带的方式工作，在该频带上，信号的PSD对于距SS发射机足够远的窄带接收机应可以忽略。另一方面，对SS接收机，因为其具有较大的编码增益，窄带信号对其具有最小的干扰。

5.13.2 跳频

如前所述，跳频(FH)SS信号采用FM型的$g_c(t)$，扩频码控制$M=2^k$个跳变的频率，包含k个码片的字用来确定每一个跳变的频率。图5.42(a)给出了一个FH-SS发射机。采用传统FSK或BPSK技术将源信息调制到载波上产生FSK或BPSK信号。跳频是由混频电路实现的。在该电路中，由PN扩频码控制频率合成器以提供本振信号的输出。串并转换器读入扩展码的k个串行码片，然后将k个码片的并行码字送入到频率合成器中的可编程分频器中(见图4.25以及对频率合成器相关的讨论)。k个码片的码字确定可能的$M=2^k$个跳变频率ω_1，ω_2，…，ω_M中的某一个。

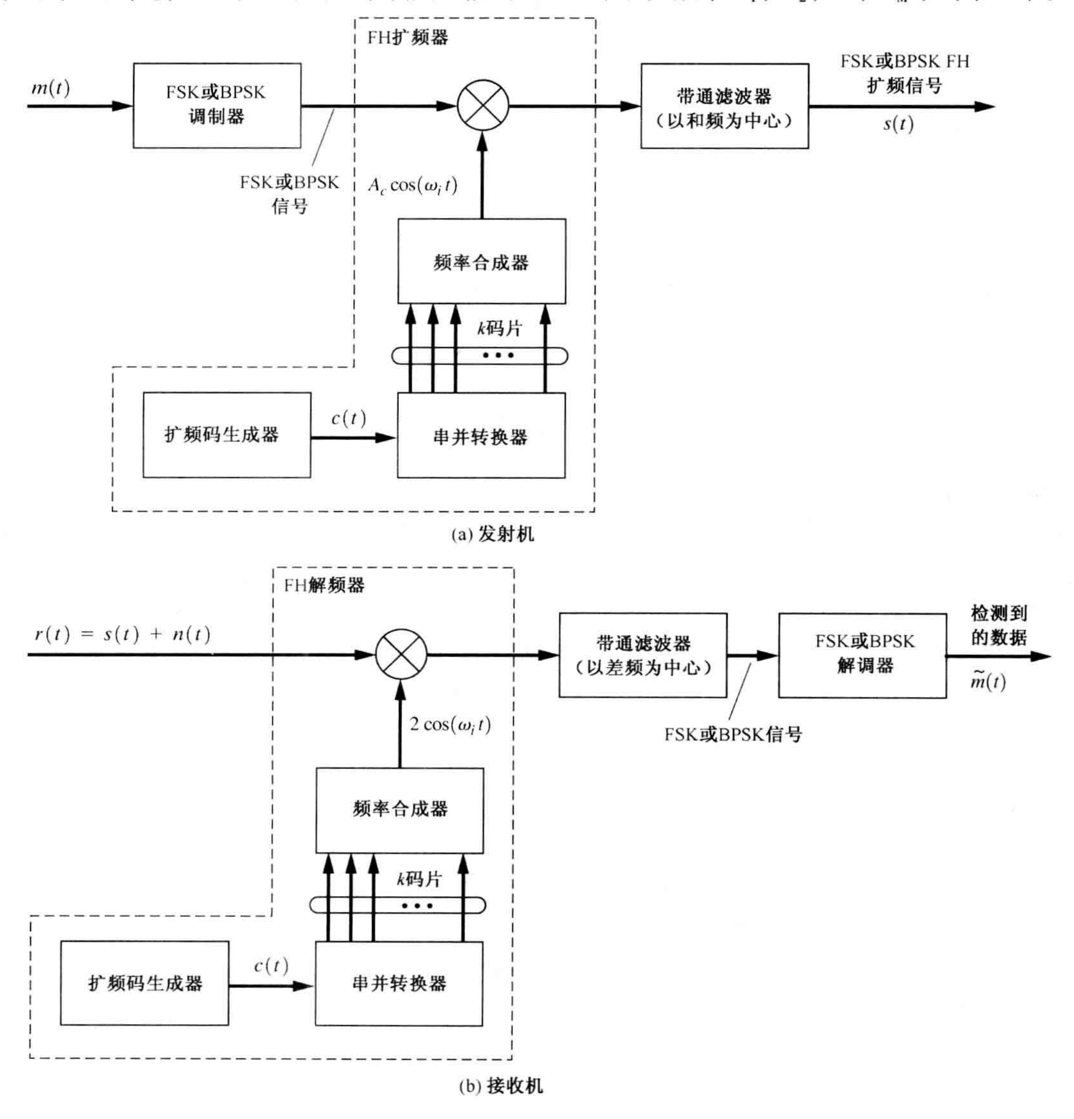


图5.42　跳频-扩频系统(FH-SS)

FH 信号的解码如图 5.42(b)所示。接收机应当知道发射机的 $c(t)$，这样接收机的频率合成器可以和发射机的频率合成器同步。于是就将 FH 信号解扩，然后再用传统 FSK 或 BPSK 解调制器就可以从解跳后的信号中恢复源信息。

5.13.3　扩频系统频段

1985 年，FCC 开放了三个共享频段：902 ~ 928 MHz，2400 ~ 2483.5 MHz 和 5725 ~ 5850 MHz，这些频段给商业 SS 使用未经授权的 1 W 发射机。由此推动了遥测系统、个人计算机的无线局域网(Wi-Fi 或者 802.11a、802.11b、802.11g and 802.11n)、无线火灾报警及安全系统的 SS 设备的生产和使用。一些 SS 应用比其他系统更具优势。例如，美国模拟蜂窝系统可在每个小区中容纳 55 个用户，相比之下 SS 蜂窝电话系统(即 CDMA)可在每小区中容纳 1000 个用户[Schilling, Pickholtz and Milstein, 1990](见 8.8 节的 CDMA 蜂窝电话标准)。要进一步研究 SS 系统，读者请参阅有关该主题的书籍及论文[Cooper and McGillem, 1986; Dixon,1994; Ipatov, 2005; McGill, Natali and Edwards, 1994; Peterson,Ziemer and Borth 1995; Rhee, 1998; Torrieri, 2004]。

5.14　小结

在本章中，基于第 1 章到第 4 章给出的理论基础，分析了大量的模拟和数字调制系统。对 AM、SSB、PM 和 FM 调制进行了详细的讨论。给出了 AM、FM 和 IBOC 数字广播信号的标准。对诸如 OOK、BPSK、FSK、MSK 和 OFDM 等数字调制技术进行了研究。计算出这些数字信号的数字信息源的比特率形式的频谱。此外，还对多电平数字调制技术如 QPSK、MPSK 及 QAM 进行了分析，并计算了其频谱。

分析了扩频调制。该技术具有多址能力、抗干扰能力、抗串扰能力及低截获概率的性质，这些性质可应用于个人通信系统和军事通信系统中。

5.15　助学例题

SA5.1　SSB 信号功率的公式　证明 SSB 信号的归一化功率由式(5.25)给出，为 $\langle s^2(t)\rangle = A_c^2\langle m^2(t)\rangle$。

解：对于 SSB，$g(t)=A_c[m(t)\pm j\hat{m}(t)]$。应用式(4.17)得到：

$$P_s = \langle s^2(t)\rangle = \frac{1}{2}\langle|g(t)|^2\rangle = \frac{1}{2}A_c\langle m^2(t) + [\hat{m}(t)]^2\rangle$$

或者

$$P_s = \langle s^2(t)\rangle = \frac{1}{2}A_c\left\{\langle m^2(t)\rangle + \langle[\hat{m}(t)]^2\rangle\right\} \tag{5.136}$$

但是

$$\langle[\hat{m}(t)]^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{P}_{\hat{m}}(f)\,df = \int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2\,\mathcal{P}_m(f)\,df$$

其中，$H(f)$ 是希尔伯特变换器的传输函数。应用式(5.19)，得到 $|H(f)|=1$。于是，

$$\langle[\hat{m}(t)]^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{P}_{\hat{m}}(f)\,df = \langle m^2(t)\rangle \tag{5.137}$$

将式(5.137)代入式(5.136)，得到：

$$P_s = \langle s^2(t)\rangle = A_c^2\langle m^2(t)\rangle$$

SA5.2 SSB 功率的计算 一个 $A_c=100$ 的 SSB 发射机通过用如图 5.14(a)所示的三角波对其进行调制来进行测试，其中 $V_P=0.5$ V。发射机连接一个 50 Ω 的负载。计算消耗在负载上的实际功率。

解： 应用式(5.25)得到：

$$P_{\text{actual}}=\frac{(V_s)_{\text{rms}}^2}{R_L}=\frac{\langle s^2(t)\rangle}{R_L}=\frac{A_c^2}{R_L}\langle m^2(t)\rangle \tag{5.138}$$

对于图 5.14(a)所示的波形：

$$\langle m^2(t)\rangle=\frac{1}{T_m}\int_0^{T_m}m^2(t)\,\mathrm{d}t=\frac{4}{T_m}\int_0^{T_m/4}\left(\frac{4V_p}{T_m}t-V_p\right)^2\mathrm{d}t$$

或者

$$\langle m^2(t)\rangle=\frac{4V_p^2}{T_m}\frac{\left(\frac{4}{T_m}t-1\right)^3}{3\left(\frac{4}{T_m}\right)}\Bigg|_0^{T_m/4}=\frac{V_p^2}{3} \tag{5.139}$$

将式(5.139)代入式(5.138)，得到：

$$P_{\text{actual}}=\frac{A_c^2V_p^2}{3R_L}=\frac{(100)^2(0.5)^2}{3(50)}=16.67\,\text{W}$$

SA5.3 具有倍频器的 FM 发射机 如图 5.43 所示，FM 发射机包括 FM 激励器、a ×3 倍频器、上变频器(带有带通滤波器)、a ×2 倍频器及 a ×3 倍频器。振荡器的频率为 80.0150 MHz，带通滤波器中心频率在载频上，大约为 143 MHz。当馈入音频信号时，FM 激励器的载波频率为 20.9957 MHz，峰值频偏为 0.694 kHz，音频信号的带宽为 3 kHz。计算 B、C、D、E 和 F 点上的 FM 信号的载频和峰值频偏。同时计算带通滤波器所需的带宽及准确的中心频率。

解： 如 4.12 节所述，倍频器产生的输出信号是输入信号的 n 次谐波，它将输入信号上的 PM 或 FM 变化增加为 n 倍。即若输入信号的角度变化为 $\theta(t)$，则输出信号的角度变化为 $n\theta(t)$，如式(4.73)所示。因为 $\Delta F=(1/2\pi)\mathrm{d}\theta(t)/\mathrm{d}t$，倍频器输出的峰值频偏为 $(\Delta F)_{\text{out}}=n(\Delta F)_{\text{in}}$。FM 激励器输出的载波频率为 $(f_c)_A=20.9957$ MHz，峰值频偏为 $(\Delta F)_A=0.694$ kHz。因此，B 点的 FM 信号的参数为

$$(f_c)_B=3(f_c)_A=62.9871\,\text{MHz},\quad(\Delta F)_B=3(\Delta F)_A=2.08\ \text{kHz}$$

混频器(倍频器)在载波上产生两个信号——C 点的和频项及差频项——载波频率为

$$(f_c)_{C\,\text{sum}}=f_0+(f_c)_B=143.0021\,\text{MHz}$$

和

$$(f_c)_{C\,\text{diff}}=f_0-(f_c)_B=17.0279\,\text{MHz}$$

因为混频器输出信号的复包络与其输入信号的复包络相同(见 4.11 节)，所以其输出端所有的调制输出参数都与输入端的相同。因此，和、差载波频率都是调频的，其各点峰值频偏为 $(\Delta F)_C=(\Delta F)_B=2.08$ kHz。带通滤波器通过了载波为 143 MHz 的项。于是，D 点 FM 信号的载频为

$$(f_c)_D=(f_c)_{C\,\text{sum}}=143.0021\,\text{MHz},\quad(\Delta F)_D=(\Delta F)_C=2.08\,\text{kHz}$$

E 点和 F 点的 FM 信号的参数为

$$(f_c)_E=2(f_c)_D=286.0042\,\text{MHz},\quad(\Delta F)_E=2(\Delta F)_D=4.16\,\text{kHz}$$

$$(f_c)_F=3(f_c)_E=858.0126\,\text{MHz},\quad(\Delta F)_E=3(\Delta F)_E=12.49\,\text{kHz}$$

总之，图 5.43 中的电路产生一个 858.0126 MHz 的 FM 信号，其峰值频偏为 12.49 kHz。带通滤波器的中心在 $(f_c)_{C\,\text{sum}}=143.0021$ MHz，其带宽足以使频偏为 $(\Delta F)_C=2.08$ kHz 的 FM 信号通过。运用卡森定律[见式(5.61)]，可知带通滤波器所需的带宽为

$$B_T=2[\beta_C+1]B=2[(\Delta F)_C+B]$$

或

$$B_T=2[2.08+3.0]=10.16\ \text{kHz}$$

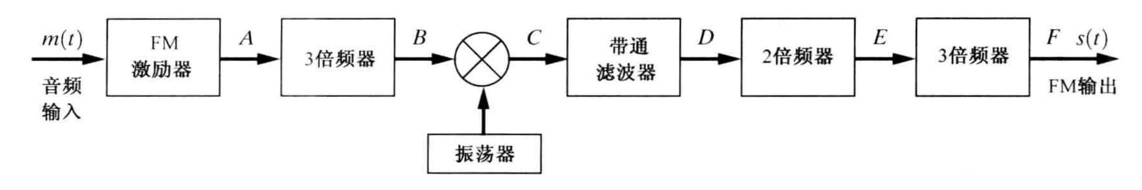


图 5.43　FM 发射机

SA5.4　用 SSB 发射机将基带数据变为射频信号　用业余无线电发射机在 40 m 波段上发射数据，并采用 SSB 无线收发报机。为此，将贝尔 103 型（如例题 5.9 所述）调制解调器接到 SSB 无线电收发报机的音频（话筒）输入端。假设调制解调器设为应答模式，无线电收发报机设为在被抑制的载频 $(f_c)_{\text{SSB}}=7.090$ MHz 上传送下边带 SSB 信号。描述发射的数字调制信号的类型，确定其载波频率。对于交替变化的数据 101010，计算传输信号的频谱。

解： 参考 4.5 节，我们注意到 LSSB 发射机将音频输入的频谱上移到被抑制的载波频率上，并删掉上边带。由表 5.5，贝尔 103 调制解调器（应答模式）的传号频率为 $f_1=2225$ Hz，空号频率为 $f_2=2025$ Hz，载频 $(f_c)_{\text{Bell 103}}=2125$ Hz。LSSB 发射机将这些频率搬移到传号频率（二元码“1”）：

$$(f_c)_{\text{SSB}}-f_1=7090\,\text{kHz}-2.225\,\text{kHz}=7087.775\,\text{kHz}$$

空号频率（二元码“0”）

$$(f_c)_{\text{SSB}}-f_2=7090-2.025=7087.975\,\text{kHz}$$

以及载波频率

$$(f_c)_{\text{FSK}}=(f_c)_{\text{SSB}}-(f_c)_{\text{Bell 103}}=7090-2.125=7087.875\,\text{kHz}$$

于是，SSB 收发报机产生载频为 7087.875 kHz 的 FSK 数字信号。

对于交替变化的数据，其 FSK 信号的频谱由式(5.85)和式(5.86)给出，$f_c=7087.875$ kHz。其频谱图和图 5.26(a)中所绘的相似，只不过将频谱从 $f_c=1170$ Hz 搬移到 $f_c=7087.875$ kHz。注意，该谱也出现在 SSB 载频 $(f_c)_{\text{SSB}}=7090$ kHz 的下边带。如果采用 DSB-SC 发射机（而非 LSSB 发射机），其频谱的上边带是下边带的复制，并且将发射两个冗余的 FSK 信息。

对于随机数据，式(5.90)给出了其复包络的 PSD 并且图 5.27 给出了调制指数为 $h=0.7$ 的曲线。由式(5.2b)，我们得到 FSK 信号的 PSD 就是将复包络的 PSD 搬移到载频 7087.875 kHz 上。

习题

★ 5.1　将 RF 输出馈入 50 Ω（等效）负载对 AM 广播发射机进行测试。采用音频调制。载波频率为 850 kHz，FCC 所允许的功率输出为 5000 W。设定 1000 Hz 的正弦音频为 90% 的调制。

(a) 以 dBk（高于 1 kW 的 dB 数）为单位，计算 FCC 功率。

(b) 写出 50 Ω 负载上通过的电压的表达式，给出所有常数的数值。

(c) 画出该电压通过校准谱分析仪时的频谱。

(d) 在等效负载上消耗的平均功率是多少？

(e) 峰值包络功率是多少？

5.2　AM 发射机被音频测试信号调制，该信号为 $m(t)=0.2\sin\omega_1 t+0.5\cos\omega_2 t$，$f_1=500$ Hz，$f_2=500\sqrt{2}$ Hz，$A_c=100$。假设 AM 信号馈入 50 Ω 负载。

(a) 计画出 AM 信号波形。

(b) 调制百分比为多少？

(c) 计算并画出 AM 波形的频谱。

5.3　对于习题 5.2 中给出的 AM 信号。

(a) 计算 AM 信号的平均功率。

(b)计算 AM 信号的峰值包络功率(PEP)。

★ 5.4 假设 AM 发射机被视频测试信号调制，该信号为 $m(t) = -0.2 + 0.6\sin\omega_1 t$，$f_1 = 3.57$ MHz。令 $A_c = 100$。

(a)画出 AM 信号的波形。

(b)正调制百分比和负调制百分比是多少?

(c)计算并画出载频 f_c 上的 AM 频谱。

5.5 用双音测试信号来评估一个 50 000 W 的 AM 广播发射机。发射机外接 50 Ω 负载，$m(t) = A_1\cos\omega_1 t + A_2\cos 2\omega_1 t$，$f_1 = 500$ Hz。假设生成一个理想的 AM 信号。

(a)计算 AM 信号的复包络，用 A_1 和 ω_1 表示。

(b)确定 90% 调制下的 A_1 值。

(c)确定 90% 调制时通过 50 Ω 负载的峰值电流和平均电流。

★ 5.6 AM 发射机采用 2 象限倍频器，发射信号如式(5.7)所示。假设发射机被 $m(t) = A_m\cos\omega_m t$ 调制，调整 A_m 使得正调制百分比为 120%。计算该 AM 信号的频谱，用 A_c、f_c 和 f_m 表达。绘出该频谱。

5.7 若采用 4 象限倍频器，重做习题 5.6。

5.8 假设习题 5.6 描述的是一个 AM 发射机及其调制波形的工作情况。令 $A_c = 500$ V，$f_c = 60$ kHz，并且 $f_a = 6$ kHz。使用 MATLAB 画出发射机输出的电压波形。

5.9 假设习题 5.6 描述的是一个 AM 发射机及其调制波形的工作情况，但不同的是它使用了 4 象限倍频器。令 $A_c = 500$ V，$f_c = 60$ kHz，并且 $f_a = 6$ kHz。使用 MATLAB 画出发射机输出的电压波形。

★ 5.10 DSB-SC 信号被 $m(t)$ 调制，$m(t) = \cos\omega_1 t + 2\cos 2\omega_1 t$，$\omega_1 = 2\pi f_1$，$f_1 = 500$ Hz，$A_c = 1$。

(a)写出该 DSB-SC 信号的表达式，画出该波形。

(b)计算并画出该 DSB-SC 信号的频谱。

(c)确定平均(归一化)功率值。

(d)确定峰值包络功率(归一化)的值。

5.11 因为电源电压及元件的峰值电压和电流的等级，发射电路将已调输出信号限制在某一峰值内，比如说 A_p。若由该电路产生一个峰值为 A_p 的 DSB-SC 信号，证明该 DSB-SC 信号的边带功率是由该电路产生的峰值也为 A_p 的 AM 信号的边带功率的 4 倍。

5.12 如图 P5.12 所示，一个 DSB-SC 信号可由两个 AM 信号产生。用数学表达式描述图中各点的信号，证明输出为一个 DSB-SC 信号。

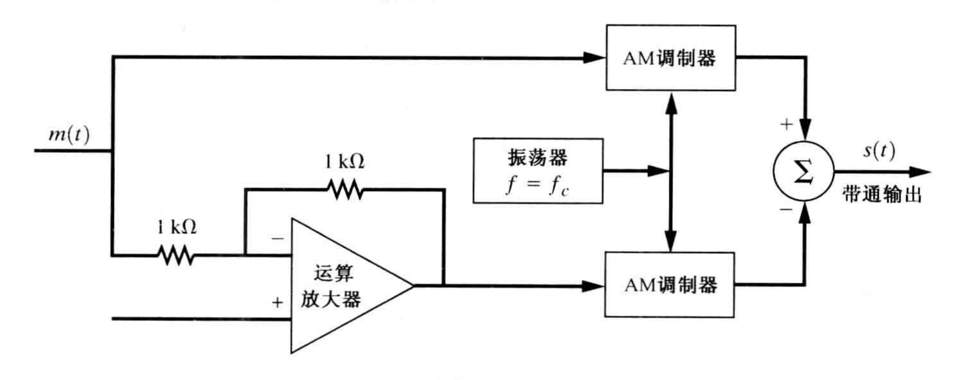


图 P5.12

5.13 证明当 $m(t)$ 为实信号时，复包络 $g(t) = m(t) - j\hat{m}(t)$ 产生下边带 SSB 信号。

5.14 证明 $-90°$ 相移网络(即希尔伯特变换器)的冲激响应为 $1/\pi t$。提示：

$$H(f)=\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}}\begin{cases}-\mathrm{j}e^{-\alpha f}, & f>0\\ \mathrm{j}e^{\alpha f}, & f<0\end{cases}$$

★ 5.15　SSB 信号可由图 5.5(a)所示的相位法产生，或由图 5.5(b)所示的滤波法产生，还可由图 P5.12 所示的韦佛法产生[Weaver, 1956]。对韦佛法(见图 P5.15)，令 B 为 $m(t)$ 的带宽。

(a)确定图中每个方块输出波形的数学表达式。

(b)证明 $s(t)$ 是一个 SSB 信号。

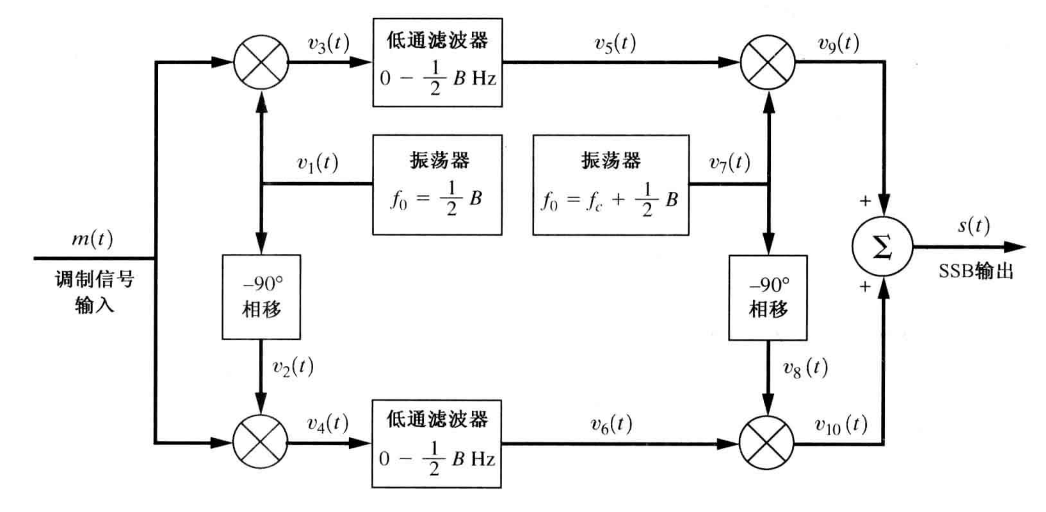


图 P5.15　产生 SSB 信号的韦佛法

5.16　SSB-AM 发射机被一个正弦信号 $m(t)$ 调制，$m(t)=5\cos\omega_1 t$，$\omega_1=2\pi f_1$，$f_1=500$ Hz，$A_c=1$。

(a)计算 $\hat{m}(t)$。

(b)确定下边带 SSB 信号的表达式。

(c)确定 SSB 信号的均方根(rms)值。

(d)确定 SSB 信号的峰值。

(e)确定 SSB 信号的归一化平均功率。

(f)确定 SSB 信号的归一化峰值包络功率(PEP)。

★ 5.17　SSB-AM 发射机被一矩形脉冲 $m(t)$ 调制，$m(t)=\Pi(t/T)$，$A_c=1$。

(a)证明：

$$\hat{m}(t)=\frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{2t+T}{2t-T}\right|$$

如表 A.7 给出。

(b)试求 SSB-AM 信号 $s(t)$ 的表达式，画出 $s(t)$。

(c) 试求 $s(t)$ 的峰值。

5.18　对习题 5.17：

(a) 求出 USSB-AM 信号频谱的表达式。

(b) 画出幅度谱 $|S(f)|$。

★ 5.19　USSB 发射机被如下脉冲所调制：

$$m(t)=\frac{\sin \pi at}{\pi at}$$



(a)证明：

$$\hat{m}(t)=\frac{\sin^2[(\pi a/2)t]}{(\pi a/2)t}$$

(b)画出当 $A_c=1$、$a=2$ 及 $f_c=20$ Hz 时相应的 USSB 信号波形。

5.20 一个 USSB-AM 信号被矩形脉冲串调制：

$$m(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\prod[(t-nT_0)/T]$$

其中，$T_0=2T$。

(a)试求 SSB-AM 信号频谱的表达式。

(b)画出幅度谱 $|S(f)|$。

5.21 图 P5.21 给出了一种相位型 SSB-AM 检测器。该电路连接到传统超外差式接收机的中频输出端，提供 SSB 接收。

(a)确定检测器是对 LSSB 还是 USSB 的检测？若要检测出相反的边带类型 SSB 信号，检测器该如何改变？

(b)假设 A 点信号是 $f_c=455$ kHz 的 USSB 信号，确定 B 点到 I 点上信号的表达。

(c)若 A 点是 LSSB-AM 信号，重做(b)。

(d)若 A 点的 SSB 信号带宽为 3 kHz，讨论中频滤波器和低通滤波器的要求。

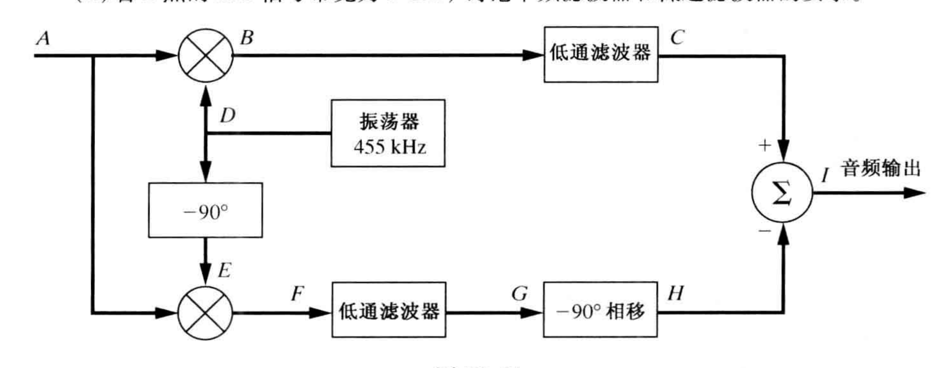


图 P5.21

5.22 图 5.3 所示的科斯塔环能否对 SSB-AM 信号解调？通过数学推导证明你的结论的正确性。

5.23 已调信号由下式描述：

$$s(t)=10\cos[(2\pi\times10^8)t+10\cos(2\pi\times10^3t)]$$

试求解如下问题：

(a)AM 调制的百分比。

(b)已调信号的归一化功率。

5.24 对习题 5.23 中描述的已调信号，试求：

(a)最大相位偏移。

(b)最大频率偏移。

5.25 一个发射机生成正交调制(QM)信号。复包络为

$$g(t)=A_c[m_1(t)+\mathrm{j}\,m_2(t)]$$

令载波频率为 50 kHz，并且 $A_c=100$。发射机通过使用两个正弦调制信号 $m_1(t)=3\cos(\omega_1t)$ 和 $m_2(t)=4\cos(\omega_2t)$ 来测试，其中 $f_1=2$ kHz，$f_2=5$ kHz。使用 MATLAB 画出发射机的输出电压波形。

5.26 使用 MATLAB，计算习题 5.25 中描述的发射机的实际 PEP，设发射机上的阻抗负载为 50 Ω。

★ 5.27 将正弦信号 $m(t)=\cos2\pi f_mt$ 输入角度调制发射机，其中载波频率为 $f_c=1$ Hz，$f_m=f_c/4$。

(a)画出 $m(t)$ 和对应 PM 信号，设 $D_p=\pi$。

(b)画出 $m(t)$ 和对应 FM 信号，设 $D_f=\pi$。

5.28　将幅度为 4 V，频率为 1 kHz 的正弦调制波形输入调制增益为 50 Hz/V 的 FM 激励器。

(a)峰值频偏是多少?

(b)调制指数是多少?

5.29　某 FM 信号，其正弦调制频率 $f_m = 15$ kHz，调制指数 $\beta = 2.0$。

(a)用卡森定律确定传输带宽。

(b)卡森定律确定的带宽中信号功率占 FM 信号功率的百分比是多少?

★ 5.30　FM 发射机的框图如图 P5.30 所示。音频频率响应在 20 Hz ~ 15 kHz 的音频带宽上是平坦的。FM 输出信号的载波频率为 103.7 MHz，峰值频偏为 75 kHz。

(a)确定带通滤波器所需的带宽和载波频率。

(b)计算振荡器的频率 f_0。

(c)FM 激励器要求的峰值频偏是多少?

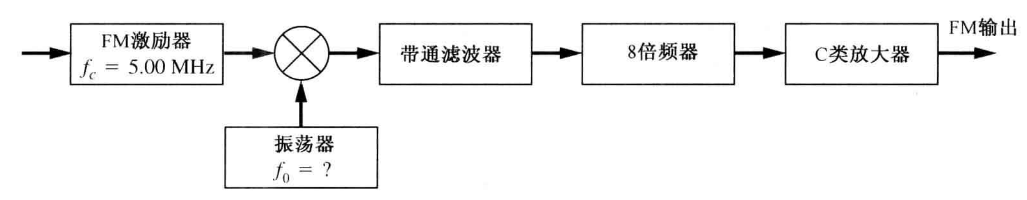


图 P5.30

5.31　分析图 5.8(b)中的 FM 电路的性能。反向二极管上提供的电压变容的电压为 $v(t) = 5 + 0.05m(t)$，式中调制信号 $m(t)$ 是测试音频，$m(t) = \cos\omega_1 t$，$\omega_1 = 2\pi f_1$，$f_1 = 1$ kHz。每一个偏置二极管的电容为 $C_d = 100\sqrt{1+2v(t)}$ pF。假设 $C_0 = 180$ pF，L 的谐振频率为 5 MHz。

(a)确定 L 的值。

(b)证明产生的振荡器信号为 FM 信号。为方便起见，假设振荡器信号的峰值为 10 V。确定参数 D_f。

★ 5.32　已调 RF 波形为 $500\cos[\omega_c t + 20\cos\omega_1 t]$，$\omega_1 = 2\pi f_1$，$f_1 = 1$ kHz，$f_c = 100$ MHz。

(a)若相位偏移常数为 100 rad/V，确定相应相位调制电压 $m(t)$ 的数学表达式，它的峰值及频率是多少?

(b)频率偏移常数是 1×10^6 rad/V · s，确定对应 FM 电压 $m(t)$ 的数学表达式。它的峰值和频率是多少?

(c)若 RF 波形通过 50 Ω 负载，确定平均功率和峰值包络功率(PEP)。

5.33　FM 信号 $s(t) = 10\cos[\omega_c t + 100\int_{-\infty}^{t} m(\sigma)\,d\sigma]$，$m(t)$ 是双极性平方波信号，其占空比为 50%，周期为 1 s，峰值为 5 V。

(a)画出瞬时频率波形及对应 FM 信号的波形(见图 5.9)。

(b)画出相位偏移 $\theta(t)$ 作为时间的函数的波形。

(c)计算峰值频偏。

5.34　FM 发射机的载波 $s(t) = 100\cos(2\pi \times 10^9 t)$ 被音频信号调制。对该发射机，一个 1 V(均方根值)的音频产生 30 kHz 的频偏。若调制信号 $m(t) = 2.5\cos(3\pi \times 10^4 t)$，确定大于未调制载波信号幅度 1% 的所有 FM 信号成分(线谱)的幅度和频率。

5.35　若调制信号 $m(t) = 1\cos(6\pi \times 10^4 t)$，重做习题 5.34。

5.36　参考式(5.58)，证明：

$$J_{-n}(\beta) = (-1)^n J_n(\beta)$$

★ 5.37　考虑输出为 $s(t) = 100\cos[\pi 1000t + \theta(t)]$ 的 FM 激励器。调制信号为 $m(t) = 5\cos(2\pi 8t)$，激励器调制增益为 8 Hz/V。FM 输出信号通过一个理想(矩形)带通滤波器，其中心频率为 1000 Hz，带宽为 56 Hz，增益为 1。确定以下两处的归一化平均功率：

(a)带通滤波输入端。

(b)带通滤波输出端。

★ 5.38 某 1 kHz 的正弦信号对 146.52 MHz 的载波进行相位调制，峰值相位偏移为 45°。计算 $A_c=1$ 时 PM 信号的准确幅度谱。画出你所得到的结果。运用卡森定律计算 PM 信号的近似带宽，并与你所画的频谱进行比较看是否合理。

5.39 一个 1 kHz 的正弦信号对 146.52 MHz 的载波进行频率调制，峰值频编为 5 kHz。计算 $A_c=1$ 时 FM 信号的精确幅度谱。画出你所得到的结果。运用卡森定律计算 FM 信号的近似带宽，并与你所画的频谱进行比较看是否合理。

5.40 采用贝塞尔函数校准频偏监测器。将一正弦波频率调制到载波上产生具有已知频偏的 FM 测试信号。假设正弦波频率为 2 kHz，在频谱分析仪上可观察到正弦波的幅度从 0 开始逐渐增高直到 FM 信号的离散载波项(在 f_c 频点)消失。当离散载波项为 0 时 FM 测试信号的峰值频偏为多少？假设正弦波的幅度在离散载波项出现后继续增长，达到最大值，然后消失。这时 FM 测试信号的峰值频偏是多少？

5.41 频率调制器的调制器增益为 10 Hz/V，调制波形为

$$m(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 5, & 0<t<1\\ 15, & 1<t<3\\ 7, & 3<t<4\\ 0, & 4<t\end{cases}$$

(a)以 Hz 为单位，画出时间区间 $0<t<5$ 上的频率偏移。

(b)以 rad 为单位，画出时间区间 $0<t<5$ 上的相位偏移。

★ 5.42 用占空比为 50% 的方波(数字)测试信号对发射机进行相位调制，$s(t)=10\cos[\omega_c t+\theta(t)]$，载频为 60 MHz，峰值相位偏移为45°。假设测试信号是周期为 1 ms 的单极性 NRZ 信号，关于 $t=0$ 对称。确定 $s(t)$ 的准确频谱。

5.43 两个正弦信号 $m(t)=A_1\cos\omega_1 t+A_2\cos\omega_2 t$，对发射机进行相位调制。推导出用 A_c、ω_c、D_p、A_1、A_2、ω_1 及 ω_2 表示的 PM 信号的准确频谱。[提示：采用 $e^{ja(t)}=(e^{ja_1(t)})(e^{ja_2(t)})$，其中 $a(t)=a_1(t)+a_2(t)$]。

5.44 绘出中心频率在 $f=f_c$ 上的 FM 信号的幅度谱，调制信号为

$$m(t)=A_1\cos 2\pi f_1 t+A_2\cos 2\pi f_2 t$$

假设 $f_1=10$ Hz，$f_2=17$ Hz，A_1 和 A_2 值设定得使每个音频提供 20 Hz 的峰值频偏。

5.45 当 β 值较小时，$J_n(\beta)$ 可近似为 $J_n(\beta)=\beta^n/(2^n n!)$。证明对正弦调制的 FM，$\beta=0.2$ 足够小到能保证 NBFM。

★ 5.46 占空比为 50% 的双极性平方波，对 NBFM 发射机进行频率调制，其峰值相偏为 10°。假设平方波的峰值为 5 V，周期为 10 ms，在 $t=0$ 的过零点处具有正向坡度。

(a)确定该 NBFM 信号的峰值频偏。

(b)用窄带分析技术计算并绘出信号的频谱。假设载波频率是 30 MHz。

5.47 设计一个宽带 FM 发射机，它使用间接法产生 WBFM 信号。假设 WBFM 信号的载频为 96.9 MHz，并假设当发射机被均方根(rms)值为 1 V、频率为 20 Hz 的正弦信号调制时，会产生峰值频偏为 75 kHz 的高质量 FM 信号。用完整的框图表示你的设计，在不同点标出信号频率和峰值频偏。

5.48 FM 信号 $\left[w_c t+D_f\int_{-\infty}^{t}m(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right]$ 被图 P5.48 所示的波形调制。令 $f_c=420$ MHz。

(a)确定 D_f 的值，以使峰值频偏为 25 kHz。

(b)计算并绘出近似的 PSD。

(c)计算该 FM 信号的带宽，在该带宽以外的频率上谱幅度至少比未调载波的幅度降低 40 dB。

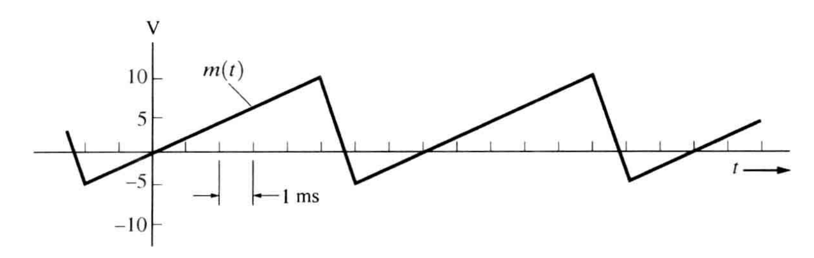


图 P5.48

★ 5.49　采用如图 P5.49 所示的周期性多电平数字测试信号对 WBFM 发射机进行调制。计算并绘出该 WBFM 信号的近似功率谱，$A_c=5$，$f_c=2$ GHz，$D_f=10^5$。

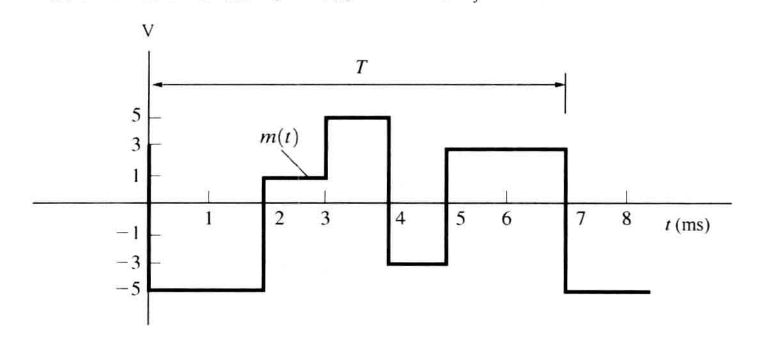


图 P5.49

5.50　图 5.16(b)示出了常用预加重滤波器网络的电路框图。

(a)证明 $f_1=1/(2\pi R_1 C)$。

(b)证明 $f_2=(R_1+R_2)/(2\pi R_1 R_2 C)\approx 1/(2\pi R_2 C)$。

(c)用 R_1、R_2 和 C 计算 K。

5.51　FM 立体声传输的复合基带信号为

$$m_b(t)=[m_L(t)+m_R(t)]+[m_L(t)-m_R(t)]\cos(\omega_{sc}t)+K\cos(\tfrac{1}{2}\omega_{sc}t)$$

图 P5.51 给出了采用开关型的多路信号分离器来恢复 $m_L(t)$ 和 $m_R(t)$ 的 FM 接收机。

(a)确定激励模拟开关的 C 点和 D 点的开关波形。注意确定每一个波形的正确相位。画出这些波形。

(b)画出 PLL 模块更详细的框图。

(c)写出 A 点至 F 点的波形表达式。画出这些点上的标准波形，解释该电路是如何工作的。

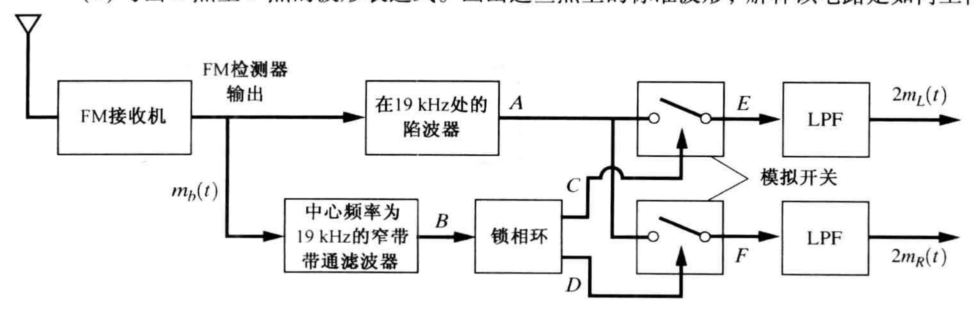


图 P5.51

★ 5.52 在某通信系统中，通过产生一个 RF 信号

$$s(t) = m_1(t)\cos\omega_c t + m_2(t)\sin\omega_c t$$

来同时传输两个基带信号(模拟或数字的)。载频为 7.250 MHz。$m_1(t)$的带宽为 5 kHz，$m_2(t)$的带宽为 10 kHz。

(a)计算 $s(t)$的带宽。

(b)推导出用 $M_1(f)$和 $M_2(f)$表达的 $s(t)$的频谱。

(c)用具有两个开关检测器的超外差式接收机可从 $s(t)$恢复 $m_1(t)$和 $m_2(t)$。画出接收机的框图。画出用来使采样器操作的数字波形。描述出如何得到这些波形。证明它们满足奈奎斯特准则(提示：参考图 P5.51)。

★ 5.53 在带通信道上传输速率为 24 kbps 的矩形二进制脉冲数字基带信号。

(a)计算由交替的“1”和“0”组成的基带数字测试信号键控的 OOK 已调信号的幅度谱。

(b)画出该幅度谱，指出第一零点－零点带宽值。假设载频为 150 MHz。

5.54 对于随机数据模式及 OOK 信号，参照习题 5.53，试求 PSD 并画出结果。将该结果与习题 5.53 中的幅度谱进行比较。

5.55 对于 BPSK 调制信号，重做习题 5.53。

5.56 对于随机数据模式及 BPSK 信号，参照习题 5.53，试求 PSD 并画出结果。将该结果与习题 5.55 中的幅度谱进行比较。

★ 5.57 用一个双极性基带数据信号对载波进行角度调制产生 BPSK 信号 $s(t)=10\cos[\omega_c t + D_p m(t)]$。式中，$m(t)=\pm 1$ 对应于二进制数据信号 10010110，$T_b = 0.0025$ s，$\omega_c = 1000\pi$。用 MATLAB 画出 BPSK 信号波形及调制指数为下述值的对应 FFT 频谱。

(a)$h=0.2$。

(b)$h=0.5$。

(c)$h=1.0$。

5.58 计算调制信号为交替变换的“1”和“0”的 FSK 信号的幅度谱。假设传号频率为 50 kHz，空号频率为 55 kHz，比特率为 2400 bps。确定第一零点-零点带宽。

5.59 假设 4800 bps 的随机数据进行 BPSK 调制后在带通信道上传送。确定传输带宽 B_T，以使在该带宽外包络值降低至少 35 dB。

5.60 如图 5.22(a)所示，$h=1.0$ 时可采用由科斯塔环提供载波频率的相关检波器解调 BPSK 信号。同样，载波参考信号也可由采用 2 倍频器的平方环提供。平方环的框图如图 P5.60 所示。

(a)采用平方环，画出 BPSK 接收机的完整框图。

(b)用数学公式表示波形，说明平方环是如何恢复载波频率的。

(c)证明平方环没有 180°相位模糊问题。

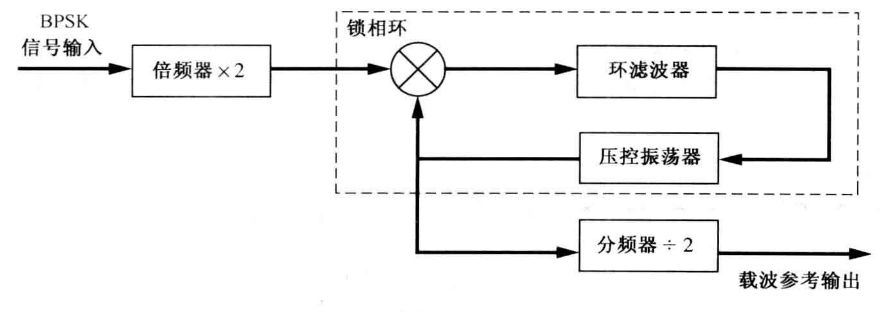


图 P5.60

5.61 二进制数据信号先进行差分编码，然后调制到 PM 发射机上，产生差分编码相移键控信号(DPSK)。峰-峰相偏为 180°，f_c 与比特率 R 有关。

(a) 画出包括差分编码器的发射机框图。

(b) 若输入数据序列为 01011000101，绘出框图中各点的标准波形。

(c) 假设接收机包括一个超外差电路。所采用的检波器示于图 P5.61 中，$T = 1/R$。若 DPSK 中频信号 $v_1(t)$ 峰值为 A_c V，确定门限电压 V_T 的合适值。

(d) 当输入序列如(b)中所示时，画出检波器电路各点的波形。

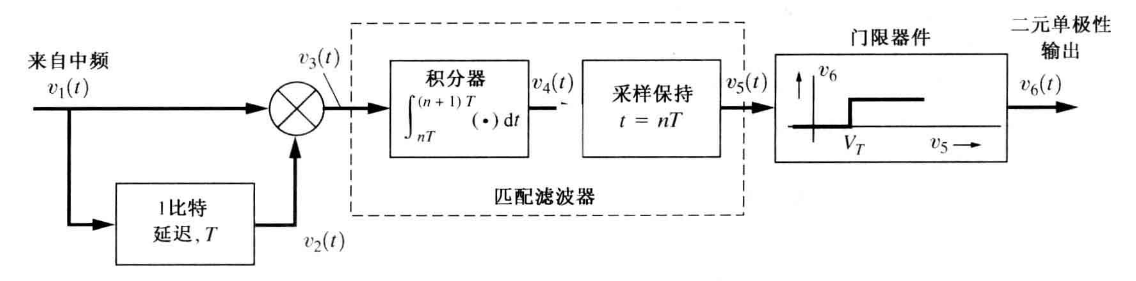


图 P5.61

★ 5.62　一个二进制基带信号先通过滚降系数为 50% 的升余弦滚降滤波器，然后调制到载波上。数据率为 64 kbps。计算：

(a) 产生的 OOK 信号的绝对带宽。

(b) 当传号频率为 150 kHz，空号频率为 155 kHz 时产生的 FSK 信号的近似带宽。

(注意：将这些带宽与习题 5.53 和习题 5.58 得到的带宽进行比较将非常有趣。)

5.63　计算工作在应答模式，速率为 300 bps 的贝尔型 103 调制解调器发射的 FSK 信号的准确幅度谱。假设数据是交替的"1"和"0"。

5.64　从式(5.84)出发，推导出式(5.85)的所有数学步骤。

5.65　当采用图 5.28(b)所示的相干检测器检测 FSK 信号时，都先假设 $\cos\omega_1 t$ 和 $\cos\omega_2 t$ 是正交的。若 $f_1 - f_2 = 2\Delta F$ 非常大，这一条件近似满足。确定使传号和空号 FSK 信号正交所需的精确条件(提示：答案与 f_1、f_2 和 R 有关)。

5.66　证明 FSK 的近似传输带宽为 $B_T = 2R(1 + h/2)$，式中 h 是数字调制指数，R 是比特率。

★5.67　假设在卫星收发机上采用 QPSK 信号传送数据率为 30 Mbps 的数据。收发机的带宽为 24 MHz。

(a) 若对卫星信号进行均衡使其具有等效升余弦滤波器特性，所需的滚降系数是多少?

(b) 是否可找到一滚降系数 r 支持 50 Mbps 的数据率?

★ 5.68　在同相(I)和正交(Q)信道上用非矩形数据脉冲产生 QPSK 信号，数据脉冲的谱对应于平方根升余弦滚降滤波器的转移函数。

(a) 确定 QPSK 信号的 PSD 的公式。

(b) 画出 QPSK 信号的复包络的 PSD，其滚降系数为 $r = 0.35$，数据率归一化为 $R = 1$ bps。类似于图 5.33，在 dB 与归一化比特率的频率坐标平面上画出结果。

5.69　证明两个 BPSK 系统若采用正交(正弦和余弦)载波，可同时工作在同一信道上。画出发射机和接收机的框图。在这个正交载波复合系统中，作为信道零点带宽 B_T 的函数的总数据率 R 是多少? 若一个系统时分复用两信息源，并用 QPSK 载波传输 TDM 数据，比较其数据率与前述系统的总数据速率。

5.70　118 000 英尺长的电话双绞线可用带宽为 750 kHz。在下面两种条件下，确定在电话线上产生 750 kHz 的零点 - 零点带宽的可支持的数据率。

(a) 采用单载波 QPSK 调制(矩形脉冲)。

(b) 采用 QPSK 载波的 OFDM 调制。

5.71　对于采用 QPSK 载波的 OFDM 信号重做习题 5.70。

5.72 假设均衡一电话线信道，使其可在 400 ~ 3100 Hz 上传输带通信号，这样可用信号带宽为 2700 Hz，中间信道(midchannel)频率为 1750 Hz。设计一个允许以 9600 bps 的数据率在信道上传送数据的 16 符号 QAM 调制方案。在该设计中，选择合适的滚降因数 r，绘出 QAM 信号的绝对带宽和 6 dB 带宽。分析讨论为什么选择该 r 值。

5.73 假设 $R=9600$ bps。对矩形数据脉冲，计算 BPSK、QPSK、MSK、64PSK 和 64QAM 的第二零点-零点带宽。分别讨论采用这些调制技术各自的优点和缺点。

5.74 参考图 5.31(b)，画出每一模块输出端的波形，假设输入信号为 TTL 级，数据为 110100101，$\ell=4$ 。解释该 QAM 发射机是如何工作的。

5.75 设计一个接收机(即给出方框图)，该接收机能检测出具有图 5.32 所示 $M=16$ 点星座图的 QAM 波形上的数据。解释这个接收机是如何工作的[提示：分析图 5.31(b)]。

5.76 用 MATLAB 绘出输入数据流为

$$\{-1, -1, -1, +1, +1, +1, -1, -1, -1, +1, -1, -1, +1, -1, -1\}$$

时的 QPSK 和 OQPSK 的同相和正交调制波形，采用矩形脉冲。为方便起见令 $T_b=1$。

★ 5.77 对于 $\pi/4$ QPSK 信号，试求当输入数据流为 10110100101010 时的载波相移，其中最左边的比特最先输入发射机。

5.78 对于 $\pi/4$ QPSK 信号，若采用 $r=0.5$ 的升余弦滚降滤波器，并且数据率为 1.5 Mbps，试求信号的绝对带宽。

5.79 (a)图 5.34 示出Ⅱ类 MSK 的 $x(t)$ 和 $y(t)$ 信号波形。对于Ⅰ类 MSK 重画 $x(t)$、$y(t)$ 波形。
(b)证明式(5.114b)是式(5.114a)的傅里叶变换。

5.80 用 MATLAB 绘出Ⅰ类 MSK 调制波形 $x(t)$、$y(t)$ 及 MSK 信号 $s(t)$。假设输入数据流是

$$\{+1, -1, -1, +1, -1, -1, +1, -1, -1, +1, +1, -1, +1, +1, -1\}$$

同时假设 $T_b=1$，f_c 取值应使绘制 $s(t)$ 的图所用的计算机时间较为合理。

5.81 重复习题 5.80，但输入数据流为

$$\{-1, -1, -1, +1, +1, +1, -1, -1, -1, +1, -1, -1, +1, -1, -1\}$$

该数据流是习题 5.80 中数据流经差分编码后得到的。FFSK 的产生等价于输入数据差分编码后进行Ⅰ类 MSK 产生的信号。FFSK 在输入数据和传号、空号频率间有一一对应的关系。

★ 5.82 用 MATLAB 绘出Ⅱ类 MSK 调制波形 $x(t)$ 和 $y(t)$ 及 MSK 信号 $s(t)$。假设输入数据流为

$$\{-1, -1, -1, +1, +1, +1, -1, -1, -1, +1, -1, -1, +1, -1, -1\}$$

同时假设 $T_b=1$，f_c 的取值应使绘制 $s(t)$ 图所需计算机时间较为合理。

5.83 证明 MSK 可由图 5.36(c)所示的串行方法产生。即证明 MSK 带通滤波器输出端信号的 PSD 就是式(5.115)和式(5.2b)所述的 MSK 谱。

★ 5.84 将矩形数据脉冲通过一个高斯滤波器，然后送入 MSK 发射机，即可产生 GMSK 信号。
(a)证明经高斯滤波器滤过的数据脉冲为

$$p(t)=\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\ln 2}}\right)(BT_b)\int_{\frac{t}{TB_b}-\frac{1}{2}}^{\frac{t}{TB_b}+\frac{1}{2}} e^{-\left[\frac{2\pi^2}{\ln 2}(BT_b)^2x^2\right]}\,dx$$

[提示：计算 $p(t)=h(t)*\Pi(t/T_b)$，其中 $h(t)=\mathscr{F}^{-1}[H(f)]$ 并且 $H(f)$ 由式(5.116)给出。]

(b)$BT_b=0.3$，T_b 归一化为 $T_b=1$，画出 $p(t)$ 曲线。

5.85 采用 40 dB 带宽标准，重新计算表 5.7 中给出的所有信号的谱效率。

5.86 计算并画出 $N=64$ 的 OFDM 信号的 PSD。若输入数据率为 10 Mbps，每个载波采用 16PSK 调制，确定该 OFDM 信号的带宽。

5.87　证明式(5.123)——m 序列的自相关函数——是正确的。提示：运用自相关函数的定义，$R_c(\tau)=\langle c(t)c(t+\tau)\rangle$ 及式(5.122)，其中，

$$c(t)=\sum_{-\infty}^{\infty} c_n p(t-nT_c)$$

并且

$$p(t)=\begin{cases}1, & 0<t<T_c\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

5.88　试求当码片速率为 10 MHz、有 8 级移位寄存器时 m 序列 PN 码的 PSD 表达式，画出该结果。

5.89　参考图 5.40(a)，证明 m 序列 PN 波形的自相关函数的傅里叶级数的复系数由式(5.128)给出。

★ 5.90　假设图 5.42 所示 FH-SS 系统的调制器和解调器是 FSK 型的。

(a)试求发射机输出端的 FSK-FH-SS 信号 $s(t)$ 的数学表达式。

(b)将由(a)得到的 $s(t)$ 作为图 5.42(b)所示接收机的输入[即 $r(t)=s(t)$]，证明接收机带通滤波器的输出是 FSK 信号。

第6章　随机过程和频谱分析

本章要点

- 随机过程
- 功率谱密度
- 线性系统的特性
- 高斯随机过程
- 匹配滤波器

本章将讨论描述随机信号和噪声的数学基础。回顾第1章，我们知道随机信号(相对于确定信号)是用来传递信息的。噪声也是用统计方法进行表述的。因此，了解随机信号和噪声是了解通信系统的基础。

学习本章时，我们假定读者已经对概率、随机变量及集合平均有基本的了解。这些知识都在附录B中有推导。若读者不熟悉这方面的知识，就应先将附录B作为一章的内容来学习。对于学习过这方面课程的读者，快速地浏览一遍附录B即可。

当在问题描述过程中引入时间参数时，随机过程就是相关随机变量概念的扩展。我们将看到，这使得频率响应引入到统计描述中。

6.1　一些基本概念

6.1.1　随机过程

定义　实随机过程是一些具有特定的统计特性的参数(通常是时间)的实函数的集合。

考虑噪声源发出的电压波形(见图6.1)。一个可能的波形为$v(t,E_1)$，另一个为$v(t,E_2)$。在通常情况下，$v(t, E_i)$表示样本空间的事件E_i发生时得到的波形。$v(t, E_i)$称为样本空间的样本函数。所有可能的样本函数$\{v(t, E_i)\}$的集称为集合，并定义描述噪声源的随机过程为$v(t)$，即事件$\{E_i\}$被映射到时间函数集$\{v(t, E_i)\}$中。所有这些函数构成的集合就是随机过程$v(t)$。当我们观察由噪声源产生的电压波形时，我们见到的是某一样本函数。

样本函数可以通过同时观察很多相同的噪声源的输出而得到。为了得到所有的样本函数，则需要无限多个噪声源。

随机过程的定义与随机变量的定义一致。随机变量将事件映射成常数，而随机过程将事件映射为参数t的函数。

定理　随机过程可以被描述成一组有序的随机变量的集合。

参考图6.1，定义一组随机变量的集合$v_1=v(t_1)$，$v_2=v(t_2)$，…，其中$v(t)$是随机过程。这里随机变量$v_j=v(t_j)$取自常数集合$\{v(t_j, E_i)$，对所有$i\}$中的值。

例如，假设噪声源为高斯分布，则其任一随机变量将被描述为

$$f_{v_j}(v_j)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j}\mathrm{e}^{-(v_j-m_j)^2/(2\sigma j^2)} \tag{6.1}$$

其中 $v_j \triangleq v(t_j)$。我们看到，因为 m_j 和 σ_j 分别对应于在时刻 $t=t_j$ 上测得的均值和标准差，所以概率密度函数(PDF)隐含地取决于时间。对于 $t=t_1$ 和 $t=t_2$ 的 $N=2$ 高斯联合分布是二元高斯 PDF $f_v(v_1, v_2)$，由式(B.97)给出，其中 $v_1=v(t_1)$，$v_2=v(t_2)$。

为完整地描述一个普通的随机过程 $x(t)$，需要一个 N 维的 PDF，$f_x(\mathbf{x})$，其中 $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \cdots x_j, \cdots, x_N)$，$x_j \triangleq x(t_j)$，并且 $N\to\infty$。此外，因为

$$f_x(\mathbf{x}) = f_x(x(t_1), x(t_2), \cdots, x(t_N)) \tag{6.2}$$

所以 N 维的 PDF 是 N 个时间常数 $t_1, t_2, \cdots, t_N$的隐函数。

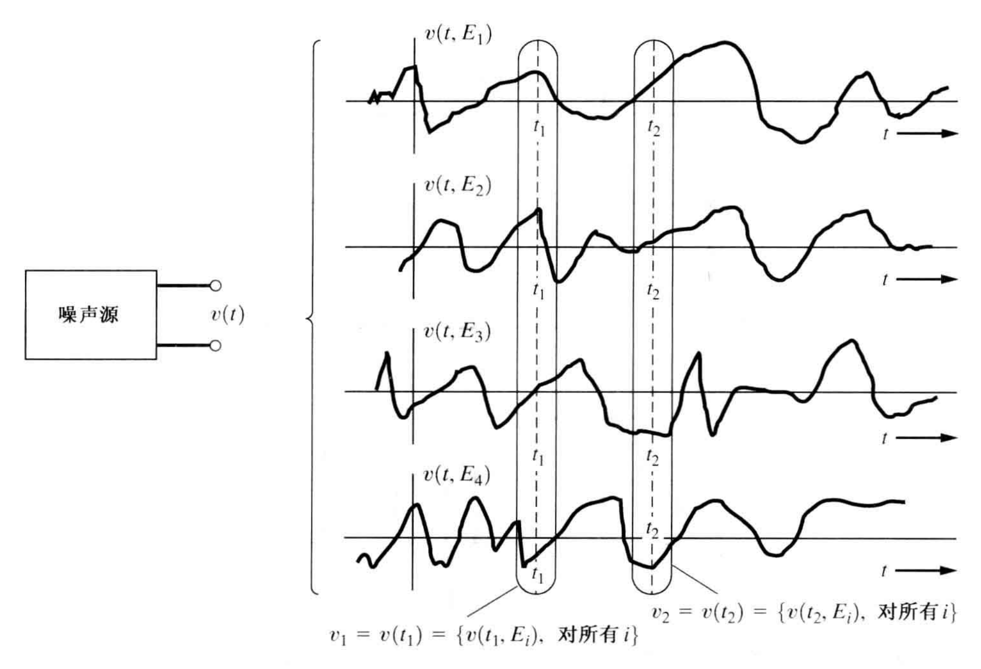


图 6.1　随机噪声源和该随机过程的一些样本

随机过程可分为连续随机过程和离散随机过程。连续随机过程由相关的连续分布的随机变量 $v_j=v(t_j)$组成。前述的高斯随机过程就是连续随机过程的例子。线性通信电路中的噪声通常都是连续型的随机过程(在许多情况下，非线性电路中的噪声也是连续型的)。离散随机过程由具有离散分布的随机变量组成。例如，理想(硬)限幅器输出的就是一个二元(两个离散电平)的随机过程。图 6.2 中给出了二元随机过程的一些样本函数。

例题 6.1　高斯 FDF

画出高斯随机变量的一维 PDF，其均值为 -1，标准差为 2。计算过程和结果见 M 文件Example6_01.m。

6.1.2　平稳和各态历经性

定义　如果对任何 $t_1, t_2, \cdots, t_N$，都有

$$f_x(x(t_1), x(t_2), \cdots, x(t_N)) = f_x(x(t_1+t_0), x(t_2+t_0), \cdots, x(t_N+t_0)) \tag{6.3}$$

其中，t_0 是任意的实常数，则称随机过程 $x(t)$ 是 N 阶平稳的。而且，如果其阶数 $N\to\infty$，则称该随机过程是严格平稳的。

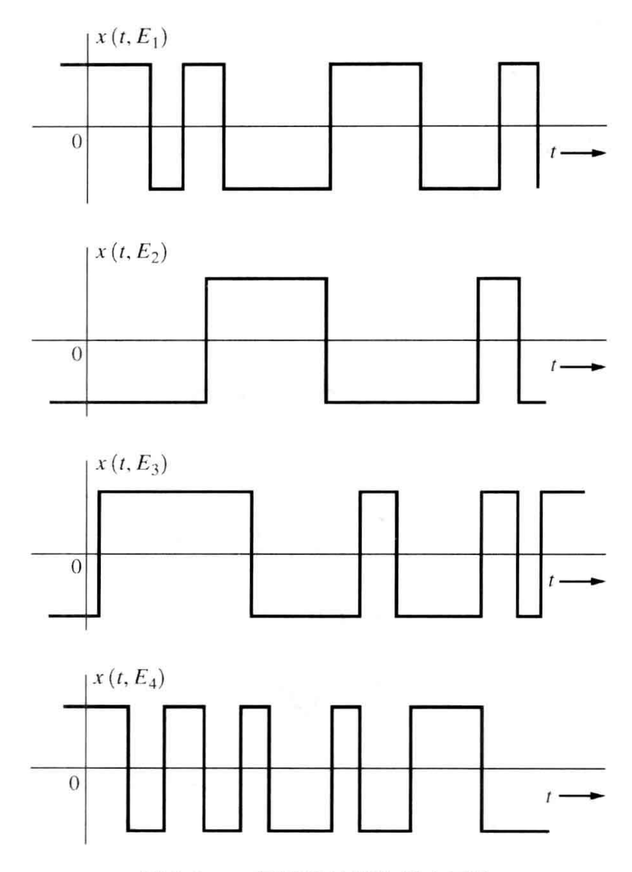


图 6.2　二元随机过程的样本函数

该定义意味着如果将 N 阶的平稳过程转换到时间上，那么其 N 阶的统计特性不变。此外，N 维 PDF 取决于 $N-1$ 个时间差 $t_2-t_1, t_3-t_1, \cdots, t_n-t_1$，因为可以令 $t_0=-t_1$。

例题 6.2　一阶平稳性

分析随机过程 $x(t)$ 以确定它是否是一阶平稳的。由式(6.3)，一阶平稳要求一阶 PDF 不是时间的函数，令随机过程为

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \theta_0) \tag{6.4}$$

情况 1：平稳性结果。首先假设 A 和 ω_0 是确定的常数，θ_0 是随机变量，t 是时间参数。此外，假设 θ_0 在 $-\pi \sim \pi$ 上服从均匀分布。于是 $\psi \triangleq \theta_0 + \omega_0 t$ 是在 $\omega_0 t-\pi < \psi < \omega_0 t+\pi$ 上均匀分布的随机变量。可用附录 B 中 B.8 节推导得到的转换方法求得 $x(t)$ 的一阶 PDF。这实际与例题 B.9 求解的问题相同。由式(B.71)，$x(t)$ 的一阶 PDF 为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}, & |x| \leqslant A \\ 0, & \text{否则} \end{cases} \tag{6.5a}$$

因为该 PDF 不是 t 的函数，所以对情况 1 的假设，$x(t)$ 是一阶平稳过程，其中 θ_0 是随机变量。该结论可应用于 θ_0 是异步振荡器的随机初始相位的情况。

情况 2：非平稳结果。第二，假设 A、ω_0 和 θ_0 均为确知的常数，因此在任意时刻，$x(t)$ 的取值以概率 1 已知。于是，$x(t)$ 的一阶 PDF 为

$$f(x) = \delta(x - A\sin(\omega_0 t + \theta_0)) \tag{6.5b}$$

该 PDF 是 t 的函数。于是，对情况 2 的假设，$x(t)$ 不是一阶平稳的，其中 θ_0 是确知常数。该结果将应用于振荡器与一些外部源同步，于是其起始相位是已知的 θ_0 的情形。

定义　如果一个随机过程的任意样本函数的所有时间平均等于相应的集平均(期望值)，那么称该随机过程是各态历经的。

电气工程中两个重要的平均值是直流(DC)和均方根(RMS)。这些值是以时间平均的形式来定义的，但是如果该过程是各态历经的，也可以利用集平均来计算这些值。$x(t)$ 的 DC 值为 $x_{dc} \triangleq \langle x(t) \rangle$。当 $x(t)$ 是各态历经时，时间平均等于集平均，于是得到：

$$x_{dc} \triangleq \langle x(t) \rangle \equiv \overline{[x(t)]} = m_x \tag{6.6a}$$

其中时间平均为

$$\langle [x(t)] \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x(t)]\, dt \tag{6.6b}$$

集平均为

$$\overline{[x(t)]} = \int_{-\infty}^{\infty} [x] f_x(x) dx = m_x \tag{6.6c}$$

其中，m_x 代表均值。同样，均方根(RMS)值为

$$X_{rms} \triangleq \sqrt{\langle x^2(t) \rangle} \equiv \sqrt{\overline{x^2}} = \sqrt{\sigma_x^2 + m_x^2} \tag{6.7}$$

其中，σ_x^2 是 $x(t)$ 的方差。

总之，若随机过程是各态历经的，那么所有的时间平均和集平均都可以互换。于是时间平均不可能是时间的函数，因为时间参数平均掉了。此外，各态历经过程肯定是平稳的，否则集平均(如各阶矩)将是时间的函数。然而，并不是所有的平稳过程都是各态历经的。

例题 6.3　各态历经随机过程

令一随机过程为

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta) \tag{6.8}$$

其中，A 和 ω_0 是常数，θ 是在 $(0, 2\pi)$ 上服从均匀分布的随机变量。

首先，计算集合平均。均值和二阶矩为

$$\overline{x} = \int_{-\infty}^{\infty} [x(\theta)] f_\theta(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} [A\cos(\omega_0 t + \theta)] \frac{1}{2\pi} d\theta = 0 \tag{6.9}$$

以及

$$\overline{x^2(t)} = \int_0^{2\pi} [A\cos(\omega_0 t + \theta)]^2 \frac{1}{2\pi} d\theta = \frac{A^2}{2} \tag{6.10}$$

在该例中，计算集平均时时间参数 t 消失了。除非 $x(t)$ 是平稳的，否则不会出现这种情况。

其次，利用随机过程的典型样本函数来计算相应的时间平均。其中一个样本函数为 $x(t, E_1) = A\cos\omega_0 t$，它是 $\theta = 0$ 时相应的一个事件(结果)。令 θ 取 $0 \sim 2\pi$ 之间的值可计算出任意样本函数的时间平均。一阶矩和二阶矩的时间平均分别是

$$\langle x(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} A\cos(\omega_0 t + \theta) dt = 0 \tag{6.11}$$

和

$$\langle x^2(t)\rangle = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}[A\cos(\omega_0 t+\theta)]^2\,dt = \frac{A^2}{2} \tag{6.12}$$

其中，$T_0=1/f_0$，并且采用了式(2.4)中对周期函数取时间平均的运算。在该例中，当取时间平均时，θ 消失了。这是由于 $x(t)$ 是各态历经过程的结果。但是在非各态历经的例子中，时间平均将是一随机变量。

比较式(6.9)和式(6.11)及式(6.10)和式(6.12)，我们看到一阶矩和二阶矩的时间平均等于集平均。于是，我们推测该过程是各态历经的。然而，我们没有证明该随机过程是各态历经的，因为没有计算所有可能的时间平均和集平均，或所有的阶矩。但是，其他时间平均和集平均似乎是相等的，因此假设该随机过程是各态历经的。总的来说，要证明一个过程是各态历经是困难的，因此当过程是平稳的，其某些时间平均等于相应的集平均时，我们就假设它是各态历经的。因为一个各态历经过程的时间平均不可能是时间的函数，因此它一定是平稳的。然而，如果一个过程是平稳的，那么它可能是各态历经的，也可能不是。

在本章末尾的习题 6.2 中将证明，若 θ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 而非 $(0,2\pi)$ 上服从均匀分布，那么式(6.8)描述的随机过程将不是平稳的(于是也不是各态历经的)。

6.1.3 相关函数与广义平稳

定义 实随机过程 $x(t)$ 的自相关函数为

$$R_x(t_1,t_2)=\overline{x(t_1)x(t_2)}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2 f_x(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 \tag{6.13}$$

其中，$x_1=x(t_1)$ 和 $x_2=x(t_2)$。若随机过程是二阶平稳的，自相关函数将仅是时间差 $\tau=t_2-t_1$ 的函数，即若 $x(t)$ 是二阶平稳的①，则

$$R_x(\tau)=\overline{x(t)x(t+\tau)} \tag{6.14}$$

定义 若

$$1.\ \overline{x(t)}=\text{常数} \tag{6.15a}$$

$$2.\ R_x(t_1,t_2)=R_x(\tau) \tag{6.15b}$$

其中，$\tau=t_2-t_1$，那么该随机过程被称为是广义平稳的。

二阶或二阶以上的平稳随机过程被称为是广义平稳的。但是，逆命题不一定正确。这是因为对广义平稳，仅某些集合平均，确切地说，式(6.15)需满足广义平稳性。② 如式(6.15)所示，广义平稳过程的均值和自相关函数不会因时间初始点的平移而改变。这意味着产生广义平稳随机过程的相关电路元件不会随时间漂移(老化)。

自相关函数给出了与随机过程相关的频率响应。例如，假设当 τ 从 0 增加到某一正值时，$R_x(\tau)$ 保持相对恒定，那么，在平均意义上，x 在 $t=t_1$ 和 $t=t_1+\tau$ 的样本值几乎相同。于是，$x(t)$ 随时间变化不太快(平均)，并且我们可以料想 $x(t)$ 的谱中应有低频成分。另一方面，若 $R_x(\tau)$ 随 τ 的增加而迅速下降，那么可以料想 $x(t)$ 随时间变化很快，因此其谱中应有高频成分

---

① 第 2 章定义了时间平均的自相关函数。当过程是各态历经时，时间平均的自相关函数，即式(2.68)，等价于集合平均的自相关函数，即式(6.14)。

② 高斯随机过程是一个例外，它的广义平稳就意味着严格平稳，因为 $N\to\infty$ 维的高斯 PDF 完全由 $x(t_1),x(t_2),\cdots,x(t_N)$ 的均值、方差和协方差所决定。

出现。在6.2节中我们将严格地推导该结论，其中将证明作为频率的函数的PSD是自相关函数的傅里叶变换。

实广义平稳过程的自相关函数的性质如下：

$$1.\ R_x(0) = \overline{x^2(t)} = \text{二阶矩} \tag{6.16}$$

$$2.\ R_x(\tau) = R_x(-\tau) \tag{6.17}$$

$$3.\ R_x(0) \geqslant |R_x(\tau)| \tag{6.18}$$

前两个性质可由$R_x(\tau)$的定义直接得到，如式(6.14)所示。此外，若$x(t)$是各态历经的，$R(0)$等于$x(t)$的均方根值。性质3的证明如下：$[x(t); x(t+\tau)]^2$是非负的，于是，

$$\overline{[x(t) \pm x(t+\tau)]^2} \geqslant 0$$

或者

$$\overline{x^2(t)} \pm \overline{2x(t)x(t+\tau)} + \overline{x^2(t+\tau)} \geqslant 0$$

该公式等价于

$$R_x(0) \pm 2R_x(\tau) + R_x(0) \geqslant 0$$

从而得到性质3。

自相关函数可以推广为定义两个随机过程的相关函数。

定义　两个实过程$x(t)$和$y(t)$的互相关函数为

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \overline{x(t_1)y(t_2)} \tag{6.19}$$

此外，如果$x(t)$和$y(t)$是联合平稳的①，其互相关函数变为

$$R_{xy}(t_1, t_2) = R_{xy}(\tau)$$

其中，$\tau = t_2 - t_1$。

联合平稳实随机过程的互相关函数的一些性质如下：

$$1.\ R_{xy}(-\tau) = R_{yx}(\tau) \tag{6.20}$$

$$2.\ |R_{xy}(\tau)| \leqslant \sqrt{R_x(0)R_y(0)} \tag{6.21}$$

和

$$3.\ |R_{xy}(\tau)| \leqslant \tfrac{1}{2}[R_x(0) + R_y(0)] \tag{6.22}$$

由定义式(6.19)，可直接得到性质1。性质2来自于如下的事实：

$$\overline{[x(t) + Ky(t+\tau)]^2} \geqslant 0 \tag{6.23}$$

对任何实常数K都成立。将式(6.23)展开，得到关于K的二次方程：

$$[R_y(0)]K^2 + [2R_{xy}(\tau)]K + [R_x(0)] \geqslant 0 \tag{6.24}$$

若K为实数，式(6.24)的判别式应为非正的②，即

---

① 类似于式(6.3)中的定义，当

$$f_{xy}(x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_N), y(t_{N+1}), y(t_{N+2}), \cdots, y(t_{N+M})) = f_{xy}(x(t_1+t_0), x(t_2+t_0), \cdots, x(t_N+t_0), y(t_{N+1}+t_0), y(t_{N\pm 2}+t_0), \cdots, y(t_{N\pm M}+t_0))$$

时，$x(t)$和$y(t)$称为联合平稳；若$N\to\infty$和$M\to\infty$时该等式仍成立，称$x(t)$和$y(t)$是严格联合平稳；若$N=2, M=2$，则称$x(t)$和$y(t)$是广义联合平稳的。

② 只有当二次式等于0时，参数K才是二次方程式的根。当二次式为正时，根为复值。

$$[2R_{xy}(\tau)]^2 - 4[R_y(0)][R_x(0)] \leqslant 0 \tag{6.25}$$

这等价于由式(6.21)描述的性质2。性质3可由式(6.24)直接导出，其中$K=\pm1$。此外，

$$|R_{xy}(\tau)| \leqslant \sqrt{R_x(0)R_y(0)} \leqslant \tfrac{1}{2}[R_x(0) + R_y(0)] \tag{6.26}$$

因为两个正数$R_x(0)$和$R_y(0)$的几何平均不会大于它们的算术平均。

注意，两个随机过程$x(t)$和$y(t)$的互相关函数是式(B.91)定义的两个随机变量的联合均值的扩展。在此，用$x(t)$代替x_1，用$y(t+\tau)$代替x_2。于是，若对所有的τ值，有

$$R_{xy}(\tau) = [\overline{x(t)}][\overline{y(t+\tau)}] = m_x m_y \tag{6.27}$$

那么称两个随机过程$x(t)$和$y(t)$是不相关的。类似地，若对所有的τ值，有

$$R_{xy}(\tau) = 0 \tag{6.28}$$

那么称两个随机过程$x(t)$和$y(t)$是正交的。

如前所述，若$y(t)=x(t)$，互相函数变成自相关函数。在这种意义下，自相关函数是互相关函数的特例。当然，当$y(t)\equiv x(t)$时，所有互相关函数的性质都简化为自相关函数的性质。

若随机过程$x(t)$和$y(t)$是联合各态历经的，则可用时间平均取代集合平均。对于相关函数，这变为

$$R_{xy}(\tau) \triangleq \overline{x(t)y(t+\tau)} \equiv \langle x(t)y(t+\tau)\rangle \tag{6.29}$$

其中，

$$\langle[\cdot]\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[\cdot]\,\mathrm{d}t \tag{6.30}$$

当$x(t)$和$y(t)$是联合各态历经时。在这种情况下，电压或电流波形的互相关函数和自相关函数可由包括延迟线、倍频器及积分器的电路来测量。测量技术由图6.3给出。

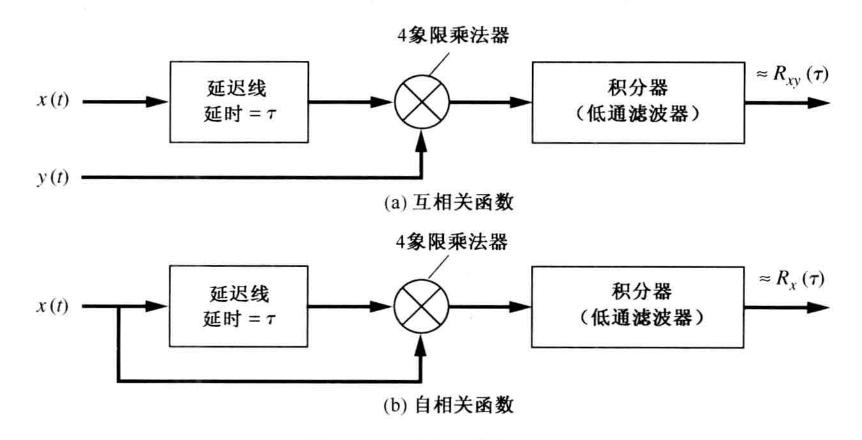


图6.3 相关函数的测量

6.1.4 复随机过程

在前面几章中，我们可以看到复包络$g(t)$对描述带通波形时非常有用。带通随机信号和噪声也可描述成复包络的形式，其中$g(t)$是复基带随机过程。

定义 复随机过程为

$$g(t) \triangleq x(t) + \mathrm{j}y(t) \tag{6.31}$$

其中，$x(t)$和$y(t)$是实随机过程，并且$\mathrm{j}=\sqrt{-1}$。

若 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是联合严格平稳的，那么复随机过程是严格平稳的，即

$$f_g(x(t_1),\ y(t_1'),\ x(t_2),\ y(t_2'),\cdots,x(t_N),\ y(t_N'))$$
$$= f_g(x(t_1+t_0),\ y(t_1'+t_0),\cdots,x(t_N+t_0),\ y(t_N'+t_0)) \tag{6.32}$$

对任意的 t_0 值以及任意的 $N\to\infty$ 。

相关函数的定义可以推广到复随机过程。

定义　复随机过程的自相关函数为

$$R_g(t_1,\ t_2) = \overline{g^*(t_1)g(t_2)} \tag{6.33}$$

其中，星号表示取复共轭。

此外，若 $\overline{g(t)}$ 是复常数，并且 $R_g(t_1,t_2)=R_g(\tau)$，其中 $\tau=t_2-t_1$，那么复随机过程是广义平稳的。广义平稳过程的复随机过程的自相关函数具有厄米特(Hermitian)对称性：

$$R_g(-\tau) = R_g^*(\tau) \tag{6.34}$$

定义　两个复随机过程 $g_1(t)$ 和 $g_2(t)$ 的互相关函数为

$$R_{g_1g_2}(t_1,\ t_2) = \overline{g_1^*(t_1)g_2(t_2)} \tag{6.35}$$

当两个复随机过程是联合广义平稳时，互相关函数变为

$$R_{g_1g_2}(t_1,t_2) = R_{g_1g_2}(\tau)$$

其中，$\tau=t_2-t_1$。

在 6.7 节中，我们在对带通随机信号和噪声的统计描述中应用这些定义。

6.2　功率谱密度

6.2.1　定义

对于式(2.66)给出的确知波形，第 2 章给出了其 PSD $\mathcal{P}_x(f)$ 的定义。这里我们推导出应用于随机过程谱分析的更通用的定义。

假设 $x(t,\ E_i)$ 代表随机过程 $x(t)$ 的样本函数，该样本函数的截短函数可由下式定义：

$$x_T(t,\ E_i) = \begin{cases} x(t,\ E_i), & |t| < \frac{1}{2}T \\ 0, & \text{否则} \end{cases} \tag{6.36}$$

其中，下标 T 代表截短函数。相应的傅里叶变换为

$$X_T(f,\ E_i) = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t,E_i)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}t$$
$$= \int_{-T/2}^{T/2} x(t,E_i)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}t \tag{6.37}$$

这意味着 X_T 自身是一个随机过程，因为 x_T 是随机过程。我们将简化符号并且用 $X_T(f)$、$x_T(t)$ 及 $x(t)$ 来简单地表示它们，因为显然它们都是随机过程。

在时间区间$(-T/2,\ T/2)$上的归一化能量①为

① 若 $x(t)$ 是电压或电流波形，E_T 是每欧姆(即 $R=1$)上的能量。

$$E_T = \int_{-\infty}^{\infty} x_T^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(f)|^2 df \tag{6.38}$$

在此，利用帕塞瓦尔(Parseval)定理得到第二个积分。因为 $x(t)$ 是随机过程，所以 E_T 是随机变量。此外，对式(6.38)取集平均可以得到平均归一化能量：

$$\overline{E}_T = \int_{-T/2}^{T/2} \overline{x^2(t)}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{x_T^2(t)}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{|X_T(f)|^2}\,df \tag{6.39}$$

归一化平均功率就是单位时间上消耗的能量，于是归一化平均功率为

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \overline{x^2(t)}\,dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{x_T^2(t)}\,dt$$

或者

$$P = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\overline{|X_T(f)|^2}\right]df = \overline{x^2(t)} \tag{6.40}$$

在计算式(6.40)中的极限时，先取集平均再求极限非常重要，因为我们要保证 $X_T(f)$ 是有限值[因为 $x(t)$ 是功率信号，所以 $X(f)=\lim_{T\to\infty}X_T(f)$ 可能不存在]。注意，式(6.40)表明，对于随机过程，平均归一化功率由二阶矩的时间平均给出。当然，若 $x(t)$ 是广义平稳的，那么 $\langle\overline{x^2(t)}\rangle = \overline{x^2(t)}$，因为 $\overline{x^2(t)}$ 是常数。

从第2章PSD的定义，可知

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}(f)\,df \tag{6.41}$$

于是，可知下述的PSD定义与第2章中式(2.66)给出的定义是一致的。

定义 随机过程 $x(t)$ 的功率谱密度(PSD)为

$$\mathcal{P}_x(f) = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{[\overline{|X_T(f)|^2}]}{T}\right) \tag{6.42}$$

其中，

$$X_T(f) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j2\pi ft}\,dt \tag{6.43}$$

6.2.2 维纳-欣钦定理

通常，应用下述定理，随机过程的PSD可由自相关函数求得。

维纳-欣钦定理①：若 $x(t)$ 是广义平稳随机过程，可用自相关函数的傅里叶变换求得其PSD：

$$\mathcal{P}_x(f) = \mathcal{F}[R_x(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}\,d\tau \tag{6.44}$$

相反，

① 名字取自于美国数学家 Norbert Wiener(1894—1964)和德国数学家 A. I. Khintchine(1894—1959)。德文名字的其他拼法为 Khinchine 和 Khinchin。

$$R_x(\tau) = \mathscr{F}^{-1}[\mathscr{P}_x(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{P}_x(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f\tau}\mathrm{d}f \tag{6.45}$$

条件是对大的 τ 值，$R(\tau)$ 足够小，以使得

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tau R(\tau)|\,\mathrm{d}\tau < \infty \tag{6.46}$$

若用 $\langle R_x(t,t+\tau)\rangle$ 代替 $R_x(\tau)$，那么该定理对非平稳过程也成立。

证明　由 PSD 的定义，我们得到：

$$\mathscr{P}_x(f) = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{\overline{|X_T(f)|^2}}{T}\right)$$

其中，

$$\begin{aligned}\overline{|X_T(f)|^2} &= \overline{\left|\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\right|^2} \\ &= \int_{-T/2}^{T/2}\int_{-T/2}^{T/2} \overline{x(t_1)x(t_2)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t_2}\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\end{aligned}$$

并且假定 $x(t)$ 为实函数。但是 $\overline{x(t_1)x(t_2)} = R_x(t_1,t_2)$。此外，令 $\tau = t_2 - t_1$，将变量 t_2 用 $\tau + t_1$ 替换，于是，

$$\overline{|X_T(f)|^2} = \int_{t_1=-T/2}^{t_1=T/2}\underbrace{\left[\int_{\tau=-T/2-t_1}^{\tau=T/2-t_1} R_x(t_1, t_1+\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}t_1}_{①} \tag{6.47}$$

图 6.4 给出了该二重积分的积分区域。在该图中，①表示对应的内部积分和微分宽度 $\mathrm{d}t_1$ 的乘积所覆盖的区域。要简单地计算该二重积分，应改变积分顺序。如图所示，这可以通过在 $\tau<0$ 时用②作为积分区域，在 $\tau\geqslant 0$ 时用③作为积分区域来完成。于是，式(6.47)变为

$$\begin{aligned}\overline{|X_T(f)|^2} &= \int_{-T}^{0}\underbrace{\left[\int_{t_1=-T/2-\tau}^{t_1=T/2} R_x(t_1,t_1+\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}t_1\right]\mathrm{d}\tau}_{②} \\ &\quad + \int_{0}^{T}\underbrace{\left[\int_{t_1=-T/2}^{t_1=T/2-\tau} R_x(t_1, t_1+\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}t_1\right]\mathrm{d}\tau}_{③}\end{aligned} \tag{6.48}$$

现在，假设 $x(t)$ 是平稳的，于是 $R_x(t_1,t_1+\tau) = R_x(\tau)$，而且因子 $R_x(\tau)$ 在里面的积分之外。于是，

$$\begin{aligned}\overline{|X_T(f)|^2} &= \int_{-T}^{0} R_x(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\left[t_1\Big|_{-T/2-\tau}^{T/2}\right]\mathrm{d}\tau + \int_{0}^{T} R(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\left[t_1\Big|_{-T/2}^{T/2-\tau}\right]\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-T}^{0}(T+\tau)R_x(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau + \int_{0}^{T}(T-\tau)R_x(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

该等式可简洁地写成

$$\overline{|X_T(f)|^2} = \int_{-T}^{T}(T-|\tau|)R_x(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau \tag{6.49}$$

将式(6.49)代入式(6.42)，得到：

$$\mathcal{P}_x(f) = \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\left(\frac{T-|\tau|}{T}\right)R_x(\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau \qquad (6.50a)$$

或者

$$\mathcal{P}_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty}R_x(\tau)e^{j\omega\tau}\,d\tau - \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{|\tau|}{T}R_x(\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau \qquad (6.50b)$$

运用式(6.46)的假设，我们看到右边的积分为0，于是式(6.50b)简化成式(6.44)。于是，定理得证。对应逆关系可直接由傅里叶变换的性质证明。此外，若 $x(t)$ 是非平稳的，只要我们用 $\langle R_x(t_1, t_1+\tau)\rangle = R_x(\tau)$ 将 $R_x(t_1, t_1+\tau)$ 替换代入式(6.48)，仍然可以得到式(6.44)。

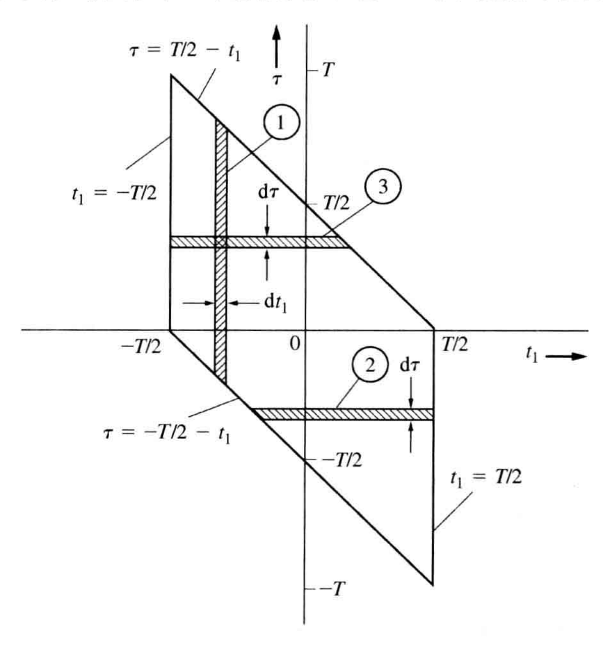


图6.4 式(6.47)和式(6.48)的积分区域

比较PSD的定义和维纳-欣钦定理，我们看到可以用两种不同的方法计算随机过程的PSD。

1. 通过用式(6.42)给出的定义的直接法来计算PSD。
2. 通过计算 $R_x(\tau)$ 傅里叶变换的间接法来计算PSD，其中首先得到 $R_x(\tau)$。

例题6.4将给出这两种方法。

6.2.3 PSD的性质

PSD的一些性质为：

1. $\mathcal{P}_x(f)$ (6.51)
2. $\mathcal{P}_x(f) \geqslant 0$ (6.52)
3. 当 $x(t)$ 是实数时，$\mathcal{P}_x(-f) = \mathcal{P}_x(f)$ (6.53)
4. $\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{P}_x(f)\,df = P =$ 总归一化功率 (6.54a)

当$x(t)$是广义平稳随机过程时，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{P}_x(f)\,\mathrm{d}f = P = \overline{x^2} = R_x(0) \tag{6.54b}$$

5. $\mathcal{P}_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty}R_x(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ (6.55)

这些性质由PSD的定义及应用维纳-欣钦定理可直接得到。

例题6.4　计算双极性基带信号的PSD

令$x(t)$是随机二元数据的双极性信号。图6.5(a)给出了该信号的一个样本函数。假设各比特数据是相互独立的，并且任何比特间隔上得到二元“1”的概率为$\frac{1}{2}$。试求$x(t)$的PSD。

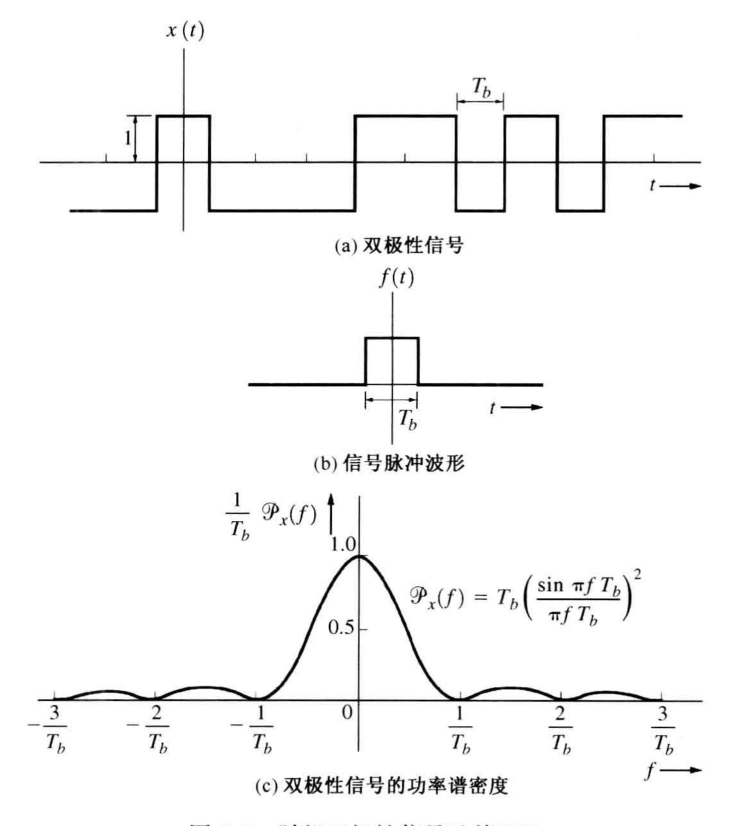


图6.5　随机双极性信号及其PSD

双极性信号可以建模为

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n f(t - nT_b) \tag{6.56}$$

其中，$f(t)$是信号脉冲波形，如图6.5(b)所示，T_b是一个比特的持续期。$\{a_n\}$是代表二元数据的随机变量的集合。已知随机变量间是相互独立的。显然，如题中所述，每个随机变量在$a_n = \pm 1$上是离散分布的，并且$P(a_n = 1) = P(a_n = -1) = \frac{1}{2}$。

首先用方法1来计算$x(t)$的PSD，这需要求得$X_T(f)$。我们通过截断公式(6.56)得到$x_T(t)$，即

$$x_T(t) = \sum_{n=-N}^{n=N} a_n f(t - nT_b)$$

其中，$T/2 = \left(N + \frac{1}{2}\right)T_b$。于是，

$$X_T(f) = \mathscr{F}[x_T(t)] = \sum_{n=-N}^{N} a_n \mathscr{F}[f(t - nT_b)] = \sum_{n=-N}^{N} a_n F(f) e^{-j\omega n T_b}$$

或者

$$X_T(f) = F(f) \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{-j\omega n T_b} \tag{6.57}$$

其中，$F(f) = \mathscr{F}[f(t)]$。当将式(6.57)代入式(6.42)时，得到的 PSD 为

$$\begin{aligned} \mathscr{P}_x(f) &= \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}|F(f)|^2 \overline{\left|\sum_{n=-N}^{N} a_n e^{-j\omega n T_b}\right|^2}\right) \\ &= |F(f)|^2 \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\sum_{n=-N}^{N}\sum_{m=-N}^{N} \overline{a_n a_m} e^{j(m-n)\omega T_b}\right) \end{aligned} \tag{6.58}$$

现在需计算双极性信号($a_n = \pm 1$)的平均 $\overline{a_n a_m}$。我们有

$$\overline{a_n a_m} = \begin{cases} \overline{a_n^2}, & n = m \\ \overline{a_n a_m}, & n \neq m \end{cases}$$

其中，$n \neq m$ 时，$\overline{a_n a_m} = \overline{a_n}\ \overline{a_m}$，因为 a_n 和 a_m 是独立的。利用 a_n 的离散分布特性，可得到：

$$\overline{a_n} = (+1)\tfrac{1}{2} + (-1)\tfrac{1}{2} = 0$$

类似地，$\overline{a_m} = 0$。此外，

$$\overline{a_n^2} = (+1)^2\left(\tfrac{1}{2}\right) + (-1)^2\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1$$

于是，

$$\overline{a_n a_m} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases} \tag{6.59}$$

利用该结果，式(6.58)变为

$$\mathscr{P}_x(f) = |F(f)|^2 \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\sum_{n=-N}^{N} 1\right)$$

并且由于 $T = 2\left(N + \frac{1}{2}\right)T_b$，

$$\mathscr{P}_x(f) = |F(f)|^2 \lim_{N\to\infty}\left[\frac{2N + 1}{(2N + 1)T_b}\right]$$

或者

$$\mathscr{P}_x(f) = \frac{1}{T_b}|F(f)|^2 \quad (\textbf{双极性信号}) \tag{6.60}$$

对于图 6.5(b)所示的矩形脉冲波形，有

$$F(f) = T_b\left(\frac{\sin \pi f T_b}{\pi f T_b}\right) \tag{6.61}$$

于是，具有矩形脉冲波形的双极性信号的 PSD 为

$$\mathscr{P}_x(f) = T_b\left(\frac{\sin \pi f T_b}{\pi f T_b}\right)^2 \tag{6.62}$$

该 PSD 由图 6.5(c)给出。[1] 零点带宽 $B=1/T_b=R$，其中 R 是比特率。注意，式(6.62)满足前述的 PSD 函数的性质。

下面用方法 2 计算双极性信号的 PSD。这包括计算自相关函数 $R_x(\tau)$ 以及计算其傅里叶变换来得到 PSD。利用式(6.56)，自相关函数为

$$R_x(t, t+\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)}$$
$$= \overline{\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n f(t-nT_b) \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m f(t+\tau-mT_b)}$$
$$= \sum_n \sum_m \overline{a_n a_m} f(t-nT_b) f(t+\tau-mT_b)$$

利用式(6.59)，该公式简化为

$$R_x(t, t+\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t-nT_b) f(t+\tau-nT_b) \tag{6.63}$$

显然，因为自相关函数取决于绝对时间 t，所以 $x(t)$ 不是广义平稳过程。为了化简式(6.63)，需要设计一种特殊类型的脉冲波形。再一次假设采用矩形脉冲波形：

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leqslant T_b/2 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

于是脉冲乘积项变为

$$f(t-nT_b)f(t+\tau-nT_b) = \begin{cases} 1, & |t-nT_b| \leqslant T_b/2 \text{ 和 } |t+\tau-nT_b| \leqslant T_b/2 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

由不等式，仅当

$$(n-\tfrac{1}{2})T_b \leqslant t \leqslant (n+\tfrac{1}{2})T_b$$

和

$$(n-\tfrac{1}{2})T_b - \tau \leqslant t \leqslant (n+\tfrac{1}{2})T_b - \tau$$

时，我们得到上述乘积项的值为 1。

假设 $\tau \geqslant 0$，只要 $\tau \leqslant T_b$，则当

$$(n-\tfrac{1}{2})T_b \leqslant t \leqslant (n+\tfrac{1}{2})T_b - \tau$$

时，我们有乘积项的值为 1。因而，对于 $0 \leqslant \tau \leqslant T_b$，

$$R_x(t, t+\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{cases} 1, & (n-\tfrac{1}{2})T_b \leqslant t \leqslant (n+\tfrac{1}{2})T_b - \tau \\ 0, & 其他 \end{cases} \tag{6.64}$$

我们知道，若令 $R_x(\tau) = \langle R_x(t, t+\tau) \rangle$，那么维纳-欣钦定理对于非平稳过程也成立。利用式(6.64)，得到：

$$R_x(\tau) = \langle R_x(t, t+\tau) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{cases} 1, & (n-\tfrac{1}{2})T_b \leqslant t \leqslant (n+\tfrac{1}{2})T_b - \tau \\ 0, & 其他 \end{cases} \mathrm{d}t$$

或者

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{n=-N}^{N} \left(\int_{(n-1/2)T_b}^{(n+1/2)T_b-\tau} 1 \, \mathrm{d}t \right)$$

其中，$T/2 = \left(N - \dfrac{1}{2}\right)T_b$。于是简化为

[1] 因为正和负脉冲被假设为等幅的，所以该双极性信号的 PSD 是连续的。

$$R_x(\tau) = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{(2N+1)T_b}(2N+1)\begin{Bmatrix}(T_b-\tau), & 0\leqslant\tau\leqslant T_b\\ 0, & \tau > T_b\end{Bmatrix}\right]$$

或者

$$R_x(\tau) = \begin{cases}\dfrac{T_b-\tau}{T_b}, & 0\leqslant\tau\leqslant T_b\\ 0, & \tau > T_b\end{cases} \tag{6.65}$$

$\tau<0$ 时也可以得到类似的结果。然而，我们知道 $R_x(-\tau)=R_x(\tau)$，于是式(6.65)可以推广至所有的 τ 值。从而，

$$R_x(\tau) = \begin{cases}\dfrac{T_b-|\tau|}{T_b}, & |\tau|\leqslant T_b\\ 0, & \text{否则}\end{cases} \tag{6.66}$$

这表明 $R_x(\tau)$ 是三角波。计算式(6.66)的傅里叶变换，我们得到矩形比特形状的双极性信号的 PSD 为

$$\mathcal{P}_x(f) = T_b\left(\frac{\sin \pi f T_b}{\pi f T_b}\right)^2 \tag{6.67}$$

由方法 2 得到的结果与由方法 1 得到的结果相同。

6.2.4 数字信号的 PSD 的通用公式

我们现在推导数字信号的 PSD 的通用公式。例题 6.4 中的 PSD 公式只在 $a_n=\pm 1$ 的双极性信号并且比特间不相关的情况下成立。由式(6.56)开始，可以得到数据 a_n 自相关函数的通用结论。如图 3.12 和图 3.14 所示，数字信号可以是二元也可以是多电平的。符号脉冲 $f(t)$ 的持续期(宽度)为 T_s。对于二元数据，$T_s=T_b$，T_b 是 1 比特的持续期。我们定义数据的自相关函数为

$$R(k) = \overline{a_n a_{n+k}} \tag{6.68}$$

接着，我们改变式(6.58)中的序号，令 $m=n+k$。于是，利用式(6.68)以及 $T=(2N+1)T_s$，式(6.58)变成

$$\mathcal{P}_x(f) = |F(f)|^2 \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{(2N+1)T_s}\sum_{n=-N}^{n=N}\sum_{k=-N-n}^{k=N-n}R(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega T_s}\right]$$

用 $2N+1$ 代替外面和式的序号 n，可得到如下公式[该过程严格说来并不正确，因为里面的和式也是 n 的函数。正确的步骤是改变求和的顺序，类似于由式(6.47)～式(6.50)那样改变积分的顺序。当 $N\to\infty$ 时计算其极限，结果将与下面得到的结果相同]：

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_x(f) &= \frac{|F(f)|^2}{T_s}\lim_{N\to\infty}\left[\frac{(2N+1)}{(2N+1)}\sum_{k=-N-n}^{k=N-n}R(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega T_s}\right]\\ &= \frac{|F(f)|^2}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}R(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega T_s}\\ &= \frac{|F(f)|^2}{T_s}\left[R(0)+\sum_{k=-\infty}^{-1}R(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega T_s}+\sum_{k=1}^{\infty}R(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega T_s}\right]\end{aligned}$$

或者

$$\mathcal{P}_x(f) = \frac{|F(f)|^2}{T_s}\left[R(0)+\sum_{k=1}^{\infty}R(-k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega T_s}+\sum_{k=1}^{\infty}R(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega T_s}\right] \tag{6.69}$$

但是因为 $R(k)$ 是自相关函数，所以 $R(-k)=R(k)$，式(6.69)变为

$$\mathcal{P}_x(f) = \frac{|F(f)|^2}{T_s}\left[R(0) + \sum_{k=1}^{\infty} R(k)(e^{jk\omega T_s} + e^{-jk\omega T_s})\right]$$

总之，数字信号的 PSD 的通用表达式为

$$\mathcal{P}_x(f) = \frac{|F(f)|^2}{T_s}\left[R(0) + 2\sum_{k=1}^{\infty} R(k)\cos(2\pi k f T_s)\right] \tag{6.70a}$$

等效表达式为

$$\boxed{\mathcal{P}_x(f) = \frac{|F(f)|^2}{T_s}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} R(k)e^{jk\omega T_s}\right]} \tag{6.70b}$$

其中，数据的自相关函数为

$$R(k) = \overline{a_n a_{n+k}} = \sum_{i=1}^{I}(a_n a_{n+k})_i P_i \tag{6.70c}$$

其中，P_i 是得到乘积项 $(a_n a_{n+k})_i$ 的概率，它共有 I 个取值。$F(f)$ 是数字符号脉冲波形的频谱。

注意，除了频率变量 ω 是连续的以外，式(6.70b)方括号内的量与数据信号自相关函数 $R(k)$ 的离散傅里叶变换(DFT)相似。因此，基带数字信号的 PSD 受数据信号的“频谱”和用于线路码的脉冲波形的谱两方面的影响。而且，若数据信号的均值 $\bar{a}_n$ 非零，其频谱可能还包含 δ 函数。为证明该结果，首先假设数据符号是不相关的，即

$$R(k) = \begin{cases} \overline{a_n^2}, & k=0 \\ \overline{a_n}\,\overline{a_{n+k}}, & k \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} \sigma_a^2 + m_a^2, & k=0 \\ m_a^2, & k \neq 0 \end{cases}$$

其中，如附录 B 中定义的那样，数据信号的均值和方差为 $m_a = \bar{a}_n$ 及 $\sigma_a^2 = \overline{(a_n - m_a)^2} = \overline{a_n^2} - m_a^2$。将前述 $R(k)$ 的公式代入式(6.70b)，得到：

$$\mathcal{P}_x(f) = \frac{|F(f)|^2}{T_s}\left[\sigma_a^2 + m_a^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega T_s}\right]$$

由式(2.115)的泊松求和公式，得到：

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\pm jk\omega T_s} = D\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f - nD)$$

其中，$D=1/T_s$ 是波特率。我们看到该 PSD 变为

$$\mathcal{P}_x(f) = \frac{|F(f)|^2}{T_s}\left[a_a^2 + m_a^2 D\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f - nD)\right]$$

于是，对不相关的数据情形，数字信号的 PSD 为

$$\mathcal{P}_x(f) = \underbrace{\sigma_a^2 D|F(f)|^2}_{\text{连续谱}} + \underbrace{(m_a D)^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}|F(nD)|^2\delta(f - nD)}_{\text{离散谱}} \tag{6.70d}$$

对于数据间存在有相关性的一般情况，将数据自相关函数 $R(k)$ 以归一化数据自相关函数 $\rho(k)$ 的形式表示，即令 $\tilde{a}_n$ 代表已归一化为方差为 1、均值为 0 的相应数据 a_n。于是，

$$a_n = \sigma_a \tilde{a}_n + m_a$$

因此，

$$R(k) = \sigma_a^2 \rho(k) + m_a^2$$

其中，

$$\rho(k) = \overline{[\tilde{a}_n \tilde{a}_{n+k}]}$$

将 $R(k)$ 的表达式代入式(6.70b)，并且利用 $R(-k)=R(k)$，得到：

$$\mathcal{P}_x(f) = \frac{|F(f)|^2}{T_s}\left[\sigma_a^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega T_s} + m_a^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega T_s}\right]$$

因而，对于数据间存在有相关性的一般情形，数字信号的 PSD 为

$$\mathcal{P}_x(f) = \underbrace{\sigma_a^2 D|F(f)|^2 \mathcal{W}_\rho(f)}_{\text{连续谱}} + \underbrace{(m_a D)^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F(nD)|^2 \delta(f-nD)}_{\text{离散谱}} \tag{6.70e}$$

其中，

$$\mathcal{W}_\rho(f) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k f T_s} \tag{6.70f}$$

是从归一化自相关脉冲串的傅里叶变换得到的频谱加权函数：

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho(k)\delta(\tau - kT_s)$$

这表明数字信号的 PSD 由取决于脉冲波形频谱 $F(f)$ 和数据相关函数的连续谱组成。此外，$m_a \neq 0$，以及 $F(nD) \neq 0$，该 PSD 还将包括位于波特率 D 各次谐波上的线谱(δ 函数)。

3.5 节给出了对这些结论应用的一些例子，其中计算了单极性 RZ 码、双极性码、曼彻斯特线码的 PSD(图 3.16 给出了这些码的 PSD 图)。带通数字信号的例子，例如 OOK、BPSK、QPSK、MPSK 及 QAM 在 5.9 节和 5.10 节中给出。

例题 6.5　使用数据自相关函数计算双极性 NRZ 线性码的 PSD

利用式(6.70b)并参考图 3.15(e)，计算并画出 $A=1.414$ 和 $R=1$ 的双极性 NRZ 线性码的 PSD。同样，计算并画出 $A=2$ 和 $R=1$ 的双极性 RZ 线性码的 PSD(A 值选择为 NRZ 和 RZ 线性码具有相同的每比特能量 E_b)。计算过程和结果见 M 文件 Example6_05. m。将得到的结果与图 3.16(d)进行比较。

6.2.5　白噪声过程

定义　若一个随机过程 $x(t)$ 的 PSD 在所有频率上均为常数，那么称该随机过程为白噪声过程，即

$$\mathcal{P}_x(f) = \frac{N_0}{2} \tag{6.71}$$

其中，N_0 是正常数。

对式(6.71)取傅里叶反变换，即可得到白噪声随机过程的自相关函数。结果是

$$R_x(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau) \tag{6.72a}$$

例如，8.6 节描述的热噪声过程就可以认为是在工作频段上的白噪声随机过程，其中，

$$N_0 = kT \tag{6.72b}$$

热噪声具有高斯分布。当然，也有其他分布的白噪声。

6.2.6 PSD 的测量

PSD 可以采用模拟或数字技术来测量。无论采用哪种技术，因为都是在有限时间区间而不是无限时间区间(如式(6.42)所示)上测量，所以测得的都只是真实 PSD 的近似值。

模拟技术。模拟测量技术包括采用具有邻近带通特性的一组并行窄带带通滤波器或采用具有可调中心频率的单独的带通滤波器。当采用滤波器组时，波形同时输入所有的滤波器，然后计算每一滤波器输出端的功率，用输出功率除以对应滤波器的有效带宽，就可得到近似的 PSD，即计算得到对应于各滤波器中心频率的频率点上的 PSD。具有并行模拟处理的频谱分析仪通常设计成覆盖音频范围的频谱，这样可以经济合理地构造带通滤波器组。

RF 频谱分析仪通常由其输入信号来自混频器(上变频器或下变频器)电路的输出的单个窄带中频带通滤波器构成。混频器的本地振荡器(LO)在某一合适的频段上缓慢扫描，因此 RF 频谱分析仪就等效于一个其中心频率在所需谱范围扫描的可调谐窄带带通滤波器。再一次计算作为扫描频率函数的经尺度变换的窄带滤波器的功率输出，就可得到 PSD。

PSD 的数值计算。PSD 可以在采用数字信号处理的谱分析仪中进行数值计算得到。PSD 的一种近似式是

$$\mathcal{P}_T(f) = \frac{|X_T(f)|^2}{T} \tag{6.73a}$$

其中，下标 T 表明该近似是通过观察 $x(t)$ 在 T 秒的时间间隔上的值得到的。T 称为观察区间或观察长度。当然，式(6.73a)是对式(6.42)定义的真实 PSD 的近似，因为 T 为有限值并且因为只是使用了集合中的一个样本。在更复杂的谱分析仪中，用几个 $x(t)$ 的样本计算 $\mathcal{P}_T(f)$。$\mathcal{P}_T(f)$ 在每个频率上的平均值用来近似式(6.42)中真实 $\mathcal{P}_x(f)$ 的所需的集平均。在 $\mathcal{P}_T(f)$ 的计算中，DFT 常常用于近似 $X_T(f)$。如 2.8 节所述，这导致 DFT 分析带来的缺点。

应该强调的是，式(6.73a)是对 PSD 的近似或估计。由于这种估算以前是用来寻找数据记录中以 δ 函数出现于 PSD 中的周期性的，所以也称为周期图[PSD 中 δ 函数相对较容易找到，因此 $x(t)$ 的周期性也容易确定]。理想情况是估计真实的 PSD 的集平均。如果是这样的情形，那么该估计器称为是无偏的。我们可以很容易地检查式(6.73a)是否是无偏的。我们有

$$\overline{\mathcal{P}_T(f)} = \overline{\left[\frac{|X_T(f)|^2}{T}\right]}$$

对于有限的 T，应用式(6.50a)，得到：

$$\overline{\mathcal{P}_T(f)} = \mathcal{F}\left[R_x(\tau)\Lambda\left(\frac{\tau}{T}\right)\right]$$

并且参考表 2.2，

$$\overline{\mathcal{P}_T(f)} = T\mathcal{P}_x(f) * \left(\frac{\sin \pi f T}{\pi f T}\right)^2 \tag{6.73b}$$

因为 $\overline{\mathcal{P}_T(f)} \neq \mathcal{P}_x(f)$，所以周期图是有偏的估计。偏置是由于将 $x(t)$ 截断为 T 秒长的而产生的的三角形截断窗函数 $\boldsymbol{\Lambda}(\tau/T)$ 造成的。由 A.8 节，其中 $a = \pi T$，我们看到 $\lim_{T\to\infty}[\overline{\mathcal{P}_T(f)}] = \mathcal{P}_x(f)$，于是，随着 $T\to\infty$，周期图变为无偏估计。因此，周期图被称为渐近无偏估计。

除了无偏性以外，理想的估计器应当是一致估计。这意味着当 $T\to\infty$ 时估算器的方差应变小。这种情况下，可以证明，当 $x(t)$ 是高斯分布时，式(6.73a)给出的 PSD 不是一致估计[Bendat和 Piersol，1971]。

当然，除了三角窗以外，采用其他的窗函数可以得到不同的 PSD 估计器[Blackman and Tukey, 1958; Jenkins and Watts, 1968]。更多的现代技术都对估计器假设了一个自相关函数的模型(形式)，并计算该模型的参数。然后检查该模型，看是否与数据一致。相应的例子有滑动平均(MA)模型、自回归(AR)模型、自回归滑动平均(ARMA)模型[Kay, 1986; Kay 和 Marple, 1981; Marple, 1986; Scharf, 1991; Shanmugan 和 Breipohl, 1988]。

采用微处理器电路的谱分析仪经常用数值技术计算 PSD。由于实时数字信号处理电路不能处理 RF 范围的信号，这些仪器只能测量频率相对较低的波形，如音频或超声波频率范围。

6.3　各态历经随机过程的直流和均方根值

在第 2 章中，以时间平均的形式定义了直流(dc)分量、均方根(rms)值及平均功率。对各态历经过程，时间平均等于集平均。因此，直流分量、均方根值及平均功率(这些都是电气工程中的基本概念)都与各态历经随机过程的矩相关。在以下对这些关系的总结中，$x(t)$是对应于电压或者电流波形的各态历经随机过程。

1. 直流值：

$$X_{\mathrm{dc}} \triangleq \langle x(t)\rangle \equiv \bar{x} = m_x \tag{6.74}$$

2. 归一化直流功率：

$$P_{\mathrm{dc}} \triangleq [\langle x(t)\rangle]^2 \equiv (\bar{x})^2 \tag{6.75}$$

3. 均方根值：

$$X_{\mathrm{rms}} \triangleq \sqrt{\langle x^2(t)\rangle} \equiv \sqrt{\overline{(x^2)}} = \sqrt{R_x(0)} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_x(f)\,\mathrm{d}f} \tag{6.76}$$

4. 交流部分的均方根值：

$$\begin{aligned}(\mathrm{X_{rms}})_{\mathrm{ac}} &\triangleq \sqrt{\langle (x(t)-X_{\mathrm{dc}})^2\rangle} \equiv \sqrt{\overline{(x-\bar{x})^2}}\\ &= \sqrt{\overline{\mathrm{x}^2}-(\bar{x})^2} = \sqrt{R_x(0)-(\bar{x})^2}\\ &= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_x(f)\,\mathrm{d}f-(\bar{x})^2} = \sigma_x = \text{标准偏差}\end{aligned} \tag{6.77}$$

5. 归一化总平均功率：

$$P \triangleq \langle x^2(t)\rangle \equiv x^2 = R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_x(f)\,\mathrm{d}f \tag{6.78}$$

6. 交流部分的归一化平均功率：

$$\begin{aligned}P_{\mathrm{ac}} &\triangleq \langle (x(t)-X_{\mathrm{dc}})^2\rangle \equiv \overline{(x-\bar{x})^2}\\ &= \overline{x^2}-(\bar{x})^2 R_x(0)-(\bar{x})^2\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_x(f)\,\mathrm{d}f-(\bar{x})^2 = \sigma_x^2 = \text{方差}\end{aligned} \tag{6.79}$$

此外，常用的实验室设备可用于测量各态历经过程的均值、二阶矩及方差。例如，若 $x(t)$ 是电压波形，$\bar{x}$ 可用直流电压表测量，并且 σ_x 可用“真实均方根”(交流耦合的)电压表测量。①

① 大多数“真实均方根”表在 dc 处没有频响。因此，它们不能测量真实均方根值 $\sqrt{\langle x^2(t)\rangle}=\sqrt{\overline{x^2}}$，取而代之,它们测量 σ。

采用这些测量，我们很容易从 $\overline{x^2} = \sigma_x^2 + (\bar{x})^2$ 得到二阶矩。在更高的频率上(例如射频、微波及光波) $\overline{x^2}$ 和 σ_x^2 可用标准功率计测量，即 $\sigma_x^2 = \overline{x^2} = RP$，$R$ 是功率计的负载阻抗(通常为 50 Ω)，P 是功率计的读数。

例题 6.6　双极性线性编码的平均功率和均方根值

利用式(6.76)和式(6.78)计算在例题 6.5 中描述的双极性线性编码的平均功率和均方根值。计算过程和结果见 M 文件 Example6_06. m。

6.4　线性系统

6.4.1　输入-输出关系

如第 2 章中的推导，一个线性时不变系统可由其单位冲激响应 $h(t)$ 或转移函数 $H(f)$ 来描述。如图 6.6 所示，其中 $x(t)$ 为输入，$y(t)$ 为输出。输入-输出关系为

$$y(t) = h(t) * x(t) \tag{6.80}$$

相应傅里叶变换的关系为

$$Y(f) = H(f)\,X(f) \tag{6.81}$$

若 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是随机过程，这些关系仍然成立(就如同确知函数成立一样)。在通信系统中，$x(t)$ 可以是随机信号加(随机)噪声，当没有信号时，$x(t)$ 也可以是噪声。在随机过程中，自相关函数和 PSD 函数可用来描述所包括的频率。因而，我们需要回答以下问题：当输入 $x(t)$ 的自相关函数和 PSD 已知时，输出随机过程 $y(t)$ 的自相关函数和 PSD 是什么?

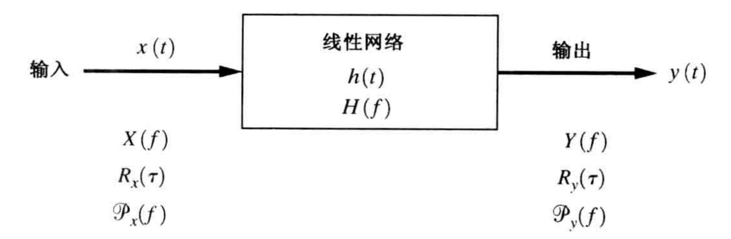


图 6.6　线性系统

定理　若广义平稳随机过程 $x(t)$ 输入到脉冲响应为 $h(t)$ 的线性时不变线性网络，输出的自相关函数为

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda_1)h(\lambda_2)R_x(\tau - \lambda_2 + \lambda_1)\mathrm{d}\lambda_1\mathrm{d}\lambda_2 \tag{6.82a}$$

或者

$$R_y(\tau) = h(-\tau) * h(\tau) * R_x(\tau) \tag{6.82b}$$

输出 PSD 为

$$\mathcal{P}_y(f) = |H(f)|^2\mathcal{P}_x(f) \tag{6.83}$$

其中，$H(f) = \mathscr{F}[h(t)]$。

式(6.83)表明网络的功率传输函数为

$$G_h(f) = \frac{P_y(f)}{P_x(f)} = |H(f)|^2 \tag{6.84}$$

如式(2.143)所引用的那样。

证明　从式(6.80)，得到：

$$\begin{aligned}R_y(\tau) &\triangleq \overline{y(t)y(t+\tau)}\\&= \overline{\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda_1)x(t-\lambda_1)\mathrm{d}\lambda_1\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda_2)x(t+\tau-\lambda_2)\mathrm{d}\lambda_2\right]}\\&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda_1)h(\lambda_2)\overline{x(t-\lambda_1)x(t+\tau-\lambda_2)}\mathrm{d}\lambda_1\mathrm{d}\lambda_2\end{aligned} \tag{6.85}$$

但是，

$$\overline{x(t-\lambda_1)x(t+\tau-\lambda_2)} = R_x(t+\tau-\lambda_2-t+\lambda_1) = R_x(\tau-\lambda_2+\lambda_1)$$

故式(6.85)等价于式(6.82a)。此外，式(6.82a)可写成卷积运算的形式：

$$\begin{aligned}R_y(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda_1)\left\{\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda_2)R_x[(\tau+\lambda_1)-\lambda_2]\mathrm{d}\lambda_2\right\}\mathrm{d}\lambda_1\\&= \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda_1)\{h(\tau+\lambda_1) * R_x(\tau+\lambda_1)\}\mathrm{d}\lambda_1\\&= \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda_1)\{h[-((-\tau)-\lambda_1)] * R_x[-((-\tau)-\lambda_1)]\}\mathrm{d}\lambda_1\\&= h(-\tau) * h[-(-\tau)] * R_x[-(-\tau)]\end{aligned}$$

这等价于式(6.82b)中的卷积。

对式(6.82b)两边取傅里叶变换，可以得到输出的PSD。我们得到：

$$\mathscr{F}[R_y(\tau)] = \mathscr{F}[h(-\tau)]\mathscr{F}[h(\tau) * R_x(\tau)]$$

或者，

$$\mathscr{P}_y(f) = H^*(f)H(f)P_x(f)$$

其中，假设 $h(t)$ 是实函数。该式等价于式(6.83)。

该定理可应用于级联的线性系统。例如，图6.7给出了两个级联的网络。

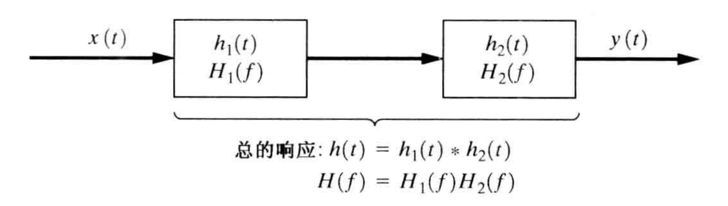


图6.7　两个线性网络的级联

该定理也可以推广得到两个线性系统的互相关函数或互谱，如图6.8所示。$x_1(t)$ 和 $y_1(t)$ 是脉冲响应为 $h_1(t)$ 的第1个系统的输入和输出。类似地，$x_2(t)$ 和 $y_2(t)$ 是第2个系统的输入和输出。

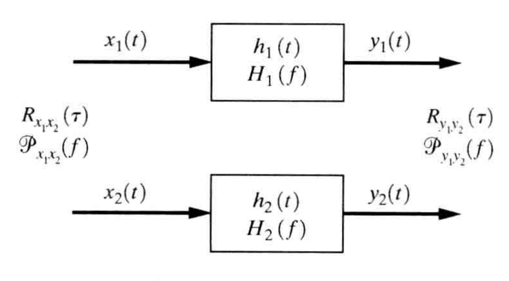


图6.8　两个线性系统

定理　令 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 是两个线性时不变线性系统的广义平稳输入，如图6.8所示。于是输出的互相关函数为

$$R_{y_1y_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\lambda_1)h_2(\lambda_2)R_{x_1x_2}(\tau - \lambda_2 + \lambda_1)\mathrm{d}\lambda_1\mathrm{d}\lambda_2 \tag{6.86a}$$

或者，

$$R_{y_1y_2}(\tau) = h_1(-\tau) * h_2(\tau) * R_{x_1x_2}(\tau) \tag{6.86b}$$

而且，由定义知，输出的互功率谱密度是互相关函数的傅里叶变换，于是，

$$\mathcal{P}_{y_1y_2}(f) = H_1^*(f)H_2(f)\mathcal{P}_{x_1x_2}(f) \tag{6.87}$$

其中，$\mathcal{P}_{y_1y_2}(f) = \mathcal{F}[R_{y_1y_2}(\tau)]$，$\mathcal{P}_{x_1x_2}(f) = \mathcal{F}[R_{x_1x_2}(\tau)]$，$H_1(f) = \mathcal{F}[h_1(t)]$，$H_2(f) = \mathcal{F}[h_2(t)]$。

该定理的证明与上一个定理的证明类似，留给读者作为练习。

例题 6.7　*RC* 低通滤波器输出的自相关函数和 PSD

图 6.9 中给出了一个 *RC* 低通滤波器。假设输入是具有均匀 PSD 的各态历经随机过程：

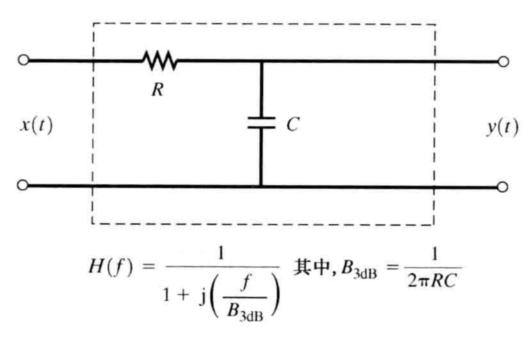
$$\mathcal{P}_x(f) = \tfrac{1}{2}N_0$$

于是输出的 PSD 为

$$\mathcal{P}_y(f) = |H(f)|^2\mathcal{P}_x(f)$$

上式变为

$$\mathcal{P}_y(f) = \frac{\frac{1}{2}N_0}{1 + (f/B_{3\mathrm{dB}})^2} \tag{6.88}$$



$$H(f) = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\left(\frac{f}{B_{3\mathrm{dB}}}\right)}\quad \text{其中}, B_{3\mathrm{dB}} = \frac{1}{2\pi RC}$$

图 6.9　*RC* 低通滤波器

其中，$B_{3\mathrm{dB}} = 1/(2\pi RC)$。注意，$\mathcal{P}_y(B_{3\mathrm{dB}})/\mathcal{P}_y(0) = \frac{1}{2}$，所以 $B_{3\mathrm{dB}} = 1/(2\pi RC)$ 实际上就是 3 dB 带宽。对式(6.88)的 $\mathcal{P}_y(f)$ 取傅里叶反变换，我们得到 *RC* 滤波器的输出自相关函数。

$$R_y(\tau) = \frac{N_0}{4RC}\mathrm{e}^{-|\tau|/(RC)} \tag{6.89}$$

归一化输出功率，即输出的二阶矩，为

$$P_y = \overline{y^2} = R_y(0) = \frac{N_0}{4RC} \tag{6.90}$$

此外，输出的直流分量(也就是均值)为 0，因为①

$$Y_{\mathrm{DC}} = m_y = \sqrt{\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\mathcal{P}_y(f)\mathrm{d}f} = 0 \tag{6.91}$$

因为 $\sigma_y^2 = \overline{y^2} - m_y^2$，其中 $m_y = 0$，所以式(6.90)也给出了输出的方差。

例题 6.8　*RC* 低通滤波器输出端的信噪比

再次参考图 6.9，并假设 $x(t)$ 是正弦波(确知)信号加上各态历经白噪声。于是，

$$x(t) = s_i(t) + n_i(t)$$

并且，

$$s_i(t) = A_0\cos(\omega_0 t + \theta_0)$$

其中，A_0、ω_0 和 θ_0 是已知常数，并且 $\mathcal{P}_{n_i}(f) = N_0/2$。输入信号功率为

① 当积分非零时，得到的值等于或大于均值的平方。

$$\langle s_i^2(t)\rangle = \frac{A_0^2}{2}$$

输入噪声功率为

$$\langle n_i^2\rangle = \overline{n_i^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_{n_i}(f)\,\mathrm{d}f = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2}\,\mathrm{d}f = \infty$$

因此，输入信噪比(SNR)为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{in}} = \frac{\langle s_i^2(t)\rangle}{\langle n_i^2(t)\rangle} = 0 \tag{6.92}$$

因为系统是线性的，输出由经过滤波的输入信号加上滤波后的输入噪声的和组成：

$$y(t) = s_0(t) + n_0(t)$$

输出信号为

$$\begin{aligned} s_0(t) &= s_i(t) * h(t) \\ &= A_0|H(f_0)|\cos[\omega_0 t + \theta_0 + \angle H(f_0)] \end{aligned}$$

输出信号功率为

$$\langle s_0^2(t)\rangle = \frac{A_0^2}{2}|H(f_0)|^2 \tag{6.93}$$

从例题6.7的式(6.90)，可得到输出噪声功率为

$$\overline{n_0^2} = \frac{N_0}{4RC} \tag{6.94}$$

于是输出 SNR 为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = \frac{\langle s_0^2(t)\rangle}{\langle n_0^2(t)\rangle} = \frac{\langle s_0^2(t)\rangle}{\overline{n_0^2(t)}} = \frac{2A_0^2|H(f_0)|^2RC}{N_0} \tag{6.95}$$

或者

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = \frac{2A_0^2RC}{N_0[1 + (2\pi f_0 RC)^2]}$$

读者可用微积分计算出使得 SNR 最大的 RC 值。该值为 $RC = 1/(2\pi f_0)$。因此，对最大 SNR，滤波器的 3 dB 带宽设计为 f_0。

6.5 带宽的测量

在2.9节中定义了几种带宽的测量方法，如绝对带宽、3 dB 带宽、等效带宽、零点-零点(过零点)带宽、有界带宽、功率带宽及 FCC 带宽参数等。这些定义可用于计算广义平稳过程 $x(t)$的带宽，其中用$\mathcal{P}_x(f)$代替定义中的$|H(f)|^2$。在本节中，我们将回顾等效带宽，并定义一种新的带宽测量方法：均方根(rms)带宽。

6.5.1 等效带宽

对广义平稳过程 $x(t)$，由式(2.192)定义的等效带宽应为

$$B_{\text{eq}} = \frac{1}{\mathcal{P}_x(f_0)}\int_0^{\infty} \mathcal{P}_x(f)\,\mathrm{d}f = \frac{R_x(0)}{2\mathcal{P}_x(f_0)} \tag{6.96}$$

其中，$\mathcal{P}_x(f)$在f_0处取最大值。该式对带通和基带过程都成立(f_0用于基带过程)。

6.5.2　均方根带宽

均方根带宽是根据归一化 PSD 得到的频率的二阶矩的平方根。这时，尽管 f 不是随机的，但是仍然将其看作密度函数为 $\mathcal{P}_x(f)/\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{P}_x(\lambda)\mathrm{d}\lambda$ 的随机变量。这是一个非负的函数，其分母进行了归一化处理以使该比值的积分为 1。因此，该函数满足 PDF 的性质。

定义　若 $x(t)$ 是低通广义平稳过程，其均方根带宽为

$$B_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\overline{f^2}} \tag{6.97}$$

其中，

$$\overline{f^2} = \int_{-\infty}^{\infty} f^2\left[\frac{\mathcal{P}_x(f)}{\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{P}_x(\lambda)\mathrm{d}\lambda}\right]\mathrm{d}f = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f^2\mathcal{P}_x(f)\,\mathrm{d}f}{\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{P}_x(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda} \tag{6.98}$$

带宽的均方根测量经常用于通信系统的理论比较，因为均方根法中的数学计算比其他带宽测量中的计算更容易些。然而，均方根带宽不容易由实验室设备测量。

定理　对于广义平稳过程 $x(t)$，其均方频率为

$$\overline{f^2} = \left[-\frac{1}{(2\pi)^2R(0)}\right]\frac{\mathrm{d}^2R_x(\tau)}{\mathrm{d}\tau^2}\bigg|_{\tau=0} \tag{6.99}$$

证明　已知

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{P}_x(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f\tau}\,\mathrm{d}t$$

对 τ 取二阶导数，得到：

$$\frac{\mathrm{d}^2R_x(\tau)}{\mathrm{d}\tau^2} = \int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{P}_x(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f\tau}(\mathrm{j}2\pi f)^2\mathrm{d}f$$

取 $\tau=0$，计算等式，得到：

$$\frac{\mathrm{d}^2R_x(\tau)}{\mathrm{d}\tau^2}\bigg|_{\tau=0} = (\mathrm{j}2\pi)^2\int_{-\infty}^{\infty} f^2\mathcal{P}_x(f)\,\mathrm{d}f$$

用该式替换式(6.98)中的积分，该式变为

$$\overline{f^2} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f^2\mathcal{P}_x(f)\,\mathrm{d}f}{\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{P}_x(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda} = \frac{-\frac{1}{(2\pi)^2}\left[\frac{\mathrm{d}^2R_x(\tau)}{\mathrm{d}\tau^2}\right]_{\tau=0}}{R_x(0)}$$

这与式(6.99)等价。

我们也可以定义带通信号的均方根带宽。这里要关注的是频谱正频率部分的平均频率的二阶矩的平方根。

定义　若 $x(t)$ 是带通广义平稳过程，其均方根带宽为

$$B_{\mathrm{rms}} = 2\sqrt{\overline{(f-f_0)^2}} \tag{6.100}$$

其中，

$$\overline{(f-f_0)^2}=\int_0^{\infty}(f-f_0)^2\left(\frac{\mathcal{P}_x(f)}{\int_0^{\infty}\mathcal{P}_x(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda}\right)\mathrm{d}f \tag{6.101}$$

并且

$$f_0\triangleq\overline{f}=\int_0^{\infty}f\left(\frac{\mathcal{P}_x(f)}{\int_0^{\infty}\mathcal{P}_x(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda}\right)\mathrm{d}f \tag{6.102}$$

正如一个标准带通信号PSD的曲线表明的那样，式(6.100)中平方根给出的量与σ_f类似。因此，需要因子2以对带通带宽给出一个合理的定义。

例题6.9 *RC*低通滤波器的等效带宽和均方根带宽

为了计算滤波器的等效带宽和均方根带宽，可以用白色噪声作为输入。因为当输入的PSD为常数时，输出PSD的带宽就是滤波器带宽。

对*RC*低通滤波器(见图6.9)，当输入为白噪声时，输出PSD由式(6.88)给出。对应输出自相关函数由式(6.89)给出。将这些公式代入式(6.96)，可得*RC*低通滤波器的等效带宽为

$$B_{\mathrm{eq}}=\frac{R_y(0)}{2\mathcal{P}_y(0)}=\frac{N_0/4RC}{2\left(\frac{1}{2}N_0\right)}=\frac{1}{4RC}\ \mathrm{Hz} \tag{6.103}$$

因此，对*RC*低通滤波器，

$$B_{\mathrm{eq}}=\frac{\pi}{2}B_{3\mathrm{dB}} \tag{6.104}$$

将式(6.88)和式(6.90)代入式(6.98)可得到均方根带宽，从而得到：

$$B_{\mathrm{rms}}=\sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty}f^2\mathcal{P}_y(f)\mathrm{d}f}{R_y(0)}}=\sqrt{\frac{1}{2\pi^2RC}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f^2}{(B_{3\mathrm{dB}})^2+f^2}\mathrm{d}f} \tag{6.105}$$

分析式中的积分，我们注意到$f\to\pm\infty$时被积函数为1，因此积分值为无限大，故*RC*低通滤波器的$B_{\mathrm{rms}}=\infty$。若要均方根带宽为有限的，当频率变大时，其PSD需要比$1/|f|^2$下降得快。因此，对*RC*低通滤波器，均方根带宽定义不是很有用。

6.6 高斯随机过程

定义 如果对于任意N和任意$t_1,t_2,\cdots,t_N$，随机变量

$$x_1=x(t_1),\ x_2=x(t_2),\ldots,\ x_N=x(t_N) \tag{6.106}$$

具有N维的高斯PDF，那么称随机过程$x(t)$为高斯随机过程。

N维的高斯PDF可紧凑地写成矩阵形式。令$\mathbf{x}$为代表N个随机变量的列向量：

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_N\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x(t_1)\\x(t_2)\\\vdots\\x(t_N)\end{bmatrix} \tag{6.107}$$

N维高斯PDF为

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}|\mathrm{Det}\,\mathbf{C}|^{1/2}} \mathrm{e}^{-(1/2)[(\mathbf{x}-\mathbf{m})^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})]} \tag{6.108}$$

其中均值向量为

$$\mathbf{m} = \bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_N \end{bmatrix} \tag{6.109}$$

并且其中$(\mathbf{x}-\mathbf{m})^{\mathrm{T}}$代表列向量$(\mathbf{x}-\mathbf{m})$的转置。

Det **C** 是矩阵 **C** 的行列式，$\mathbf{C}^{-1}$是矩阵 **C** 的逆矩阵。协方差矩阵定义为

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{N1} & c_{N2} & \cdots & c_{NN} \end{bmatrix} \tag{6.110}$$

其中，矩阵的元素为

$$c_{ij} = \overline{(x_i - m_i)(x_j - m_j)} = \overline{[x(t_i) - m_i][x(t_j) - m_j]} \tag{6.111}$$

对广义平稳过程，有 $m_i = \overline{x(t_i)} = m_j = \overline{x(t_j)} = m$。协方差矩阵的元素变为

$$c_{ij} = R_x(t_j - t_i) - m^2 \tag{6.112}$$

若 x_i 不相关，$i \neq j$ 时 $\overline{x_i x_j} = \bar{x}_i \bar{x}_j$，协方差矩阵变为

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma^2 \end{bmatrix} \tag{6.113}$$

其中，$\sigma^2 = \overline{x^2} - m^2 = R_x(0) - m^2$，即若随机变量间是不相关的，那么协方差矩阵变为对角阵。将式(6.113)应用到式(6.108)，可得出结论：当高斯随机变量不相关时，它们是相互独立的。

6.6.1　高斯随机过程的性质

高斯过程的一些性质如下：

1. $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$只取决于 **C** 和 **m**，换句话说，$N$ 维高斯 PDF 完全由一阶矩和二阶矩(即均值、方差及协方差)确定。
2. 因为$\{x_i = x(t_i)\}$是联合高斯分布，所以 $x_i = x(t_i)$是单个高斯变量。
3. 若 **C** 为对角阵，随机变量是不相关的。此外，高斯随机变量不相关时，它们相互独立。
4. 多个高斯变量进行线性变换后生成另外一个高斯随机变量。
5. 广义平稳高斯随机过程也是严格平稳的①[Papoulis,1984,p,222;Shanmugan 和 Breipohl, 1988,p,141]。

性质 4 在分析线性系统时很有用。该性质同以下定理一样，将随后证明。

定理　若线性系统的输入为高斯随机过程，那么系统的输出也是高斯过程。

---

① 这可由式(6.112)直接导出，因为 N 维高斯 PDF 仅仅是 τ 的函数，不是绝对时间的函数。

证明 冲激响应为 $h(t)$ 的线性网络的输出为

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\lambda)x(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$$

这可近似为

$$y(t) = \sum_{j=1}^{N} h(t-\lambda_j)x(\lambda_j)\,\Delta\lambda \tag{6.114}$$

当 N 非常大，并且 $\Delta\lambda \to 0$ 时，该近似变得很准确。

对于输出随机过程，输出随机变量为

$$\begin{aligned}
y(t_1) &= \sum_{j=1}^{N} [h(t_1-\lambda_j)\,\Delta\lambda]x(\lambda_j)\\
y(t_2) &= \sum_{j=1}^{N} [h(t_2-\lambda_j)\,\Delta\lambda]\,x(\lambda_j)\\
&\vdots\\
y(t_N) &= \sum_{j=1}^{N} [h(t_N-\lambda_j)\,\Delta\lambda]x(\lambda_j)
\end{aligned}$$

以矩阵符号来描述，该式变为

$$\begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1N}\\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2N}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ h_{N1} & h_{N2} & \cdots & h_{NN} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_N \end{bmatrix}$$

或者

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} \tag{6.115}$$

其中，$N\times N$ 矩阵 $\mathbf{H}$ 的元素与线性网络的冲激响应的关系是

$$h_{ij} = [h(t_i-\lambda_j)]\,\Delta\lambda \tag{6.116}$$

我们现在证明若 $\mathbf{x}$ 由 N 维高斯 PDF 描述，那么 $\mathbf{y}$ 也可由 N 维高斯 PDF 描述。采用附录 B 给出的多元函数变换理论即可证明之。由式(B.99)，$\mathbf{y}$ 的 PDF 是

$$f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) = \left.\frac{f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})}{|J(\mathbf{y}/\mathbf{x})|}\right|_{\mathbf{x}=H^{-1}\mathbf{y}} \tag{6.117}$$

雅可比行列式为

$$J\left(\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}}\right) = \mathrm{Det}\begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x_1} & \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x_2} & \cdots & \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x_N}\\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x_1} & \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x_2} & \cdots & \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x_N}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\mathrm{d}y_N}{\mathrm{d}x_1} & \dfrac{\mathrm{d}y_N}{\mathrm{d}x_2} & \cdots & \dfrac{\mathrm{d}y_N}{\mathrm{d}x_N} \end{bmatrix} = \mathrm{Det}[\mathbf{H}] \triangleq K \tag{6.118}$$

其中，K 为常数。在该问题中，因为 $\mathbf{y}=\mathbf{H}\mathbf{x}$ 是线性变换，所以 $J(\mathbf{y}/\mathbf{x})$ 是常数(而不是 $\mathbf{x}$ 的函数)。于是，

$$f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{|\mathbf{K}|} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{H}^{-1}\mathbf{y})$$

或者

$$f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}|K|\,|\text{Det } \mathbf{C}_x|^{1/2}} \mathrm{e}^{-(1/2)[(\mathbf{H}^{-1}\mathbf{y}-\mathbf{m_x})^{\mathrm{T}}\mathbf{C}_x^{-1}(\mathbf{H}^{-1}\mathbf{y}-\mathbf{m_x})]} \tag{6.119}$$

其中，下标 x 用于与 $x(t)$ 有关的量。但是，我们已知 $\mathbf{m}_y = \mathbf{H}\mathbf{m}_x$，由矩阵理论，可得到性质 $[\mathbf{AB}]^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$，于是式(6.119)中的指数变为

$$-\tfrac{1}{2}[(\mathbf{y}-\mathbf{m}_y)^{\mathrm{T}}(\mathbf{H}^{-1})^{\mathrm{T}}]\mathbf{C}_x^{-1}[\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{m}_y)] = -\tfrac{1}{2}[(\mathbf{y}-\mathbf{m}_y)^{\mathrm{T}}\mathbf{C}_y^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{m}_y)] \tag{6.120}$$

其中，

$$\mathbf{C}_y^{-1} = (\mathbf{H}^{-1})^{\mathrm{T}}\mathbf{C}_x^{-1}\mathbf{H}^{-1} \tag{6.121}$$

或者

$$\mathbf{C}_y = \mathbf{H}\mathbf{C}_x\mathbf{H}^{\mathrm{T}} \tag{6.122}$$

因此，$\mathbf{y}$ 的 PDF 为

$$f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}|K|\,|\text{Det } \mathbf{C_x}|^{1/2}} \mathrm{e}^{-(1/2)(\mathbf{y}-\mathbf{m}_y)^{\mathrm{T}}\mathrm{C}_y^{-1}(\mathrm{y}-\mathrm{m}_y)} \tag{6.123}$$

这是一个 N 维的高斯 PDF。由此定理得证。

如果一个线性系统起到积分器或低通滤波器的作用，那么其输出随机变量(输出随机过程的)将正比于输入随机变量的和。结果，应用中心极限定理(见附录B)，当输入随机变量具有相互独立的非高斯 PDF 时，积分器或低通滤波器的输出将是高期随机过程。

例题 6.10　高斯白噪声随机过程

假设高斯随机过程 $n(t)$ 的 PSD 为

$$\mathcal{P}_n(f) = \begin{cases} \frac{1}{2}N_0, & |f| \leqslant B \\ 0, & \text{否则} \end{cases} \tag{6.124}$$

其中，B 是正常数。当 B 为有限值时，该公式描述了一个带限的白高斯过程。但是当 $B \to \infty$ 时，描述的是白(包括所有频率)高斯过程。

带限白随机过程的自相关函数为

$$R_n(\tau) = BN_0\left(\frac{\sin 2\pi B\tau}{2\pi B\tau}\right) \tag{6.125}$$

总平均功率为 $P = R_n(0) = BN_0$。因为该随机过程 PSD 在 $f=0$ 处没有 δ 函数，所以 $n(t)$ 的均值为 0。而且，当 k 为非 0 的整数时，$\tau = k/(2B)$ 时的自相关函数值为 0。因此，当 $t_2 - t_1 = \tau = k/(2B)$，$k \neq 0$ 时，随机变量 $n_1 = n(t_1)$ 和 $n_2 = n(t_2)$ 是不相关的。对其他 τ 值，随机变量是相关的。因为假设 $n(t)$ 是高斯分布，所以 n_1 和 n_2 是联合高斯随机变量。因此，由性质 3，当 $t_2 - t_1 = k/(2B)$ 时，随机变量间是相互独立的。对于其他 t_2 和 t_1，它们不是相互独立的。当 $B \to \infty$ 时，$R_n(\tau) \to \frac{1}{2}N_0\delta(\tau)$，并且对于所有 t_1 和 t_2 值，只要 $t_1 \neq t_2$，n_1 和 n_2 是相互独立的随机变量。此外，随着 $B \to \infty$，平均功率变为无穷大。因此，白噪声过程在物理上是不可实现的。但它是系统分析的一个很有用的数学抽象，就好像尽管确定性冲激响应本身是物理不可实现的，但它对得到线性系统的冲激响应非常有用。

6.7 带通随机过程[①]

6.7.1 带通随机信号的表示

在4.1节中，我们已经证明任何带通波形均可表示为

$$v(t) = \text{Re}\{g(t)e^{j\omega_c t}\} \tag{6.126a}$$

或者等效地表示为

$$v(t) = x(t)\cos\omega_c t - y(t)\sin\omega_c t \tag{6.126b}$$

以及

$$v(t) = R(t)\cos[\omega_c t + \theta(t)] \tag{6.126c}$$

其中，$g(t)$是复包络，$R(t)$是实包络，$\theta(t)$是相位，$x(t)$和$y(t)$是正交分量。于是，复包络为

$$g(t) = |g(t)|e^{j\underline{/g(t)}} = R(t)e^{j\theta(t)} = x(t) + jy(t) \tag{6.127a}$$

其关系为

$$R(t) = |g(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \tag{6.127b}$$

$$\theta(t) = \underline{/g(t)} = \arctan\left[\frac{y(t)}{x(t)}\right] \tag{6.127c}$$

$$x(t) = R(t)\cos\theta(t) \tag{6.127d}$$

以及

$$y(t) = R(t)\sin\theta(t) \tag{6.127e}$$

此外，$v(t)$的频谱与$g(t)$的频谱的关系如式(4.12)所示，即

$$V(f) = \tfrac{1}{2}[G(f - f_c) + G^*(-f - f_c)] \tag{6.128}$$

在第4章和第5章中，带通表示方法被用于从确知的角度分析通信系统。这里，我们将带通表示方法扩展到随机过程，它可以是随机信号、噪声或被噪声污染的信号。

若$v(t)$是其频率在$\pm f_c$附近的带通随机过程，那么$g(t)$、$x(t)$、$y(t)$、$R(t)$和$\theta(t)$均是基带过程。总之，$g(t)$是复过程(如6.1节所描述的那样)，$x(t)$、$y(t)$、$R(t)$和$\theta(t)$是实随机过程。该结论可以从式(4.5)~式(4.8)中给出的$v(t)$的傅里叶级数展开中得到，由于$v(t)$是随机过程，所以其傅里叶级数的系数形成随机变量集合。此外，若$v(t)$是高斯随机过程，由于其傅里叶级数的系数是对$v(t)$进行线性运算得到的，所以这些系数形成高斯随机变量集合。类似地，当$v(t)$是高斯过程时，$g(t)$、$x(t)$和$y(t)$是$v(t)$的线性系数，因为它们是$v(t)$的线性函数。然而，$R(t)$和$\theta(t)$不是$v(t)$的线性函数，所以它们不是高斯随机过程。例题6.13中将计算这些随机过程的一维PDF。

我们现在将平稳性的主题应用于带通信号的表示。

定理 若$x(t)$和$y(t)$是联合广义平稳(WSS)过程，实带通随机过程

$$v(t) = \text{Re}\{g(t)e^{j\omega_c t}\} = x(t)\cos\omega_c t - y(t)\sin\omega_c t \tag{6.129a}$$

是广义平稳的，当且仅当

---

① 在其他一些书籍中被称为窄带噪声过程，这是一个误称，因为它们可以是宽带的也可以是窄带的。

$$\mathbf{1.}\quad \overline{x(t)} = \overline{y(t)} = 0 \tag{6.129b}$$

$$\mathbf{2.}\quad R_x(\tau) = R_y(\tau) \tag{6.129c}$$

以及

$$\mathbf{3.}\quad R_{xy}(\tau) = -R_{yx}(\tau) \tag{6.129d}$$

证明　广义平稳要求 $\overline{v(t)}$ 是常数，并且 $R_v(t,t+\tau)$ 仅是 τ 的函数。我们看到仅当 $\overline{x(t)} = \overline{y(t)} = 0$ 时，对任何 t 值，$\overline{v(t)} = \overline{x(t)}\cos\omega_c t - \overline{y(t)}\sin\omega_c t$ 都是常数。因而，需要条件 1。

使 $R_v(t,t+\tau)$ 仅是 τ 的函数的条件证明如下：

$$\begin{aligned}
&R_v(t, t+\tau)\\
&= \overline{v(t)v(t+\tau)}\\
&= \overline{[x(t)\cos\omega_c t - y(t)\sin\omega_c t][x(t+\tau)\cos\omega_c(t+\tau) - y(t+\tau)\sin\omega_c(t+\tau)]}\\
&= \overline{x(t)x(t+\tau)}\cos\omega_c t\cos\omega_c(t+\tau) - \overline{x(t)y(t+\tau)}\cos\omega_c t\sin\omega_c(t+\tau)\\
&\quad - \overline{y(t)x(t+\tau)}\sin\omega_c t\cos\omega_c(t+\tau) + \overline{y(t)y(t+\tau)}\sin\omega_c t\sin\omega_c(t+\tau)
\end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned}
R_v(t,t+\tau) = {}& R_x(\tau)\cos\omega_c t\cos\omega_c(t+\tau) - R_{xy}(\tau)\cos\omega_c t\sin\omega_c(t+\tau)\\
& - R_{yx}(\tau)\sin\omega_c t\cos\omega_c(t+\tau) + R_y(\tau)\sin\omega_c t\sin\omega_c(t+\tau)
\end{aligned}$$

采用正弦和余弦乘积的三角恒等式，该公式化简为

$$\begin{aligned}
R_v(t,t+\tau) = {}& \tfrac{1}{2}[R_x(\tau) + R_y(\tau)]\cos\omega_c\tau + \tfrac{1}{2}[R_x(\tau) - R_y(\tau)]\cos\omega_c(2t+\tau)\\
& -\tfrac{1}{2}[R_{xy}(\tau) - R_{xy}(\tau)]\sin\omega_c\tau - \tfrac{1}{2}[R_{xy}(\tau) + R_{xy}(\tau)]\sin\omega_c(2t+\tau)
\end{aligned}$$

若将包含 t 的项置为 0，那么 $v(t)$ 的自相关仅是 τ 的函数，即 $[R_x(\tau) - R_y(\tau)] = 0$ 和 $[R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau)] = 0$，所以需要条件 2 和条件 3。

若式(6.129)中的条件 1 ~ 性质 3 满足，于是 $v(t)$ 是 WSS，式(6.133a) ~ 式(6.133e)的性质 1 ~ 性质 5 成立。此外，当性质 1 ~ 性质 3 满足时，$v(t) = x(t)\cos w_c t - y(t)\sin w_c t$ 的 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分量满足式(6.133f) ~ 式(6.133n)中描述的性质 6 ~ 性质 14。这些性质在分析通信系统不同点处的随机过程时非常有用。

对于给定的带通波形，其复包络 $g(t)$ 的表示并非唯一的。从式(6.126)很容易看到这一点，其中参数 f_c 的取值有待斟酌。因此，在给定带通波形 $v(t)$ 的表达式中，相应的复包络 $g(t)$ 给出的频率成分取决于模型中所选择的 f_c 值。而且，在表示随机过程时，人们总是希望用具有特定 PSD 特性的 WSS 带通过程来表示。在这种情况下。可以证明当 $v(t)$ 是 WSS 过程时，$\mathrm{Re}\{(-\mathrm{j})g(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c t}\}$ 和 $\mathrm{Re}\{g(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c t}\}$ 具有相同 PSD[Papoulis,1984,pp. 314-322]。因此，$g(t)$ 不是唯一的，可以选择某些 $g(t)$ 满足另外一些理想条件。但是只要式(6.129)的条件满足，性质 1 ~ 性质 14 仍然成立。

在某些应用中，式(6.129)的条件 1 ~ 条件 3 不满足。例如，在非平衡正交调制问题中，$x(t)$ 和 $y(t)$ 正交分量的功率不同时，就是这样一种情况。另一个例子就是当 $x(t)$ 或 $y(t)$ 具有直流分量时。在这些情况下，由式(6.126)描述的带通随机过程模型是非平稳的。因此，人们面临着如下问题：能否找到不满足式(6.129)的性质 1 ~ 性质 3 的带通模型来表示 WSS $v(t)$ 吗？答案是肯定的。将式(6.126)的模型扩展到随机变量 θ_c 作为相位常数，可得到下述定理。

定理　若 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是联合 WSS 过程，那么当 θ_c 是在 $(0, 2\pi)$ 上均匀分布的独立随机变量时，实带通随机过程

$$v(t) = \text{Re}\{g(t)e^{j(\omega_c t + \theta_c)}\} = x(t)\cos(\omega_c t + \theta_c) - y(t)\sin(\omega_c t + \theta_c) \tag{6.130}$$

将是 WSS。

带通模型的这一修正不会给我们造成烦恼，因为我们可以说明它是物理可实现过程的一个更好的模型，即常数 θ_c 通常被称为随机初始相位，因为它取决于物理过程的“初始条件”。除非插入外部信号使其同步，任何噪声源或信号源都是以随机相角起始的。

证明 用式(6.130)对带通随机过程建模，我们现在证明即使在式(6.129)的条件可能不满足的情况下，当 $g(t)$ 是广义平稳过程时，$v(t)$ 就是广义平稳过程。为了证明式(6.130)是 WSS，首先要求 $\overline{v(t)}$ 是常数：

$$\overline{v(t)} = \overline{\text{Re}\{g(t)e^{j(\omega_c t + \theta_c)}\}} = \text{Re}\left\{\overline{g(t)}e^{j\omega_c t}\overline{e^{j\theta_c}}\right\}$$

但是 $\overline{e^{j\theta_c}} = 0$，所以有 $\overline{v(t)} = 0$，这是常数。第二个要求是 $R_v(t, t+\tau)$ 仅是 τ 的函数：

$$\begin{aligned} R_v(t, t+\tau) &= \overline{v(t)v(t+\tau)} \\ &= \overline{\text{Re}\{g(t)e^{j(\omega_c t + \theta_c)}\}\,\text{Re}\{g(t+\tau)e^{j(\omega_c t + \omega_c \tau + \theta_c)}\}} \end{aligned}$$

应用等式 $\text{Re}(c_1)\text{Re}(c_2) = \frac{1}{2}\text{Re}(c_1 c_2) + \frac{1}{2}\text{Re}(c_1^* c_2)$，并且 θ_c 是独立的随机变量，我们得到

$$\begin{aligned} R_v(t, t+\tau) &= \tfrac{1}{2}\text{Re}\{\overline{g(t)g(t+\tau)}e^{j(2\omega_c t)+\omega_c \tau)}\overline{e^{j2\theta_c}}\} \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\text{Re}\{\overline{g^*(t)g(t+\tau)}\,e^{j\omega_c \tau}\} \end{aligned}$$

但是，$\overline{e^{j2\theta_c}} = 0$ 和 $R_g(\tau) = \overline{g^*(t)g(t+\tau)}$，因为 $g(t)$ 被假定为广义平稳过程。于是，

$$R_v(t, t+\tau) = \tfrac{1}{2}\text{Re}\{R_g(\tau)e^{j\omega_c \tau}\} \tag{6.131}$$

式(6.131)的右边不是 t 的函数，因此 $R_v(t, t+\tau) = R_v(\tau)$。于是，式(6.130)是广义平稳带通随机过程的模型。

此外，对于式(6.130)给出的模型，式(6.133a)~式(6.133e)中的性质1~性质5是成立的，但是，除非式(6.129)成立，否则对 $v(t) = x(t)\cos(\omega_c t + \theta_c) - y(t)\sin(\omega_c t + \theta_c)$ 中的 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分量，性质6~性质14[见式(6.133f)~式(6.133h)]是不成立的。然而，如后面将要证明的，如果检测器的初始相位 θ_0 与 $v(t)$ 相互独立，那么正交乘法检测器(见图6.11)的输出端检测到的 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分量将满足性质6~性质14。[注意，除非 $\theta_0 = \theta_c$，否则，检测器输入端对应于 $v(t)$ 的 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分量与 $x(t)$ 和 $y(t)$ 正交输出波形不同；然而，它们的 PSD 可能相同。]

式(6.130)中的复包络表示方法对于计算检测器电路的输出非常有用。例如，如果 $v(t)$ 是应用于乘法检测器的信号加噪声随机过程，若参考信号是 $2\cos(\omega_c t + \theta_c)$ 时，那么 $x(t)$ 是输出随机过程，并且若参考信号为 $-2\sin(\omega_c t + \theta_c)$ 时，$y(t)$ 是输出随机过程(见第4章)。类似地，$R(t)$ 是包络检波器的输出过程，$\theta(t)$ 是相位检测器的输出随机过程。

6.7.2 WSS 带通随机过程的性质

我们可以得到给出自相关函数和 $v(t)$、$g(t)$、$x(t)$ 和 $y(t)$ 的 PSD 之间的关系的定理。这些定理和其他定理作为带通随机过程的性质随后列出。这些关系成立的前提条件是假设带通随机过程 $v(t)$ 是实的 WSS 过程[1]。$v(t)$ 的带通本质可借助于图6.10(a)用数学方法描述，其中，

---

① 因为 $v(t)$ 是带通随机过程，所以它也具有零均值。

$$\mathcal{P}_v(f)=0,\quad f_2<|f|<f_1 \tag{6.132}$$

其中，$0<f_1\leqslant f_c\leqslant f_2$。此外，如图 6.10(a)所示，正常数 B_0 被定义为 f_c 与其频带边缘间的最大频率间隔，并且 $B_0<f_c$。

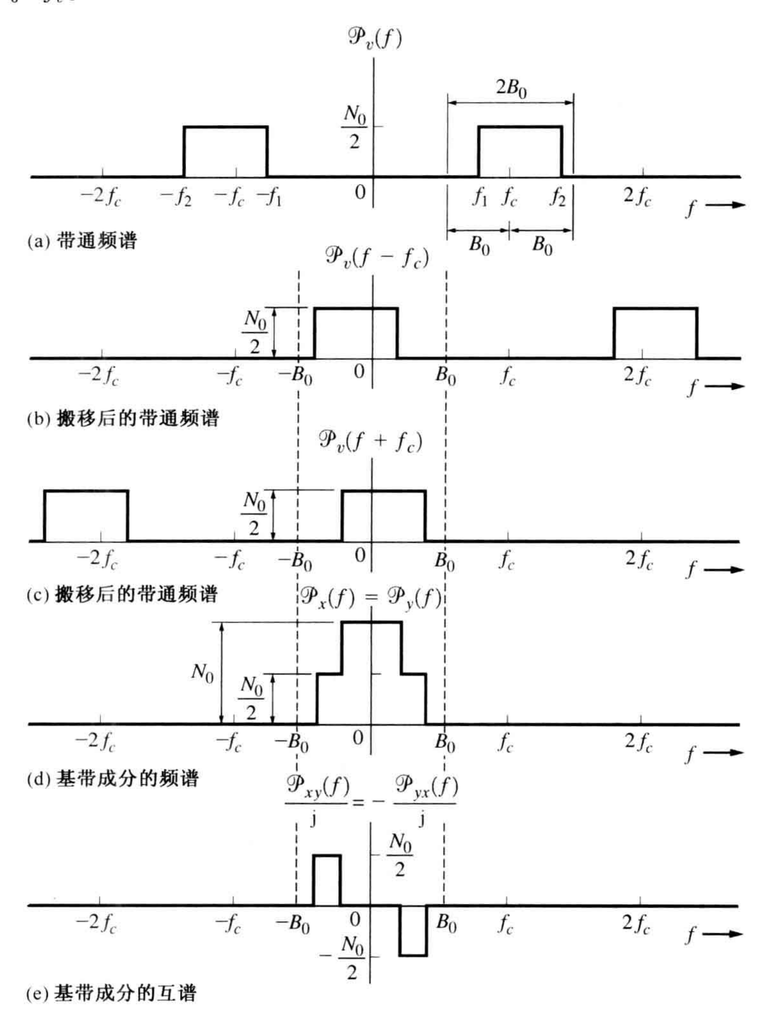


图 6.10　例题 6.11 的随机过程的谱

这些性质如下：

1. $g(t)$是复广义平稳基带随机过程。 (6.133a)

2. $x(t)$和 $y(t)$是实联合广义平稳基带随机过程。 (6.133b)

3. $R_v(\tau)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{R_g(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c\tau}\}$ (6.133c)

4. $\mathcal{P}_v(f)=\frac{1}{4}[\mathcal{P}_g(f-f_c)+\mathcal{P}_g(-f-f_c)]$ (6.133d)

5. $\overline{v^2}=\frac{1}{2}\overline{|g(t)|^2}=R_v(0)=\frac{1}{2}R_g(0)$ (6.133e)

若带通随机过程 $v(t)$是 WSS 过程，并且式(6.129)中的性质 1 ~ 性质 3 都满足，那么 $v(t)$可以用式(6.129a)表示，其中 $x(t)$和 $y(t)$分量满足下面所列的性质 6 ~ 性质 14。另一方面，若 $v(t)$

是 WSS，但不满足式(6.129)中的所有三个条件，那么 $v(t)$ 就不能用式(6.129a)表示，因为它不是 WSS 模型，并且性质 6 ~ 性质 14 不能应用。然而，对于 WSS 的 $v(t)$，无论条件 1 ~ 条件 3 是没有一个满足、部分满足还是全部满足，并且由此式(6.130)的 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分量相应地不满足、部分满足或全部满足性质 6 ~ 性质 14，总可以应用式(6.130)的表示方法。此外，若 $v(t)$ 的正交分量由乘法检测器电路恢复，如图 6.11 所示，其中 θ_0 是独立于 $v(t)$ 的均匀分布随机变量，那么检测到的 $x(t)$ 和 $y(t)$ 正交分量满足性质 6 ~ 性质 14。这些性质如下：①

6. $$\overline{x(t)} = \overline{y(t)} = 0 \tag{6.133f}$$

7. $$\overline{v^2(t)} = \overline{x^2(t)} = \overline{y^2(t)} = \frac{1}{2}\overline{|g(t)^2|}$$
$$= R_v(0) = R_x(0) = R_y(0) = \frac{1}{2}R_g(0) \tag{6.133g}$$

8. $$R_x(\tau) = R_y(\tau) = 2\int_0^{\infty} \mathcal{P}_v(f)\cos[2\pi(f-f_c)\tau]\,df \tag{6.133h}$$

9. $$R_{xy}(\tau) = 2\int_0^{\infty} \mathcal{P}_v(f)\sin[2\pi(f-f_c)\tau]\,df \tag{6.133i}$$

10. $$R_{xy}(\tau) = -R_{xy}(-\tau) = -R_{xy}(\tau) \tag{6.133j}$$

11. $$R_{xy}(0) = 0 \tag{6.133k}$$

12. $$\mathcal{P}_x(f) = \mathcal{P}_y(f) = \begin{cases}[\mathcal{P}_v(f-f_c) + \mathcal{P}_v(f+f_c)], & |f| < B_0\\ 0, & \text{否则}\end{cases} \tag{6.133l}$$

13. $$\mathcal{P}_{xy}(f) = \begin{cases}j[\mathcal{P}_v(f-f_c) - \mathcal{P}_v(f+f_c)], & |f| < B_0\\ 0, & \text{否则}\end{cases} \tag{6.133m}$$

14. $$\mathcal{P}_{xy}(f) = -\mathcal{P}_{xy}(-f) = -\mathcal{P}_{yx}(f) \tag{6.133n}$$

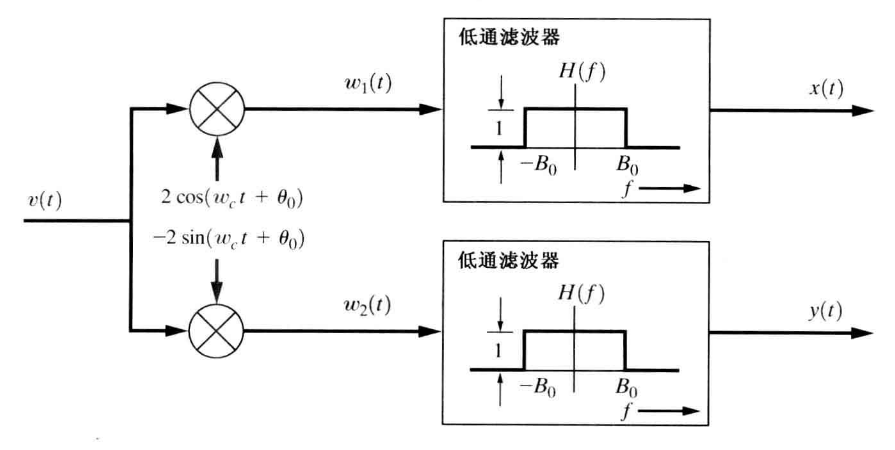


图 6.11　从 $v(t)$ 恢复 $x(t)$ 和 $y(t)$

若 $v(t)$ 是广义平稳单边带(SSB)随机过程，则可以得到另外一些性质。若 $v(t)$ 是 $f = \pm f_c$ 的 SSB，于是，从第 5 章，得到：

$$g(t) = x(t) \pm j\hat{x}(t) \tag{6.134}$$

① 在例题 6.11 和例题 6.12 后将给出这些性质的证明。性质 6 ~ 性质 14 对式(6.129a)的 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分量也成立，前提条件是式(6.129b、c、d)满足。

其中，上符号表示 USSB，下符号表示 LSSB。$\hat{x}(t)$ 是 $x(t)$ 的希尔伯特交换。应用式(6.134)可得到一些其他性质：

15. 当 $v(t)$ 是关于 $f = \pm f_c$ 的 SSB 过程时，

$$R_g(\tau) = 2[R_x(\tau) \pm j\hat{R}_x(\tau)] \tag{6.135a}$$

其中 $\hat{R}_x(\tau) = [1/\pi\tau] * R_x(\tau)$。

16. 对 USSB 随机过程，

$$\mathcal{P}_g(f) = \begin{cases} 4\mathcal{P}_x(f), & f > 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases} \tag{6.135b}$$

17. 对 LSSB 随机过程，

$$\mathcal{P}_g(f) = \begin{cases} 0, & f > 0 \\ 4\mathcal{P}_x(f), & f < 0 \end{cases} \tag{6.135c}$$

从性质 9，我们看到若 $v(t)$ 的 PSD 关于 $f = f_c$ 是偶对称的，其中 $f>0$，那么对于所有的 τ，$R_{xy}(\tau) \equiv 0$。因而，当 $\mathcal{P}_v(f)$ 关于 $f=f_c$，$f>0$ 是偶对称的时，$x(t)$ 和 $y(t)$ 将是正交的随机过程。此外，若 $v(t)$ 是高斯过程，那么 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是相互独立的高斯随机过程。

例题 6.11　带通白噪声正交分量的频谱

假设 $v(t)$ 是独立带限白噪声随机过程。令 $v(t)$ 的 PSD 在频带 $f_1 \leqslant |f| \leqslant f_2$ 上为 $N_0/2$，如图 6.10(a)所示。应用性质 12，我们可以计算 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的 PSD。将图 6.10(b)和(c)所示的搬移后的 $\mathcal{P}_v(f-f_c)$ 和 $\mathcal{P}_v(f+f_c)$ 相加，就可得到图 6.10(d)所示的 $\mathcal{P}_x(f)$。注意，对于 $|f| > B_0$，$\mathcal{P}_x(f)$ 为 0。类似地，利用性质 13 可以得到互谱 $\mathcal{P}_{xy}(f)$，如图 6.10(e)所示。有趣的是，在互谱不为零的频率范围上，其值都是虚数，这是因为 $\mathcal{P}_v(f)$ 是实函数。而且，互谱总是奇函数。

总归一化功率为

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_v(f)\,df = N_0(f_2 - f_1)$$

应用性质 7，若功率从 $\mathcal{P}_x(f) = \mathcal{P}_y(f)$ 计算得到，则可以得到同样的结论：

$$P = R_x(0) = R_y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_x(f)\,df = N_0(f_2 - f_1)$$

例题 6.12　BPSK 信号的 PSD

我们现在计算被随机数据调制的 BPSK 信号的 PSD。在第 2 章和第 5 章中，已经证明了 BPSK 信号可以表示为

$$v(t) = x(t)\cos(\omega_c t + \theta_c) \tag{6.136}$$

其中，$x(t)$ 表示双极性二元数据(见例题 2.22)，而 θ_c 是随机初始相位。

应用性质 4，可以得到 $v(t)$ 的 PSD，其中 $g(t) = x(t) + j0$。于是，

$$\mathcal{P}_v(f) = \tfrac{1}{4}[\mathcal{P}_x(f - f_c) + \mathcal{P}_x(-f - f_c)] \tag{6.137}$$

我们现在需要求双极性二元调制信号 $x(t)$ 的 PSD。这在例题 6.4 中进行了计算，其中计算得到了具有等概的二元数据的双极性基带信号的 PSD。将式(6.62)或等价的式(6.67)代入式(6.137)，得到 BPSK 信号的 PSD：

$$\mathcal{P}_v(f) = \frac{T_b}{4}\left\{\left[\frac{\sin \pi(f - f_c)T_b}{\pi(f - f_c)T_b}\right]^2 + \left[\frac{\sin \pi(f + f)T_b}{\pi(f + f_c)T_b}\right]^2\right\} \tag{6.138}$$

图 6.12 给出了该结果。在式(2.200)中曾引用了这一结论，其中也对带宽进行了计算。

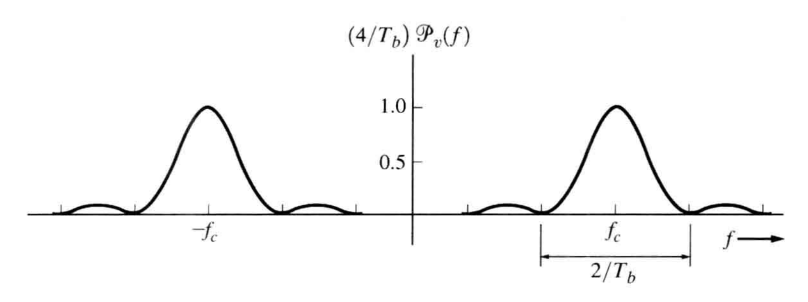


图 6.12 BPSK 信号的功率谱

6.7.3 一些性质的证明

给出前述 17 个性质的证明是一项繁重的任务，因此在这里只给出其中部分性质的详细证明。包括相似的数学推导的证明留给读者作为练习题。

式(6.131)以前的讨论已证明了性质 1 ~ 性质 3。对式(6.133c)取傅里叶变换，可从性质 3 得到性质 4。其数学推导与得到式(4.25)的过程相同。性质 5 也可以由性质 3 直接得到。性质 6 将随后证明。由性质 3 和性质 8 可直接推得性质 7。正如我们以后将看到的那样，性质 8 ~ 性质 11 可由性质 12 和性质 13 得到。

借助于图 6.11 可以得到性质 6 ~ 性质 12，即如 4.13 节的式(4.77)所示，用乘法检测器可以恢复 $x(t)$ 和 $y(t)$。因而，

$$x(t) = [2v(t)\cos(\omega_c t + \theta_0)] * h(t) \tag{6.139}$$

和

$$y(t) = -[2v(t)\sin(\omega_c t + \theta_0)] * h(t) \tag{6.140}$$

其中，$h(t)$ 是带限于 B_0 Hz 的理想低通滤波器的冲激响应，而 θ_0 是在 $(0, 2\pi)$ 上服从均匀分布的独立随机变量，对应于相位非相干接收机振荡器的随机初始相位。取集平均即可从式(6.139)得到性质 6，因为 $\overline{\cos(\omega_c t + \theta_0)} = 0$ 和 $\overline{\sin(\omega_c t + \theta_0)} = 0$。性质 12，即 $x(t)$ 的 PSD，可以通过首先计算图 6.11 中的 $w_1(t)$ 的自相关来得到：

$$\begin{aligned} w_1(t) &= 2v(t)\cos(\omega_c t + \theta_0) \\ R_{w_1}(\tau) &= \overline{w_1(t)w_1(t+\tau)} \\ &= 4\overline{v(t)v(t+\tau)\cos(\omega_c t + \theta_0)\cos(\omega_c(t+\tau) + \theta_0)} \end{aligned}$$

但是 θ_0 是一个独立随机变量，因此，应用三角恒等式，可得到：

$$R_{w_1}(\tau) = 4\overline{v(t)v(t+\tau)}\left[\tfrac{1}{2}\cos\omega_c\tau + \tfrac{1}{2}\overline{\cos((2\omega_c t) + \omega_c\tau + 2\theta_0)}\right]$$

但是 $\overline{\cos(2\omega_c t + \omega_c\tau + 2\theta_0)} = 0$，故

$$R_{w_1}(\tau) = 2R_v(\tau)\cos\omega_c\tau \tag{6.141}$$

对式(6.141)取傅里叶变换，可以得到 $w_1(t)$ 的 PSD。

$$\mathcal{P}_{w_1}(f) = 2\mathcal{P}_v(f) * \left[\tfrac{1}{2}\delta(f - f_c) + \tfrac{1}{2}\delta(f + f_c)\right]$$

或者

$$\mathcal{P}_{w_1}(f) = \mathcal{P}_v(f - f_c) + \mathcal{P}_v(f + f_c)$$

最后，$x(t)$ 的 PSD 为

$$\mathcal{P}_x(f) = |H(f)|^2 \mathcal{P}_{w_1}(f)$$

或者

$$\mathcal{P}_x(f) = \begin{cases} [\mathcal{P}_v(f - f_c) + \mathcal{P}_v(f + f_c)], & |f| < B_0 \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

这就是性质 12。

对性质 12 进行傅里叶反变换，就可直接得到性质 8：

$$R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{P}_x(f)]$$
$$= \int_{-B_0}^{B_0} \mathcal{P}_v(f - f_c) e^{j2\pi f\tau} df + \int_{-B_0}^{B_0} \mathcal{P}_v(f + f_c) e^{j2\pi f\tau} df$$

改变变量，在第一个积分中令 $f_1 = -f + f_c$，并且在第二个积分中令 $f_1 = f + f_c$。于是得到：

$$R_x(\tau) = \int_{f_c - B_0}^{f_c + B_0} \mathcal{P}_v(-f_1) e^{j2\pi(f_c - f_1)\tau} df_1 + \int_{f_c - B_0}^{f_c + B_0} \mathcal{P}_v(f_1) e^{j2\pi(f_1 - f_c)\tau} df_1$$

但是 $\mathcal{P}_v(-f) = \mathcal{P}_v(f)$，因为 $v(t)$ 是实随机过程。此外，因为 $v(t)$ 是带限的，所以对积分的限制可以变为在 $(0, \infty)$ 上进行积分。因而，

$$R_x(\tau) = 2\int_0^{\infty} \mathcal{P}_v(f_1) \left[\frac{e^{j2\pi(f_1 - f_c)\tau} + e^{-j2\pi(f_1 - f_c)\tau}}{2} \right] df_1$$

其等价于性质 8。

用类似的方法，可以证明性质 13 和性质 9 也成立。性质 10 和性质 14 可以直接从性质 9 得到。

对于 SSB 随机过程，$y(t) = \pm \hat{x}(t)$。性质 15 可以用以下方法得到：

$$\begin{aligned} R_{gg}(\tau) &= \overline{g^*(t)g(t + \tau)} \\ &= \overline{[x(t) \mp j\hat{x}(t)][x(t + \tau) \pm j\hat{x}(t + \tau)]} \\ &= [\overline{x(t)x(t + \tau)} + \overline{\hat{x}(t)\hat{x}(t + \tau)}] \\ &\quad \pm j[\overline{-\hat{x}(t)x(t + \tau)} + \overline{x(t)\hat{x}(t + \tau)}] \end{aligned} \tag{6.142}$$

利用互相关函数的定义及性质 10，我们得到：

$$R_{x\hat{x}}(\tau) = \overline{x(t)\hat{x}(t + \tau)} = -R_{\hat{x}x}(\tau) = -\overline{\hat{x}(t)x(t + \tau)} \tag{6.143}$$

此外，已知 $\hat{x}(t)$ 是 $x(t)$ 与 $1/(\pi\tau)$ 的卷积，可以证明（见习题 6.46）：

$$R_{\hat{x}}(\tau) = R_x(\tau) \tag{6.144}$$

和

$$R_{x\hat{x}}(\tau) = \hat{R}_{xx}(\tau) \tag{6.145}$$

因此，式(6.142)简化为性质 15。对式(6.135a)进行傅里叶变换，可得到性质 16 和性质 17。

如性质 6 所示，当 $v(t)$ 独立于 θ_0 时，检测到的均值 $\overline{x(t)}$ 和 $\overline{y(t)}$ 为 0。但是，从式(6.139)和式(6.140)，我们知道这需要一个相对不那么严格的条件，即如果 $v(t)$ 分别正交于 $\cos(\omega_c t + \theta_0)$ 或 $\sin(\omega_c t + \theta_0)$，那么 $\overline{x(t)}$ 和 $\overline{y(t)}$ 将是 0；否则，它们将不是 0。例如，假设 $v(t)$ 为

$$v(t) = 5\cos(\omega_c t + \theta_c) \tag{6.146}$$

其中，θ_c 是在 $(0, 2\pi)$ 上服从均匀分布的随机变量。若图 6.11 中的参考信号 $2\cos(\omega_c t + \theta_0)$ 具有与 $\cos(\omega_c t + \theta_c)$ 相干的相位（即 $\theta_0 \equiv \theta_c$），那么上边的低通滤波器输出的均值为 5。另一方面，

若随机变量 θ_0 和 θ_c 相互独立，那么 $v(t)$ 将与 $\cos(\omega_c t+\theta_0)$ 正交，图 6.11 中上边的低通滤波器输出的 $\bar{x}$ 为 0。上述两种情况下，输出的直流分量(即时间平均)为 $5\cos(\theta_0-\theta_c)$。

我们并没有给出体现 $R(t)$ 和 $\theta(t)$ 的自相关或 PSD 与 $v(t)$ 的自相关或 PSD 之间关系的性质。通常情况下，这是一个比较困难的问题，因为 $R(t)$ 和 $\theta(t)$ 是 $v(t)$ 的非线性函数。该主题将在例题 6.13 后进行更为详细的讨论。

如前所述，当 $v(t)$ 是高斯随机过程时，$x(t)$、$y(t)$ 和 $g(t)$ 是高斯随机过程。然而，如我们将要推导的那样，当 $v(t)$ 是高斯随机过程时，$R(t)$ 和 $\theta(t)$ 并非高斯随机过程。

例题 6.13 高斯带通随机过程的包络和相位函数的 PDF

假设 $v(t)$ 是具有关于 $f=\pm f_c$ 对称的有限的 PSD 的广义平稳高斯过程。我们需要求包络 $R(t)$ 的一维 PDF。当然，这等价于输入为高斯随机过程时，如高斯噪声，包络检波器的输出。类似地，也将得到相位 $\theta(t)$(相位检测波的输出)的 PDF。

该问题可以通过计算将 $x=x(t)$ 和 $y=y(t)$ 变为 $R=R(t)$ 和 $\theta=\theta(t)$ 的二维随机变量变换来求解，如图 6.13 所示。因为 $v(t)$ 是高斯随机过程，所以我们知道 x 和 y 是联合高斯过程。当 $v(t)$ 具有关于 $f=\pm f_c$ 对称的有限 PSD 时，x 和 y 的均值都为零，并且二者的方差为

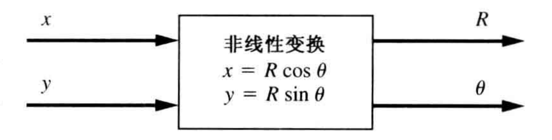


图 6.13 两个高斯函数的非线性(双极性)变换

$$\sigma^2=\sigma_x^2=\sigma_y^2=R_v(0) \tag{6.147}$$

此外，x 和 y 相互独立，因为它们是不相关的高斯随机变量[由于 $v(t)$ 的 PSD 关于 $f=\pm f_c$ 对称]。因此，x 和 y 的联合 PDF 为

$$f_{xy}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/(2\sigma^2)} \tag{6.148}$$

R 和 θ 的联合 PDF 可以通过将 x 和 y 变为 R 和 θ 的二维变换得到：

$$\begin{aligned}f_{R\theta}(R,\theta)&=\left.\frac{f_{xy}(x,y)}{|J[(R,\theta)/(x,y)]|}\right|_{\substack{x=R\cos\theta\\y=R\sin\theta}}\\&=\left.f_{xy}(x,y)\left|J\left(\frac{(x,y)}{(R,\theta)}\right)\right|\right|_{\substack{x=R\cos\theta\\y=R\sin\theta}}\end{aligned} \tag{6.149}$$

我们将采用 $J[(x,y)/(R,\theta)]$ 而不是 $J[(R,\theta)/(x,y)]$，因为在这个问题中，前者的偏导数比后者的偏导数更容易计算一些。我们得到：

$$J\left(\frac{(x,y)}{(R,\theta)}\right)=\mathrm{Det}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial R} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial R} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta}\end{bmatrix}$$

其中，x，y 和 R，θ 的关系如图 6.13 所示。当然，$R\geqslant 0$，并且 θ 在 $(0,2\pi)$ 之间，于是，

$$\begin{aligned}J\left(\frac{(x,y)}{(R,\theta)}\right)&=\mathrm{Det}\begin{bmatrix}\cos\theta & -R\sin\theta\\ \sin\theta & R\cos\theta\end{bmatrix}\\&=R[\cos^2\theta+\sin^2\theta]=R\end{aligned} \tag{6.150}$$

将式(6.148)和式(6.150)代入式(6.149)，R 和 θ 的联合 PDF 为

$$f_{R\theta}(R,\theta)=\begin{cases}\dfrac{R}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{-R^2/2\sigma^2}, & R\geqslant 0 \text{ 和 } 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi \\ 0, & \text{否则}\end{cases} \tag{6.151}$$

通过计算边缘 PDF 得到包络的 PDF：

$$f_R(R)=\int_{-\infty}^{\infty}f_R(R,\theta)\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\frac{R}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{-R/(2\sigma^2)}\mathrm{d}\theta,\quad R\geqslant 0$$

或者

$$f_R(R)=\begin{cases}\dfrac{R}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-R^2/(2\sigma^2)}, & R\geqslant 0 \\ 0, & \text{否则}\end{cases} \tag{6.152}$$

这称为瑞利 PDF。类似地，θ 的 PDF 可以通过联合 PDF 对 R 的积分得到：

$$f_\theta(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi \\ 0, & \text{否则}\end{cases} \tag{6.153}$$

这称为均匀分布。图 6.14 给出了这些 PDF 的曲线。

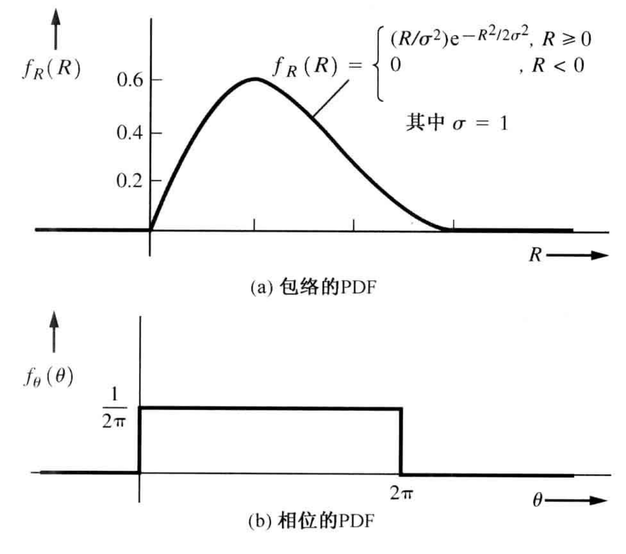


图 6.14　高斯随机过程的包络和相位的 PDF

因为 $f_R(R,\theta)=f_R(R)f(\theta)$，所以随机变量 $R=R(t_1)$ 与 $\theta=\theta(t_1)$ 是相互独立的。然而，因为随机变量 $R=R(t_1)$ 和 $\theta=\theta(t_1+\tau)$ 并不是对于所有 τ 值都相互独立，所以 $R(t)$ 和 $\theta(t)$ 不是相互独立的随机过程。要证明该命题，需要求解将随机变量 $(x(t_1),x(t_2),y(t_1),y(t_2))$ 变为 $(R(t_1),R(t_2),\theta(t_1),\theta(t_2))$ 的四维变换问题，其中 $t_2-t_1=\tau$ [Davenport 和 Root，1958]。

因为 $R_R(\tau)=\overline{R(t)R(t+\tau)}$，所以计算包络 $R(t)$ 的自相关函数通常要已知 $R(t)$ 的二维密度函数。但是，为了得到 $R(t)$ 的联合密度函数，必须通过一个四维的变换首先得到 $(R(t_1),R(t_2),\theta(t_1),\theta(t_2))$ 的四维密度函数，如上一段中所讨论的那样。要计算相位 $\theta(t)$ 的自相关函数，也要解决类似的问题。由于 $R(t)$ 和 $\theta(t)$ 是 $v(t)$ 的非线性函数，在计算其自相关函数时就会有一些困难。$R(t)$ 和 $\theta(t)$ 的 PSD 可通过对其自相关函数取傅里叶变换得到。

6.8 匹配滤波器

6.8.1 一般的结论

在本章的前几节，我们研究了描述随机过程以及分析线性系统对这些随机过程的影响的技术。本节将研究一种在最大化信号的同时使噪声的影响最小的线性滤波器的设计。

匹配滤波器的一般表示如图6.15所示。用$s(t)$表示输入信号，$s_0(t)$表示输出信号。噪声也用类似的符号表示。该滤波器在信号存在或不存在时都可以应用。但是，当信号存在时，其波形应是确知的(这将在例题6.14和例题6.15中讨论该滤波器如何应用于数字信号处理及雷达系统中变得很清楚)。假设输入信号是(绝对)时限于$(0, T)$，在其他值上为0。加性输入噪声$n(t)$的PSD，即$\mathcal{P}_n(f)$也是已知的。我们希望确定滤波器的特性，以使得在采样时刻t_0，与输出噪声平均功率相比，输出信号的瞬时功率最大，即我们想要找到$h(t)$或者等价的$H(f)$，使得

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = \frac{s_0^2(t)}{\overline{n_0^2(t)}} \tag{6.154}$$

在$t=t_0$处取最大值。这就是匹配滤波器设计准则。

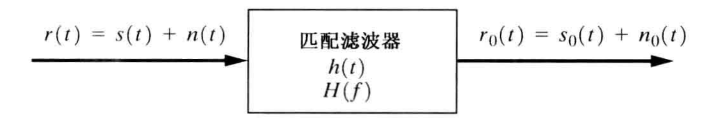


图6.15 匹配滤波器

匹配滤波器并不保持输入信号波形，因为这并非其目标。更确切地说，其目标是通过使输入信号波形失真并且滤除噪声，以使得在采样时刻t_0，输出信号电平相对于均方根(输出)噪声值尽可能大。在第7章中我们将证明，在一定条件下，匹配滤波器在接收数字信号时将使得错误概率最小。

定理 匹配滤波器是使得图6.15中的$(S/N)_{\text{out}} = s_0^2(t_0)/\overline{n_0^2(t)}$最大化的一种线性滤波器，并且其传递函数应为①

$$H(f) = K\frac{S^*(f)}{\mathcal{P}_n(f)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0} \tag{6.155}$$

其中，$S(f) = \mathcal{F}[s(t)]$是时间间隔T秒上的已知输入信号的傅里叶变换。$\mathcal{P}_n(f)$是输入噪声的PSD，t_0是计算$(S/N)_{\text{out}}$时的采样时间，K是非0的任意实常数。

证明 t_0时刻的输出信号为

$$s_0(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t_0}\,\mathrm{d}f$$

输出噪声的平均功率为

$$\overline{n_0^2(t)} = R_{n_0}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2\mathcal{P}_n(f)\,\mathrm{d}f$$

---

① 一般认为匹配滤波器的公式首先由B. M. Dwork和T. S. George于1950年独立发现；对于白噪声情形的结论由D. O. North于1943年首次提出[Root,1987]。

将这些公式代入式(6.154)，得到：

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t_0}\mathrm{d}f\right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 \mathcal{P}_n(f)\,\mathrm{d}f} \tag{6.156}$$

希望找到使得$(S/N)_{\text{out}}$最大的$H(f)$。这可以借助于许瓦兹不等式来得到[1]，该不等式为

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} A(f)B(f)\,\mathrm{d}f\right|^2 \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |A(f)|^2\,\mathrm{d}f \int_{-\infty}^{\infty} |B(f)|^2\,\mathrm{d}f \tag{6.157}$$

其中，$A(f)$和$B(f)$可以是实变量f的复变函数。此外，仅当

$$A(f) = KB^*(f) \tag{6.158}$$

时，等号成立，其中K为任意的实常数。令

$$A(f) = H(f)\sqrt{\mathcal{P}_n(f)}$$

和

$$B(f) = \frac{S(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t_0}}{\sqrt{\mathcal{P}_n(f)}}$$

用许瓦兹不等式来代替式(6.156)右侧的分子项。于是，式(6.156)变为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} \leqslant \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 \mathcal{P}_n(f)\,\mathrm{d}f \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(f)|^2}{\mathcal{P}_n(f)}\,\mathrm{d}f}{\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 \mathcal{P}_n(f)\,\mathrm{d}f}$$

其中，$\mathcal{P}_n(f)$是非负的实函数。因此，

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(f)|^2}{\mathcal{P}_n(f)}\,\mathrm{d}f \tag{6.159}$$

当选择$H(f)$以使得等号成立时，就得到最大的$(S/N)_{\text{out}}$。这时$A(f)=KB^*(f)$或者

$$H(f)\sqrt{\mathcal{P}_n(f)} = \frac{KS^*(f)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}}{\sqrt{\mathcal{P}_n(f)}}$$

这就简化为定理中的式(6.155)。

从实际观点看，常数K是任意的，因为输入信号和输入噪声都将乘以K，得到$(S/N)_{\text{out}}$时K的影响被抵消掉了。但是输出信号和噪声大小都依赖于这个常数值。

在证明过程中，没有限制要求保证$h(t)$必须是因果的。因此，式(6.155)得到的滤波器有可能是不可实现的(即非因果的)。然而，由该式给出的传递函数通常可以由一个可实现(因果)的滤波器来近似实现。若包含了因果的约束(在对匹配滤波器求解时)，那么这个问题变得更加困难，并且必须求解线性积分式以得到未知的函数$h(t)$[Thomas，1969]。

① 许瓦兹不等式的证明在本章末尾的附录(6.10 节)中给出。

6.8.2 对白噪声的结论

对于白噪声的情形，匹配滤波器的描述简化如下：对于白噪声，其 $\mathcal{P}_n(f) = N_0/2$。于是，式(6.155)变为

$$H(f) = \frac{2K}{N_0} S^*(f)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$$

从该公式可得到如下定理。

定理 当输入噪声为白噪声时，匹配滤波器的单位冲激响应为

$$h(t) = Cs(t_0 - t) \tag{6.160}$$

其中，C 是任意的实的正常数，t_0是峰值信号输出的时刻，$s(t)$是确知的输入信号波形。

证明 我们有

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(f)] = \frac{2K}{N_0}\int_{-\infty}^{\infty} S^*(f)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega t_0}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}f$$

$$= \frac{2K}{N_0}\left[\int_{-\infty}^{\infty} S(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f(t_0-t)}\mathrm{d}f\right]^*$$

$$= \frac{2K}{N_0}[s(t_0 - t)]^*$$

但 $s(t)$是实信号，因此令 $C=2K/N_0$，于是冲激响应等价于式(6.160)。

式(6.160)表明匹配滤波器(白噪声情形)的冲激响应就是简单地将确知的输入信号波形反转并平移了 t_0(如例题6.14所示)，所以说滤波器与信号是相“匹配”的。

一个很重要的性质就是由匹配滤波器得到的$(S/N)_{\text{out}}$的实际值。由式(6.159)，并应用式(2.41)给出的帕塞瓦尔定理，我们得到：

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{|S(f)|^2}{N_0/2}\mathrm{d}f = \frac{2}{N_0}\int_{-\infty}^{\infty}s^2(t)\mathrm{d}t$$

但 $\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\,\mathrm{d}t = E_s$ 是(时限)输入信号的能量，因此，

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = \frac{2E_s}{N_0} \tag{6.161}$$

这是一个非常有趣的结果。它表明$(S/N)_{\text{out}}$取决于信号的能量和噪声的PSD的大小，而非使用的特定信号的波形。当然，通过提高信号幅度、信号持续期或两者同时提高，都可以增加信号的能量以提高$(S/N)_{\text{out}}$。

式(6.161)也可以根据时间-带宽乘积以及平均输入信号功率(在 T 秒上)与平均噪声功率之比来表示。假设在 W Hz的带宽上测得输入噪声功率，此外还知道信号的持续期为 T 秒。于是，由式(6.161)，有

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = 2TW\frac{(E_s/T)}{(N_0W)} = 2(TW)\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{in}} \tag{6.162}$$

其中，$(S/N)_{\text{in}} = (E_sT)/(N_0W)$。从式(6.162)看到时间-带宽乘积($TW$)的增加并不改变输出SNR，因为输入SNR也相应地减小。在雷达应用中，TW 的增加将提高目标的分辨能力，而不是模糊目标。式(6.161)很清楚地表明，是输入信号能量与 N_0 之比决定了所得到的$(S/N)_{\text{out}}$ [Turin,1976]。

例题 6.14　积分-清除(匹配)滤波器

假设已知信号为矩形脉冲，如图 6.16(a)所示：

$$s(t)=\begin{cases}1, & t_1 \leqslant t \leqslant t_2\\ 0, & \text{否则}\end{cases} \tag{6.163}$$

信号持续期为 $T=t_2-t_1$。于是对于白噪声的情形，匹配滤波器的冲激响应为

$$h(t)=s(t_0-t)=s(-(t-t_0)) \tag{6.164}$$

为方便起见，令 C 为 1，并且 $s(-t)$ 如图 6.16(b)所示。由该图显见，要使冲激响应为因果，要求

$$t_0 \geqslant t_2 \tag{6.165}$$

我们选 $t_0=t_2$，因为这是满足因果条件所允许的最小值。我们要使滤波器输出最大信号值前的等待时间(即 $t=t_0$)最小化，图 6.16(c)给出了 $t_0=t_2$ 时的 $h(t)$，图 6.16(d)给出了最终的输出信号。注意，输出信号的峰值出现在 $t=t_0$。为了使峰值出现在 $t=t_0$，输入信号经滤波器后有失真。

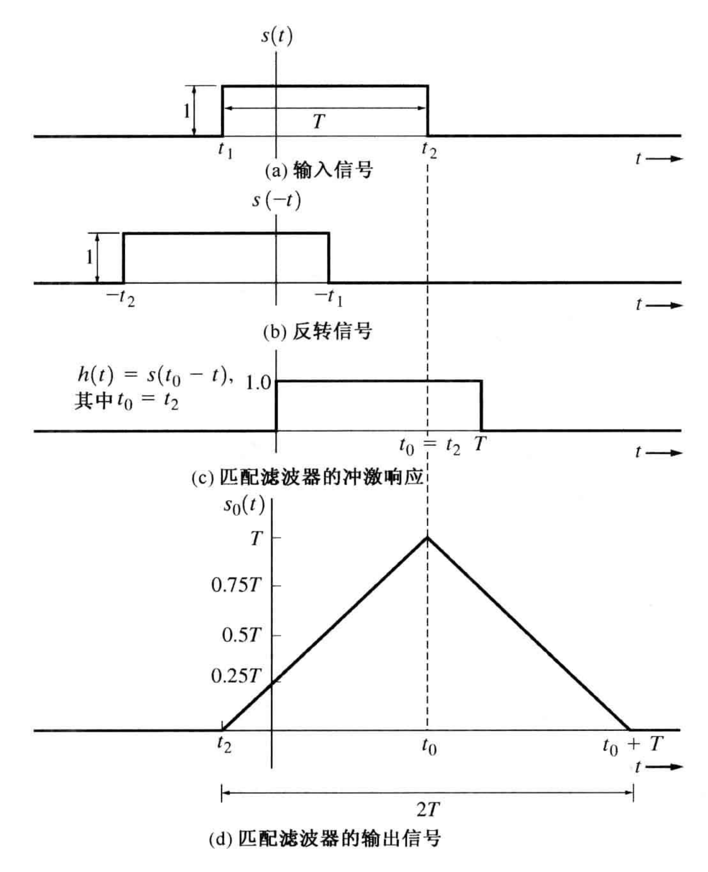


图 6.16　与例题 6.14 中的匹配滤波器有关的波形

在比特波形为矩形的数字信号应用中，如我们现在所阐明的那样，匹配滤波器等价于积分-清除滤波器。假定我们采用的信号是一个矩形脉冲，并且在信号电平最大时对滤波器的输出采样感兴趣。于是在 $t=t_0$ 时，滤波器的输出为

$$r_0(t_0) = r(t_0) * h(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\lambda) h(t_0 - \lambda)\,\mathrm{d}\lambda$$

将图6.16(c)给出的匹配滤波器冲激响应代入，该式变为

$$r_0(t_0) = \int_{t_0-T}^{t_0} r(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \tag{6.166}$$

因此，我们需要将输入数字信号加噪声在一个符号周期T(对于二元信号是比特周期)上积分，然后在符号周期末尾将积分器输出“清空”。对于二元信号示于图6.17中。注意，为了使该最优滤波器工作正常，需要一个称为比特同步的外部时钟信号(见第3章对比特同步的讨论)。此外，输出信号不是二元的，因为输出样本值仍然被噪声所污染(尽管噪声已经被匹配滤波器最小化)。将输出送入比较器，可以将其转换为二元信号，如第7章所述，在数字接收机中就是这样做的。

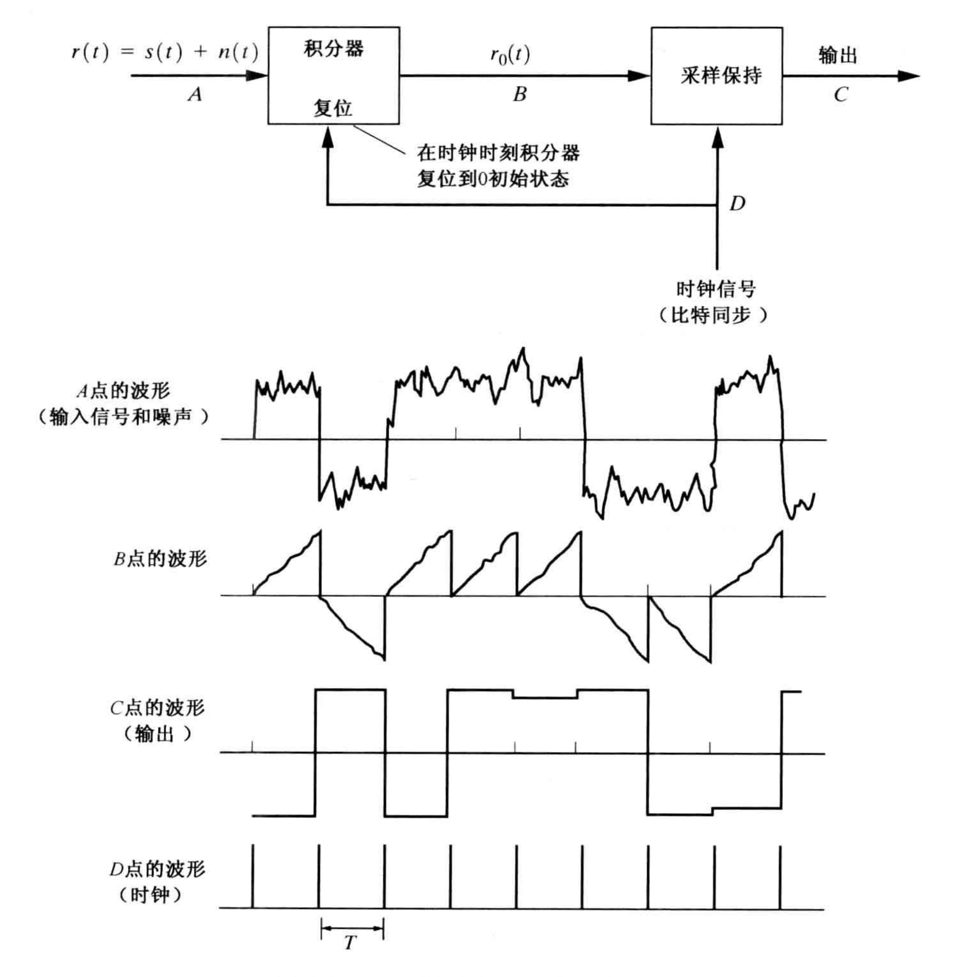


图6.17　匹配滤波器的积分-清除实现

6.8.3　相关处理

定理　对于白噪声的情形，匹配滤波器可以通过对输入$s(t)$求相关来实现，即

$$r_0(t_0)=\int_{t_0-T}^{t_0} r(t)s(t)\,\mathrm{d}t \tag{6.167}$$

其中，$s(t)$是已知信号波形，$r(t)$是处理器的输入，如图6.18所示。

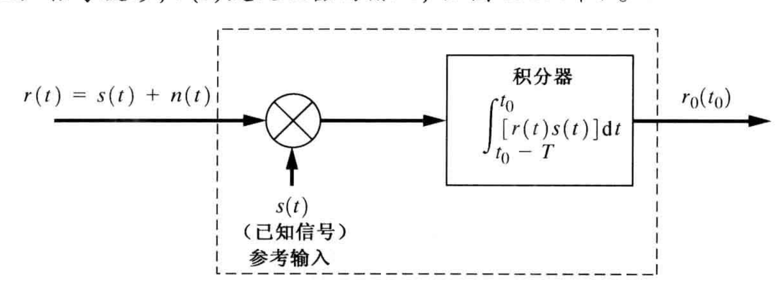


图6.18　通过相关处理来实现的匹配滤波器

证明　匹配滤波器在t_0时刻的输出为

$$r_0(t_0)=r(t_0)*h(t_0)=\int_{-\infty}^{t_0} r(\lambda)h(t_0-\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$$

但是由式(6.160)，有

$$h(t)=\begin{cases}s(t_0-t), & 0\leqslant t\leqslant T\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

故

$$r_0(t_0)=\int_{t_0-T}^{t_0} r(\lambda)s[t_0-(t_0-\lambda)]\,\mathrm{d}\lambda$$

这等价于式(6.167)。

对于带通信号，相关处理器通常被当作匹配滤波器使用，如例题6.15所述。

例题6.15　检测BPSK信号的匹配滤波器

参考图6.18，令滤波器输入为BPSK信号加白噪声。例如，这可以是BPSK接收机的中频输出。该BPSK信号可写为

$$s(t)=\begin{cases}+A\cos\omega_c t, & nT<t\leqslant(n+1)T \quad \text{对二元1}\\ -A\cos\omega_c t, & nT<t\leqslant(n+1)T \quad \text{对二元0}\end{cases}$$

其中，$f_c=\omega_c/2\pi$是中频信号的中心频率，T是1比特数据的持续期，而n为整数。相关处理器的参考输入为$+A\cos\omega_c t$或者$-A\cos\omega_c t$，这取决于我们要检测的是“1”还是“0”。因为这些波形除了±1常数外都是相同的，所以我们用$\cos\omega_c t$作为参考。当BPSK信号的二元“1”输入时(无噪声)，输出端将产生$\frac{1}{2}AT$的正电压。类似地，BPSK信号的二元“0”将在输出端产生负电压$-\frac{1}{2}AT$。因此，对BPSK信号加噪声，我们得到图6.19所示的匹配滤波器。注意，除了其LPF被由比特同步时钟所控制的门限积分器代替之外，这看起来很像我们熟悉的乘法检测器。采用这种后检测处理，乘法检测器变为匹配滤波器。然而，要实现这样的最优检测器，需要比特同步和载波同步。该项技术示于图6.19中，可归类为积分-清除滤波器的更一般的形式(首次出现在图6.17)。

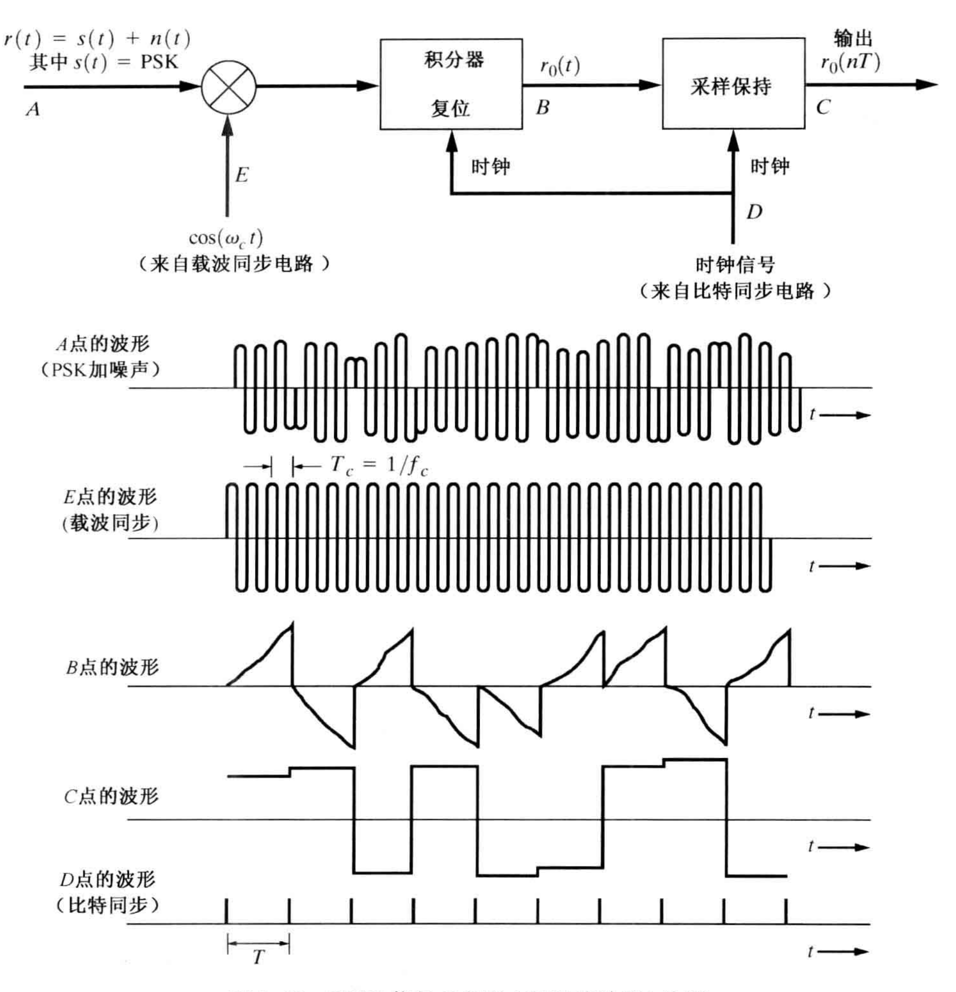


图 6.19 BPSK 信号的相关(匹配滤波器)检测

6.8.4 横向型匹配滤波器

横向型滤波器常常可设计成满足匹配滤波的准则。参考图 6.20，我们希望找到一组横向滤波器系数$\{a_i,\ i=1,2,\cdots,N\}$以使得 $s_0^2(t_0)/\overline{n_0^2(t)}$ 达到最大。在 $t=t_0$时刻的输出信号为

$$s_0(t_0) = a_1 s(t_0) + a_2 s(t_0 - T) + a_3 s(t_0 - 2T) + \ldots + a_N s(t_0 - (N-1)T)$$

或者

$$s_0(t_0) = \sum_{k=1}^{N} a_k s(t_0 - (k-1)T) \tag{6.168}$$

类似地，对于输出噪声，

$$n_0(t) = \sum_{k=1}^{N} a_k n(t - (k-1)T) \tag{6.169}$$

平均噪声功率为

$$\overline{n_0^2(t)} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} a_k a_l \overline{n(t-(k-1)T)n(t-(l-1)T)}$$

或者

$$\overline{n_0^2(t)} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} a_k a_l R_n(kT - lT) \tag{6.170}$$

其中，$R_n(\tau)$是输入噪声的自相关函数。因此，输出峰值信号与平均噪声功率比为

$$\frac{s_0^2(t_0)}{\overline{n_0^2(t)}} = \frac{\left[\sum_{k=1}^{N} a_k s(t_0 - (k-1)T)\right]^2}{\sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} a_k a_l R_n(kT - lT)} \tag{6.171}$$

用拉格朗日法使分子最大化而保持分母为常数，这样可找到使得该比值达到最大的所有 a_k 值 [Olmsted,1961，p. 518]。于是，我们要最大化函数

$$\begin{aligned} M(a_1, a_2, \cdots, a_N) = & \left[\sum_{k=1}^{N} a_k s(t_0 - (k-1)T)\right]^2 \\ & -\lambda \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} a_k a_l R_n(kT - lT) \end{aligned} \tag{6.172}$$

其中，λ 是拉格朗日乘子。对于所有 $i=1, 2, \cdots, N$，当 $\partial M/\partial a_i = 0$ 时，取得最大值。因此，对于 $i=1, 2, \cdots, N$，

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial a_i} = 0 = & 2\left[\sum_{k=1}^{N} a_k s(t_0 - (k-1)T)\right] s(t_0 - (i-1)T) \\ & - 2\lambda \sum_{k=1}^{N} a_k R_n(kT - iT) \end{aligned} \tag{6.173}$$

但是 $\sum_{k=1}^{N} a_k s(t_0 - (k-1)T) = s_0(t_0)$ 为常数。此外，令 $\lambda = s_0(t_0)$。于是，我们得到需要的条件为

$$s(t_0 - (i-1)T) = \sum_{k=1}^{N} a_k R_n(kT - iT) \tag{6.174}$$

对于 $i=1,2,\cdots,N$，这是 N 个联立的线性方程组，对之求解可以得到所有 a 值。将式(6.174)写成矩阵形式很容易得到这些系数。定义元素：

$$s_i \triangleq s[t_0 - (i-1)T], \qquad i = 1, 2, \ldots, N \tag{6.175}$$

和

$$r_{ik} = R_n(kT - iT), \qquad i = 1, \ldots, N \tag{6.176}$$

采用矩阵符号，式(6.174)变为

$$\mathbf{s} = \mathbf{Ra} \tag{6.177}$$

其中已知信号向量为

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_N \end{bmatrix} \tag{6.178}$$

输入噪声的已知自相关矩阵为

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1N} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{N1} & r_{N2} & \cdots & r_{NN} \end{bmatrix} \tag{6.179}$$

未知的横向滤波器系数向量为

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} \tag{6.180}$$

横向型匹配滤波器的系数为

$$\mathbf{a} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{s} \tag{6.181}$$

其中，$\mathbf{R}^{-1}$是白噪声自相关矩阵的逆，并且 $\mathbf{s}$ 是(已知的)信号向量。

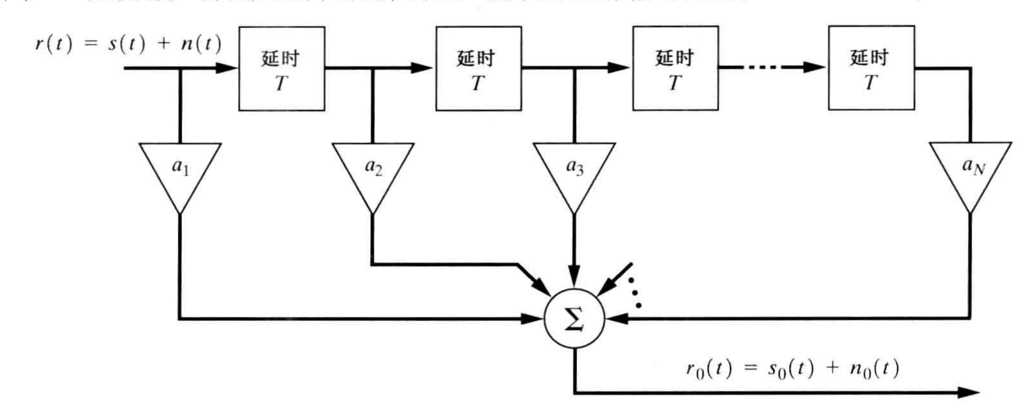


图 6.20 横向型匹配滤波器

6.9 小结

随机过程是随机变量概念对随机波形的扩展。随机过程 $x(t)$ 可以用 N 维的 PDF 描述，其中随机变量为 $x_1 = x(t_1)$，$x_2 = x(t_2)$，…，$x_N = x(t_N)$。当 $N \to \infty$ 时，若该 PDF 具有时不变性，那么称该随机过程为严平稳过程。

随机过程 $x(t)$ 的自相关函数为

$$R_x(t_1, t_2) = \overline{x(t_1)x(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_x(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2$$

在通常情况下，计算 $R_x(t_1, t_2)$ 需要 $x(t)$ 的二维 PDF。若随机过程是平稳的，则有

$$R_x(t_1, t_2) = \overline{x(t_1)x(t_1 + \tau)} = R_x(\tau)$$

其中，$\tau = t_2 - t_1$。

若 $\overline{x(t)}$ 是常数并且 $R_x(t_1, t_2) = R_x(\tau)$，那么该随机过程称为广义平稳。若一个随机过程是严格平稳的，那么它一定是广义平稳的，但是反过来通常并不成立。

当一个随机过程的时间平均等于相应的集平均时，该随机过程称为各态历经的。若一个随机过程是各态历经的，那么它也是平稳的。但反过来通常不成立。对于各态历经随机过程，其直流值分量(时间平均)为 $X_{dc} = \overline{x(t)}$，均方根值(时间平均)是 $X_{rms} = \sqrt{\overline{x^2(t)}}$。

随机过程的功率谱密度(PSD)，即 $\mathcal{P}_x(f)$ 是自相关函数 $R_x(\tau)$ 的傅里叶变换(维纳-欣钦定理)：

$$\mathcal{P}_x(f) = \mathcal{F}[R_x(\tau)]$$

PSD 是非负实函数，并且对于实过程，其 PSD 是关于 $f=0$ 偶对称的，PSD 也可以通过对截断的样本函数进行傅里叶变换取集平均得到。

广义平稳实随机过程的自相关函数是实函数，关于 $\tau=0$ 是偶对称的。此外，$R_x(0)$ 等于总的归一化平均功率，它是 $R_x(\tau)$ 的最大值。

对于白噪声，其 PSD 为常数并且其自相关函数是在 $\tau=0$ 处的狄拉克冲激函数。因为白噪声的功率无穷大，所以它是物理不可实现的，但是在许多问题中，它是非常有用的近似。

两个联合平稳的实随机过程 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的互相关函数为

$$R_{xy}(\tau)=\overline{x(t)y(t+\tau)}$$

互 PSD 为

$$\mathcal{P}_{xy}(f)=\mathcal{F}[R_{xy}(\tau)]$$

若对于所有 τ，有

$$R_{xy}(\tau)=[\overline{x(t)}]\,[\overline{y(t)}]$$

那么称两个随机过程是不相关的。若对所有 τ，有

$$R_{xy}(\tau)=0$$

则称两随机过程是正交的。

令 $y(t)$ 是线性系统的输出随机过程并且 $x(t)$ 是输入随机过程，其中 $y(t)=x(t)*h(t)$。于是，

$$R_y(\tau)=h(-\tau)*h(t)*R_x(\tau)$$

以及

$$\mathcal{P}_y(f)=|H(f)|^2\mathcal{P}_x(f)$$

其中，$H(f)=F[h(t)]$。

线性系统的等效带宽定义为

$$B=\frac{1}{|H(f_0)|^2}\int_0^{\infty}|H(f)|^2\,\mathrm{d}f$$

其中，$H(f)$ 是系统的传递函数，f_0 通常是 $|H(f)|$ 取最大值时所对应的频率值。类似地，随机过程 $x(t)$ 的等效带宽为

$$B=\frac{1}{\mathcal{P}_x(f_0)}\int_0^{\infty}\mathcal{P}_x(f)\,\mathrm{d}f=\frac{R_x(0)}{2\mathcal{P}_x(f_0)}$$

如果线性系统的输入为高斯过程，那么其输出也是高斯过程。

实平稳带通随机过程可表示为

$$v(t)=\mathrm{Re}\{g(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_c t+\theta_c)}\}$$

其中，复包络 $g(t)$ 与正交的随机过程 $x(t)$ 和 $y(t)$ 有关。6.7 节中列出了这些随机过程的许多性质。例如，当 $v(t)$ 是高斯随机过程，并且其 PSD 关于 $f=f_c$，$f>0$ 对称时，$x(t)$ 和 $y(t)$ 是相互独立的高斯随机过程。同样还可得到 SSB 带通随机过程的性质。

匹配滤波器是对于给定的输入信号波形使得瞬时输出信号功率与平均输出噪声功率之比最大的线性滤波器。对于白噪声的情形，匹配滤波器的冲激响应为

$$h(t)=Cs(t_0-t)$$

其中，$s(t)$ 是已知的信号波形，C 是实常数，t_0 是输出信号功率最大的时刻。匹配滤波器有多种实现形式，例如积分-清除、相关器和横向滤波器等结构。

6.10 附录：许瓦兹不等式的证明

许瓦兹不等式为

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right|^2 \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|^2\,\mathrm{d}t \tag{6.182}$$

当且仅当

$$f(t) = Kg^*(t) \tag{6.183}$$

时，等号成立，其中 K 是任意实常数，$f(t)$ 和 $g(t)$ 可以是复数。假设 $f(t)$ 和 $g(t)$ 都具有有限能量，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t < \infty \qquad 和 \qquad \int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|^2\,\mathrm{d}t < \infty \tag{6.184}$$

证明 许瓦兹不等式等价于不等式

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|^2\,\mathrm{d}t} \tag{6.185}$$

此外，

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}|f(t)g(t)|\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty}|f(t)||g(t)|\,\mathrm{d}t \tag{6.186}$$

若式(6.183)满足，那么等号成立。因此，若可以证明

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)||g(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|^2\,\mathrm{d}t} \tag{6.187}$$

那么就证明了许瓦兹不等式。为简化符号，我们用实函数 $a(t)$ 和 $b(t)$ 代替 $|f(t)|$ 和 $|g(t)|$，其中，

$$a(t) = |f(t)| \tag{6.188a}$$

和

$$b(t) = |g(t)| \tag{6.188b}$$

于是需证明：

$$\int_a^b a(t)b(t)\,\mathrm{d}t < \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}a^2(t)\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}b^2(t)\,\mathrm{d}t} \tag{6.189}$$

通过用正交函数级数来表示 $a(t)$ 和 $b(t)$ 可以很容易证明这一点。令

$$a(t) = a_1\varphi_1(t) + a_2\varphi_2(t) \tag{6.190a}$$

$$b(t) = b_1\varphi_1(t) + b_2\varphi_2(t) \tag{6.190b}$$

其中，如第 2 章所述，$\mathbf{a}=(a_1,a_2)$，$\mathbf{b}=(b_1,b_2)$，分别表示 $a(t)$ 和 $b(t)$。图 6.21 描述了这些关系。

于是，利用此图，我们得到：

$$\cos\theta = \cos(\theta_a - \theta_b) = \cos\theta_a\cos\theta_b + \sin\theta_a\sin\theta_b = \frac{a_1}{|\mathbf{a}|}\frac{b_1}{|\mathbf{b}|} + \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}\frac{b_2}{|\mathbf{b}|}$$

或者

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} \tag{6.191}$$

此外，点积等价于内积：

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \int_{-\infty}^{\infty} a(t)b(t)\,\mathrm{d}t \tag{6.192a}$$

[将 $a(t) = \sum a_j\varphi_j(t)$ 和 $b(t) = \sum b_k\varphi_k(t)$ 代入积分，其中 $\varphi_j(t)\varphi_k(t)$ 是实正交函数，即可证明。]

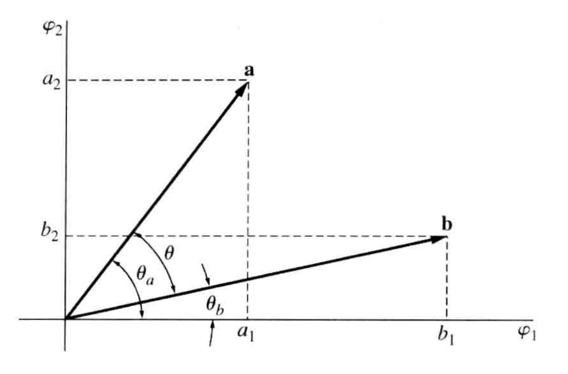


图 6.21 $a(t)$ 和 $b(t)$ 的向量表示

由勾股定理，向量 **a** 和 **b** 的长度(或范数)为

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} a^2(t)\,\mathrm{d}t} \tag{6.192b}$$

和

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} = \sqrt{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} b^2(t)\,\mathrm{d}t} \tag{6.192c}$$

因为 $|\cos\theta| \leqslant 1$，我们有

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} a(t)b(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} a^2(t)\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} b^2(t)\,\mathrm{d}t} \tag{6.193}$$

其中，当代入

$$\mathbf{a} = K\mathbf{b} \tag{6.194}$$

时，等号成立。应用式(6.188)，当 $f(t) = Kg^*(t)$ 时，我们发现式(6.194)也满足，于是等号成立。因此，式(6.193)的得证也就证明了许瓦兹不等式的成立。

6.11 助学例题

SA6.1 经线性变换的高斯随机变量的 PDF 令 $y(t) = A\cos(10\pi t)$ 为随机过程，其中 A 是均值为 0、方差为 $\sigma_A{}^2$ 的高斯随机变量。试求 $y(t)$ 的 PDF。$y(t)$ 是 WSS 吗?

解: $y(t)$ 是 A 的线性函数。于是，因为 A 是高斯变量，所以 $y(t)$ 是高斯过程(见 6.6 节)。因为 $\bar{A} = 0$，所以，

$$m_y = \overline{y(t)} = \overline{A}\cos(10\pi t) = 0 \tag{6.195a}$$

和

$$\sigma_y^2 = \overline{y^2} - \overline{m_y^2} = \overline{A^2}\cos^2(10\pi t) = \sigma_A^2\cos^2(10\pi t) \tag{6.195b}$$

因此，$y(t)$ 的 PDF 为

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}}\mathrm{e}^{-y^2/2\sigma_y{}^2} \tag{6.195c}$$

其中，$\sigma_y{}^2$ 由式(6.195b)给出。此外，$y(t)$ 不是 WSS，因为

$$R_y(0) = \sigma_y^2 + m_x^2 = \sigma_A^2\cos^2(10\pi t)$$

是 t 的函数。

SA6.2 线性滤波器输出的均值 若输入 $x(t)$ 是 WSS 随机过程，推导线性时不变滤波器输出的均值的表达式。

解： 滤波器输出为

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

其中，$h(t)$ 是滤波器的冲激响应。对其取期望，可得到：

$$\begin{aligned} m_y &= \overline{y(t)} = \overline{h(t) * x(t)} = h(t) * \overline{x(t)} = h(t) * m_x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) m_x \mathrm{d}\lambda = m_x \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \end{aligned} \tag{6.196}$$

然而，滤波器的传递函数为

$$H(f) = \mathscr{F}[h(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\,\mathrm{d}t$$

于是，$H(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,\mathrm{d}t$。因此，式(6.196)简化为

$$m_y = m_x H(0) \tag{6.197}$$

SA6.3 微分器输出的平均功率 令 $y(t) = \mathrm{d}n(t)/\mathrm{d}t$，其中 $n(t)$ 是 PSD 为 $\mathscr{P}_n(f) = N_0/2 = 10^{-6}\,\mathrm{W/Hz}$ 的随机噪声过程，计算 $y(t)$ 在 $B = 10$ Hz 的低通频段上的归一化功率。

解： $\mathscr{P}_y(f) = |H(f)|^2 \mathscr{P}_n(f)$，其中，从表 2.1 可知，对于微分器，$H(f) = \mathrm{j}2\pi f$。因此，

$$P_y = \int_{-B}^{B} \mathscr{P}_y(f)\,\mathrm{d}f = \int_{-B}^{B} (2\pi f)^2 \frac{N_0}{2}\,\mathrm{d}f = \frac{8\pi^2}{3}\left(\frac{N_0}{2}\right)B^3$$

或者

$$P_y = \frac{8\pi^2}{3}(10^{-6})(10^3) = 0.0263\,\mathrm{W} \tag{6.198}$$

SA6.4 带通过程的 PSD 一个带通随机过程描述为

$$v(t) = x(t)\cos(\omega_c t + \theta_c) - y(t)\sin(\omega_c t + \theta_c)$$

其中，$y(t) = x(t)$ 是 WSS 过程，其 PSD 如图 6.22(a)所示，θ_c 是在$(0, 2\pi)$上服从均匀分布的独立随机变量，求 $v(t)$ 的 PSD。

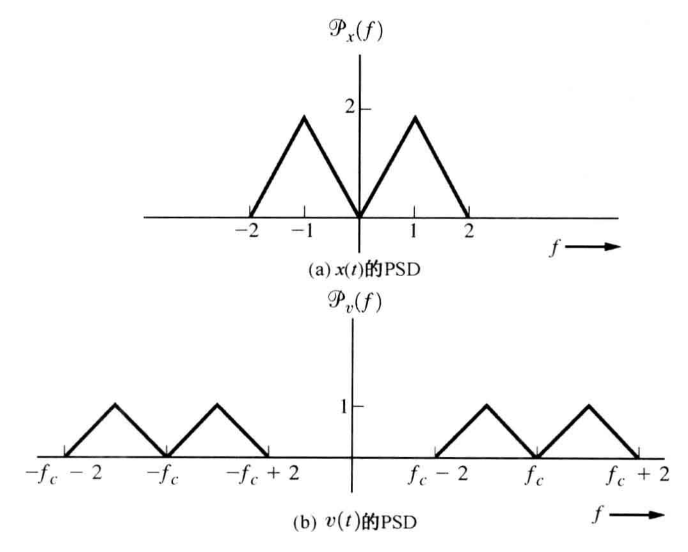


图 6.22 助学例题 SA6.4 的 PSD

解：从式(6.130)，我们知道 $v(t)$ 是 WSS 带通过程，其 $\mathcal{P}_v(f)$ 由式(6.133d)给出。于是，需要计算 $\mathcal{P}_g(f)$。同时，

$$v(t) = \text{Re}\{g(t)e^{j(w_c t+\theta_c)}\}$$

其中，$g(t)=x(t)+jy(t)=x(t)+jx(t)=(1+j)x(t)$。我们有

$$R_g(\tau) = \overline{g^*(t)g(t+\tau)} = \overline{(1-j)(1+j)x(t)x(t+\tau)}$$
$$= (1+1)R_x(\tau) = 2R_x(\tau)$$

因此，有

$$\mathcal{P}_g(f) = 2\mathcal{P}_x(f) \tag{6.199}$$

将式(6.199)代入式(6.133d)，我们得到：

$$\mathcal{P}_v(f) = \frac{1}{2}\left[\mathcal{P}_x\left(f-f_c\right) + \mathcal{P}_x\left(-f-f_c\right)\right] \tag{6.200}$$

对图 6.22(a)中的 $\mathcal{P}_x(f)$，对应的 $\mathcal{P}_v(f)$ 如图 6.22(b)所示。

习题

6.1　令随机过程定义为

$$x(t) = At + B$$

(a)若 B 为常数，A 在 -1 和 $+1$ 之间均匀分布，画出几个样本函数。

(b)若 A 为常数，B 在 0 和 2 之间均匀分布，画出几个样本函数。

★ 6.2　令随机过程为

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)$$

其中，A 和 ω_0 是常数，θ 是随机变量。令

$$f(\theta) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}, & 0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

(a)计算 $\overline{x(t)}$。

(b)由(a)的结果，对该过程的平稳性有什么结论？

6.3　利用习题 6.2 中的随机过程：

(a)计算 $\langle x^2(t)\rangle$。

(b)计算 $\overline{x^2(t)}$。

(c)由(a)和(b)的结果，对于这些均值，判断该过程是否各态历经？

6.4　令 $x(t)$ 为一个正弦随机过程，其相位角为均匀分布，如例题 6.2 中情况 1 所述。用 MATLAB 画出 $A=5$ V 的随机过程的 PDF。

★ 6.5　传统的平均读数交流电压表(伏-欧万用表)的原理图如图 P6.5 所示。表针的偏移角度正比于通过表的平均电流。表的刻度给出了正弦电压的均方根值。假设用该表确定噪声电压的均方根值。已知噪声电压是零均值的各态历经高斯过程。要得到高斯噪声的真实均方根值，该表读数所乘的常数值是多少？[提示：当输入电压为正时，二极管短路，为负时二极管开路。]

6.6　令 $x(t)=A_0\sin(\omega_0 t+\theta)$ 是随机过程，θ 是 $0\sim 2\pi$ 上服从均匀分布的随机变量，A_0 和 ω_0 是常数。

(a)试求 $R_x(\tau)$。

(b)证明 $x(t)$ 是广义平稳的。

(c)验证 $R_x(\tau)$ 满足相应性质。

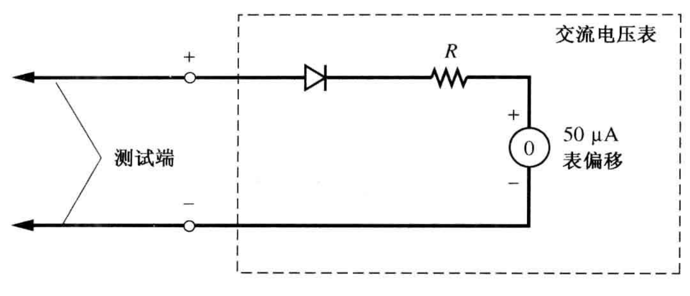


图 P6.5

6.7 令 $r(t)=A_0\cos\omega_0 t+n(t)$，其中 A_0 和 ω_0 是常数。假设 $n(t)$ 是均值为 0、自相关函数为 $R_n(\tau)$ 的广义平稳随机噪声。

(a) 试求 $\overline{r(t)}$ 并确定 $r(t)$ 是否为广义平稳的。

(b) 计算 $R_r(t_1, t_2)$。

(c) 计算 $\langle R_r(t, t+\tau)\rangle$，其中 $t_1=t$, $t_2=t+\tau$。

6.8 令加性信号加噪声随机过程由公式 $r(t)=s(t)+n(t)$ 所描述。

(a) 证明 $R_r(\tau)=R_s(\tau)+R_n(\tau)+R_{sn}(\tau)+R_{ns}(\tau)$。

(b) 当 $s(t)$ 和 $n(t)$ 相互独立且噪声均值为 0 时，化简(a)的结果。

★ 6.9 考虑两个各态历经的噪声电压之和：

$$n(t) = n_1(t) + n_2(t)$$

$n_1(t)$ 的功率为 5 W，$n_2(t)$ 的功率为 10 W，$n_1(t)$ 的直流分量为 −2 V，n_2 的直流分量为 +1 V，试求 $n(t)$ 的功率，若

(a) $n_1(t)$ 和 $n_2(t)$ 相互正交。

(b) $n_1(t)$ 和 $n_2(t)$ 不相关。

(c) $n_1(t)$ 和 $n_2(t)$ 的互相关在 $\tau=0$ 时为 2。

6.10 假设 $x(t)$ 是各态历经的，并且令 $x(t)=m_x+y(t)$，其中 $m_x=\overline{x(t)}$ 是 $x(t)$ 的直流分量，$y(t)$ 是 $x(t)$ 的交流分量。证明：

(a) $R_x(\tau)=m_x^2+R_y(\tau)$。

(b) $\lim_{\tau\to\infty} R_x(\tau)=m_x^2$。

(c) 可以从 $R_x(\tau)$ 中得到 $x(t)$ 的直流分量吗?

★ 6.11 判断以下函数是否满足自相关函数的性质。

(a) $\sin\omega_0\tau$。

(b) $(\sin\omega_0\tau)/(\omega_0\tau)$。

(c) $\cos\omega_0\tau+\delta(\tau)$。

(d) $e^{-a|\tau|}$，其中 $a<0$。

(e)(说明：$\mathcal{F}[R(\tau)]$ 必须是非负的函数。)

6.12 随机过程 $x(t)$ 的自相关函数为 $R_x(\tau)=5+8e^{-3|\tau|}$。试求：

(a) $x(t)$ 的均方根值。

(b) $x(t)$ 的 PSD。

★ 6.13 某随机过程的自相关为 $R_x(\tau)=4e^{-\tau^2}+3$。画出 $x(t)$ 的 PSD 并且计算 $x(t)$ 的均方根带宽。

6.14 证明若两个随机过程 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是相互独立的，则它们是不相关的(即 $R_{xy}(\tau)=m_x m_y$)。

6.15 若 $x(t)$ 包含周期性分量，证明：

(a) $R_x(\tau)$ 含有周期性分量。

(b) $\mathcal{P}_x(f)$ 含有 δ 函数。

6.16　试求习题 6.2 中描述的随机过程的 PSD。

6.17　判断以下函数是否能成为实随机过程的 PSD 函数。

(a) $2e^{-2\pi|f-45|}$。

(b) $4e^{-2\pi|f^2-16|}$。

(c) $25+\delta(f-16)$。

(d) $10+\delta(f)$。

★ 6.18　各态历经随机过程 $x(t)$ 为

$$\mathscr{P}_x(f)=\begin{cases}\dfrac{1}{B}(B-|f|), & |f|\leqslant B\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

其中 $B>0$，试求：

(a) $x(t)$ 的均方根值。

(b) $R_x(\tau)$。

6.19　参考例题 6.4 中所描述的技术，计算采用曼彻斯特非归 0 码的 PCM 信号的 PSD（见图 3.15）。假设数据取值为 $a_n=\pm1$ 且等概，比特间相互独立。



6.20　用 MATLAB 画出取值为 ±1 并且取 +1 和 −1 概率相等的曼彻斯特 NRZ 线性码的 PSD。假设数据比特之间相互独立并且比特率为 9600 bps。提示：参见习题 6.19 的解或式(3.46c)。

6.21　由图 P6.21 所示的实验室设备确定线性时不变网络的幅度频响。讨论如何由测量结果来计算 $|H(f)|$。

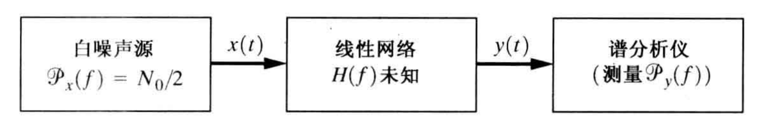


图 P6.21

★6.22　图 P6.22 给出了 $H(f)$ 未知的线性时不变网络。

(a) 试求用 $R_{xy}(\tau)$ 和 N_0 计算 $h(t)$ 的公式。

(b) 试求用 $\mathscr{P}_{xy}(f)$ 和 N_0 计算 $H(f)$ 的公式。

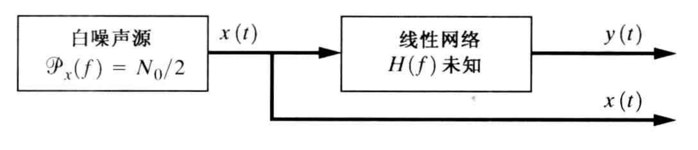


图 P6.22

6.23　线性系统的输入和输出关系为 $y(t)=h(t)*x(t)$，其中 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是联合广义平稳的。证明：

(a) $R_{xy}(\tau)=h(\tau)*R_x(\tau)$。

(b) $\mathscr{P}_{xy}(f)=H(f)\mathscr{P}_x(f)$。

(c) $R_{yx}(\tau)=h(-\tau)*R_x(\tau)$。

(d) $\mathscr{P}_{yx}(f)=H^*(f)\mathscr{P}_x(f)$。

[提示：利用式(6.86)和式(6.87)。]

6.24　用 MATLAB 画出滤波器输入为白噪声的 *RC* 低通滤波器输出端噪声的 PSD。令 $N_0=2$ 以及 $B_{3\,\text{dB}}=3$ kHz。

★ 6.25　PSD 为 $\mathscr{P}_n(f)=N_0/2$ 的各态历经白噪声输入到增益为 K(实数)、$H(f)=K/(\text{j}2\pi f)$ 的理想积分器。

(a) 试求输出的 PSD。

(b) 试求输出噪声的均方根值。

6.26 线性系统的功率传递函数 $|H(f)|^2$ 如图 P6.26 所示。输入 $x(t)$ 是高斯随机过程，其 PSD 为

$$\mathcal{P}_x(f) = \begin{cases} \frac{1}{2}N_0, & |f| \leqslant 2B \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

(a) 试求输出 $y(t)$ 的自相关函数。

(b) 试求 $y(t)$ 的 PDF。

(c) 什么时候两个随机变量 $y_1 = y(t_1)$ 和 $y_2 = y(t_2)$ 相互独立?

6.27 用线性滤波器计算输入波形的 T 秒滑动平均，其中滤波器输出为

$$y(t) = \frac{1}{T}\int_{t-(T/2)}^{t+(T/2)} x(u)\,\mathrm{d}u$$

其中，$x(t)$ 是输入。证明冲激响应为 $h(t) = (1/T)\Pi(t/T)$。

6.28 对习题 6.27，证明：

$$R_y(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\left(1 - \frac{|u|}{T}\right)R_x(\tau - u)\,\mathrm{d}u$$

若 $R_x(\tau) = \mathrm{e}^{-|\tau|}$，并且 $T = 1$ 秒，画出 $R_y(\tau)$，并且将它与 $R_x(\tau)$ 进行比较。

★ 6.29 如例题 6.8 所述，当输入是正弦信号加白噪声时，RC 低通滤波器的信噪比由式(6.95)给出。求使得输出信噪比最大的 RC 乘积的值。

6.30 假设峰值幅度为 A_0、频率为 f_0 的正弦波加上 $\mathcal{P}_n(f) = N_0/2$ 的白噪声输入到一个线性滤波器中。滤波器的传递函数为

$$H(f) = \begin{cases} \frac{1}{B}(B - |f|), & |f| < B \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

其中，B 是滤波器的绝对带宽。确定滤波器输出的信号噪声功率比。

6.31 对具有如图 P6.31 所示的 PSD 的随机过程 $x(t)$，确定：

(a) 等效带宽。

(b) 均方根带宽。

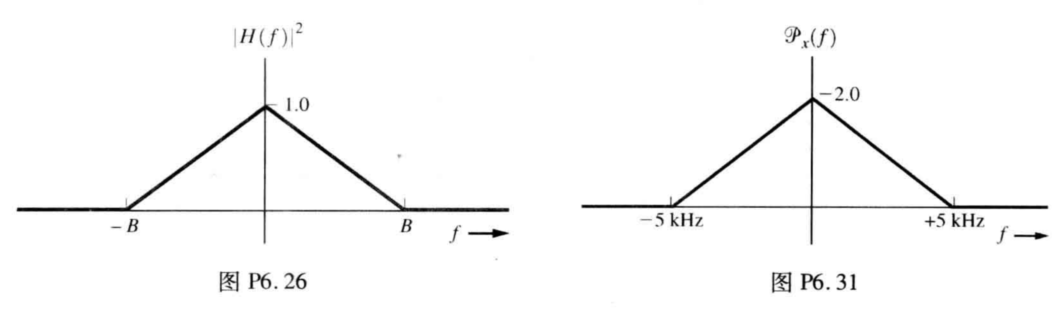


图 P6.26　　图 P6.31

6.32 若 $x(t)$ 为广义平稳的实带通随机过程，证明均方根带宽的定义式(6.100)等价于

$$B_{\mathrm{rms}} = 2\sqrt{\overline{f^2} - (f_0)^2}$$

其中，$\overline{f^2}$ 由式(6.98)或式(6.99)给出，并且 f_0 由式(6.102)给出。

6.33 在带通随机过程的均方根带宽定义中采用了 f_0。证明：

$$f_0 = \frac{1}{2\pi R_x(0)}\left(\frac{\mathrm{d}\hat{R}_x(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right)\bigg|_{\tau=0}$$

其中，$\hat{R}_x(\tau)$ 是 $R_x(\tau)$ 的希尔伯特变换。

★ 6.34 用电压增益为 10 的放大器将两个相同的 RC 低通滤波器级联耦合。

(a) 确定作为 R 和 C 的函数的网络总的传递函数。

(b)用 R 和 C 表示 3 dB 带宽。

6.35　令 $x(t)$ 是高斯过程，其中 $x_1 = x(t_1)$ 和 $x_2 = x(t_2)$ 是两个随机变量。随机变量的方差为 σ_1^2 和 σ_2^2，并且均值为 m_1 和 m_2。相关系数为

$$\rho = \overline{(x_1 - m_1)(x_2 - m_2)}/(\sigma_1\sigma_2)$$

采用矩阵表示 $N = 2$ 维的 PDF，证明 $\mathbf{x}$ 的 PDF 表达式可简化为式(B.97)给出的二元高斯 PDF。

6.36　某带限白色高斯随机过程具有由式(6.125)给出的自相关函数。证明：当 $B \to \infty$ 时，自相关函数变成 $R_n(\tau) = \frac{1}{2}N_0\delta(\tau)$。

★ 6.37　令两个随机过程 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是 0 均值的联合高斯过程，即用 $(N+M)$ 维高斯 PDF 描述 $\{x_1, x_2, \cdots, x_N, y_1, y_2, \cdots, y_M\}$。互相关函数为

$$R_{xy}(\tau) = \overline{x(t_1)y(t_2)} = 10\sin(2\pi\tau)$$

(a)什么时候随机变量 $x_1 = x(t_1)$ 和 $y_2 = y(t_2)$ 相互独立？

(b)证明 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是或者不是相互独立的随机过程。

6.38　从式(6.121)出发，证明：

$$\mathbf{C_y} = \mathbf{HC_xH^T}$$

(提示：采用单位矩阵性质，$\mathbf{AA^{-1}} = \mathbf{A^{-1}A} = \mathbf{I}$，其中 $\mathbf{I}$ 是单位矩阵。)

★ 6.39　考虑随机过程

$$x(t)A_0\cos(\omega_c t + \theta)$$

其中，A_0 和 ω_0 是常数，并且 θ 是在 $(0, \pi/2)$ 上服从均匀分布的随机变量。判断 $x(t)$ 是否是广义平稳的。

★ 6.40　如习题 6.39 所示，试求 $x(t)$ 的 PSD。

★ 6.41　如习题 6.39 所示，若 θ 在 $(0, 2\pi)$ 上服从均匀分布，$x(t)$ 是广义平稳的吗？

6.42　带通 WSS 随机过程 $v(t)$ 由式(6.129a)表示，满足式(6.129)的条件。$v(t)$ 的 PSD 如图 P6.42 所示，其中 $f_c = 1$ MHz。借用 MATLAB 工具：

(a)画出 $\mathcal{P}_x(f)$。

(b)画出 $\mathcal{P}_{xy}(f)$。

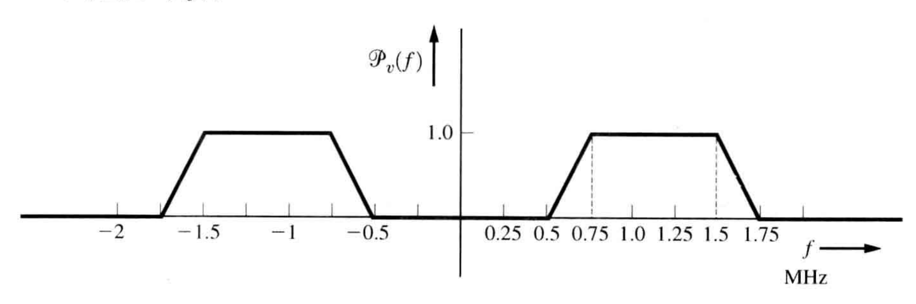


图 P6.42

★ 6.43　图 P6.43 给出带通 WSS 随机过程 $v(t)$ 的 PSD。$v(t)$ 是乘法检测器的输入，振荡器信号(即乘法器的第 2 个输入)是 $5\cos(\omega_c t + \theta_0)$，$f_c = 1$ MHz，θ_0 是在 $(0, 2\pi)$ 上服从均匀分布的独立的随机变量，借用 MATLAB 工具，画出乘法检测器输出的 PSD。

6.44　WSS 带通过程 $v(t)$ 输入图 6.11 所示的乘积检波器中，其中 $\theta_c = 0$。

(a)推导用 $R_v(\tau)$ 表示的 $w_1(t)$ 的自相关函数表达式。$w_1(t)$ 是 WSS 吗？

(b)用(a)中得到的 $R_{w_1}(\tau)$ 来求 $\mathcal{P}_{w_1}(f)$ 的表达式(提示：采用维纳-欣钦定理)。

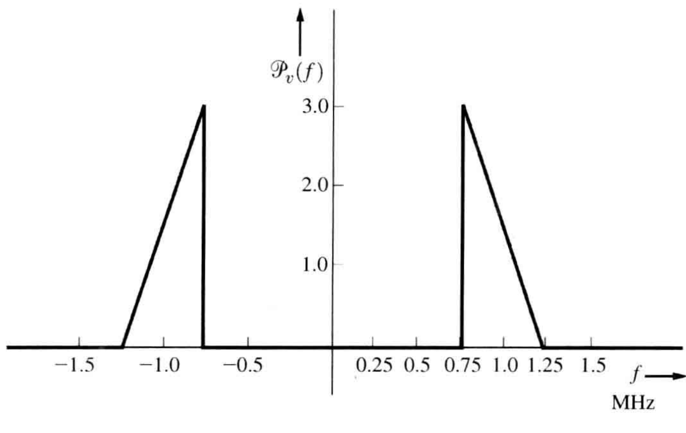


图 P6.43

★ 6.45 USSB 信号为

$$v(t) = 10\,\mathrm{Re}\{[x(t) + j\hat{x}(t)]e^{j(\omega_c t+\theta_c)}\}$$

其中，θ_c是在$(0, 2\pi)$上服从均匀分布的随机变量。$x(t)$的 PSD 在图 P6.31 中给出。试求：

(a)$v(t)$的 PSD。

(b)$v(t)$的总功率。

6.46 证明：$R_{\hat{x}}(\tau) = R_x(\tau)$。

6.47 证明：$R_{x\hat{x}}(\tau) = \hat{R}_x(\tau)$，其中脱字符号表示希尔伯特变换。

6.48 带通随机过程可表示为

$$s(t) = x(t)\cos(\omega_c t + \theta_c) - y(t)\sin(\omega_c t + \theta_c)$$

其中，$s(t)$的 PSD 如图 P6.48 所示。θ_c是在$(0, 2\pi)$上服从均匀分布的独立随机变量。假设$f_3 - f_2 = f_2 - f_1$，试求$x(t)$和$y(t)$的 PSD，若

(a)$f_c = f_1$。这是 USSB 信号，其中$y(t) = \hat{x}(t)$。

(b)$f_c = f_2$。这代表采用不同调制的两个相互独立的 USSB 和 LSSB 信号。

(c)$f_1 < f_c < f_2$。这是残留边带信号。

(d)对以上各种情况，如果有的话，哪一种$x(t)$和$y(t)$是正交的？

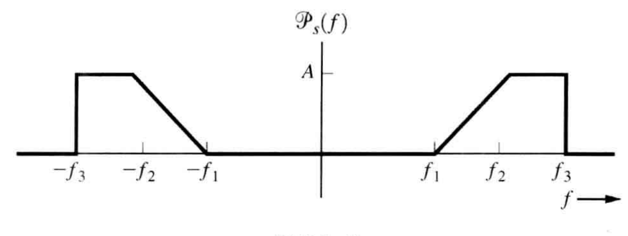


图 P6.48

★ 6.49 参考习题 6.48(b)，独立边带的两个调制信号$m_1(t)$和$m_2(t)$与$x(t)$和$y(t)$是什么关系？给出$m_1(t)$和$m_2(t)$的 PSD，$m_1(t)$是信号的 USSB 部分的调制信号，$m_2(t)$是$s(t)$的 LSSB 部分的调制信号。

6.50 对带通随机过程，证明式(6.133m)成立(性质 13)。

6.51 对带通随机过程，证明式(6.133i)成立(性质 9)。

★6.52 参考例题 6.12，确定采用曼彻斯特编码的 BPSK 信号的 PSD(见图 3.15)，假设数据值为$a_n = \pm 1$且等概，比特间相互独立。

6.53　输入包络检波器的是各态历经高斯噪声随机过程。输入信号的均方根值为 2 V，均值为 0 V。包络检波器的电压增益为 10，确定：

(a)输出电压的直流分量。

(b)输出电压的均方根值。

6.54　用下式表示窄带信号加高斯噪声：

$$r(t) = A\cos(\omega_c t + \theta_c) + x(t)\cos(\omega_c t + \theta_c) - y(t)\sin(\omega_c t + \theta_c)$$

其中，$A\cos(\omega_c t + \theta_c)$是正弦载波，其他项是带通噪声的相互独立的高斯同相和正交分量。令噪声的均方根值为 σ，均值为 0。该信号加噪声作为包括检波器的输入。证明包络检波器的 PDF 为

$$f(R) = \begin{cases} \dfrac{R}{\sigma^2} e^{-[(R^2+A^2)/(2\sigma^2)]} I_0\left(\dfrac{RA}{\sigma^2}\right), & R \geqslant 0 \\ 0, & R < 0 \end{cases}$$

其中，

$$I_0(z) \triangleq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{z\cos\theta}\, d\theta$$

是第一类零阶修正贝塞尔函数。$f(R)$ 是根据 S. O. Rice 命名的莱斯 PDF，他曾是贝尔实验室一名杰出的工程师。

6.55　假设

$$s(t) = \begin{cases} \dfrac{A}{T} t\cos\omega_c t, & 0 \leqslant t \leqslant T \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

是已知信号。该信号加白噪声作为匹配滤波器的输入。

(a)对 $s(t)$ 设计一个匹配滤波器。参照图 6.16 中的波形画出该匹配滤波器和信号所对应的波形。

(b)画出图 6.18 中相关处理器各点处的波形。

★ 6.56　某基带数字通信系统采用比特率为 $R = 2000$ bps 的双极性信号。传输的脉冲为矩形，并且信道滤波器的频率响应为

$$H_c(f) = \frac{B}{B + jf}$$

其中，$B = 6000$ Hz。滤波后的脉冲是采用积分-清除处理的接收机的输入，如图 6.17 所示。分析积分器输出是否有码间串扰，并且

(a)画出发“1”时积分器的输出。

(b)画出全通信道的积分器输出，并将结果与(a)中得到的结果进行比较。

6.57　对于 BPSK 信号的检测参考图 6.19。假设输入的 BPSK 信号为

$$r(t) = s(t) = \sum_{n=0}^{7} d_n p(t - nT)$$

其中，

$$p(t) = \begin{cases} e^{-t}\cos\omega_c t, & 0 < t < T \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

二元数据 d_n 是 8 比特数据串{+1，-1，-1，+1，+1，-1，+1，-1}。借用 MATLAB 工具：

(a)画出输入波形 $r(t)$。

(b)画出积分器输出波形 $r_0(t)$。

★ 6.58 图 P6.58 给出了一个匹配滤波器。

(a)试求匹配滤波器的冲激响应。

(b)试求与滤波器匹配的脉冲波形(白噪声情况)。

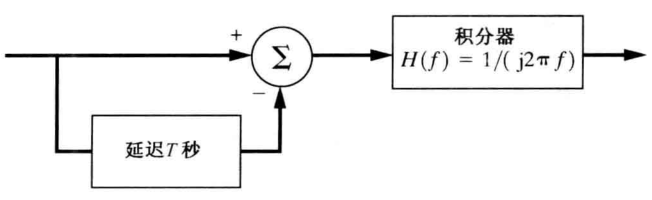


图 P6.58

★ 6.59 FSK 信号 $s(t)$应用到如图 P6.59 所示的相关接收机电路中。该 FSK 信号为

$$s(t) = \begin{cases} A\cos(\omega_1 t), & \text{当发送的是二元的1时} \\ A\cos(\omega_2 t), & \text{当发送的是二元的0时} \end{cases}$$

其中，$f_1 = f_c + \Delta F$，并且$f_2 = f_c - \Delta F$。令 ΔF 满足 MSK 的条件，即 $\Delta F = 1/(4T)$。T 为传送 1 比特所用的时间。积分器每 T 秒复位一次。假设 $A = 1$，$f_c = 1000$ Hz，$\Delta F = 50$ Hz。

(a)若发射的是二元码“1”，画出 T 秒时间间隔上的 $v_1(t)$、$v_2(t)$和 $r_0(t)$。

(b)参考图 6.16，试求发射二元码 1 时与 FSK 信号相匹配的滤波器的输出表达式。画出滤波器的输出曲线。

(c)讨论(a)和(b)得到的曲线是否一致。

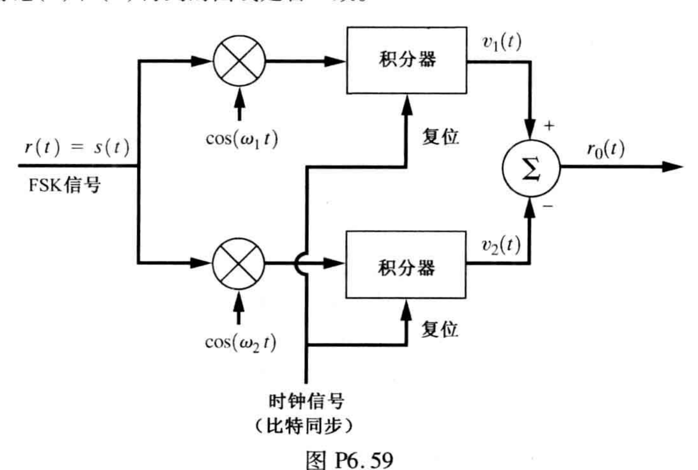


图 P6.59

6.60 令

$$s(t) = \mathrm{Re}\{g(t)e^{j(\omega_c t + \theta_c)}\}$$

是宽带 FM 信号，其中，

$$g(t) = A_c e^{jD_f \int_{-\infty}^{t} m(\lambda)\,d\lambda}$$

其中，$m(t)$是随机调制过程。

(a)证明

$$R_g(\tau) = A_c^2 [\overline{e^{jD_f \tau m(t)}}]$$

其中，积分 $\int_t^{t+\tau} m(\lambda)d\lambda$ 近似为 $\tau m(t)$。

(b)用(a)中的结论，证明带宽 FM 信号的 PSD 由式(5.66)给出，即证明：

$$\mathcal{P}_s(f) = \frac{\pi A_c^2}{2D_f}\left[f_m\left(\frac{2\pi}{D_f}(f - f_c)\right) + f_m\left(\frac{2\pi}{D_f}(-f - f_c)\right)\right]$$

第 7 章　噪声背景下通信系统的性能

本章要点

- 二元通信系统的误比特率（单极性信号、极性信号、双极性信号、OOK 信号、BPSK 信号、FSK 信号和 MSK 信号）
- 模拟通信系统的输出信噪比（AM、SSB、PM 及 FM 系统）

如第 1 章中所述，设计一个通信系统时主要考虑如下两点：

1. 受噪声污染时该通信系统的性能。对于数字通信系统而言，性能的测度就是其输出信号错误的概率；对模拟通信系统而言，性能的测度则是其输出信噪比。

2. 通信信号传输所需的信道带宽。在前面的章节中我们已对各类数字及模拟通信系统所需的带宽进行了分析。

有许多方法可以从受噪声污染的接收信号中解调出有用的信息。某些接收机可以提供最优的接收性能，但大多数却不能。在通常情况下，我们常常采用次优的接收机以降低系统的成本。此外，一些次优接收机在实际应用中的很多方面表现得与最优接收机相差无几。本章将不局限于对最优接收机性能的分析，同时也将对一些次优接收机的性能进行分析。

7.1　二元信号的错误概率

7.1.1　一般性结论

图 7.1 所示为一个二元通信系统的方框图。接收机的输入 $r(t)$ 由发射的信号 $s(t)$ 加上信道噪声 $n(t)$ 组成。对于基带信号，接收机的处理电路由具有一定增益的低通滤波器组成。对于带通信号，如 OOK、BPSK 及 FSK 信号，处理电路在一般情况下由包含混频器、中频放大器、检波器的超外差接收机组成。这些电路产生一个基带的模拟输出信号 $r_0(t)$（例如，当信号为 BPSK 信号时，检测器就是由如 6.8 节所述以及如图 6.19 所示的乘法器和积分器组成）。

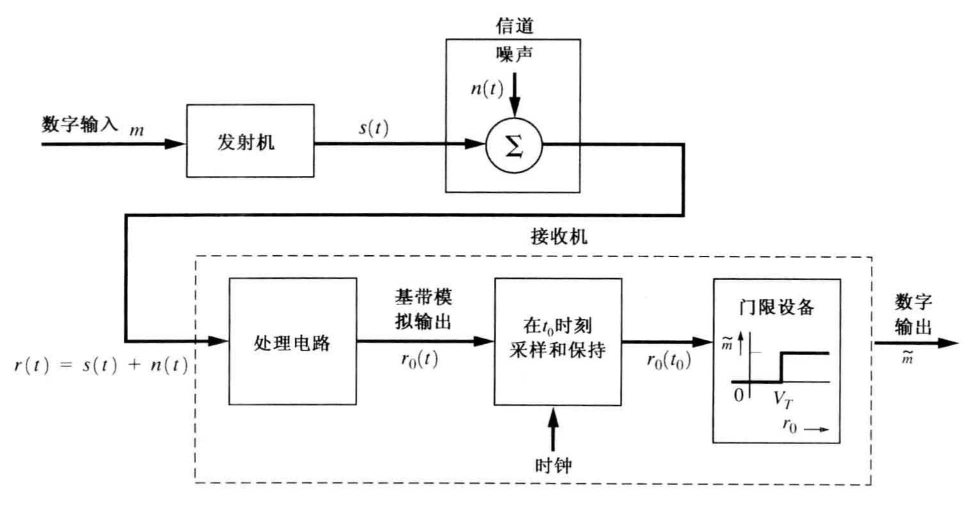


图 7.1　二元通信系统

模拟基带信号 $r_0(t)$ 在 $t = t_0 + nT$ 时刻被采样得到其样本输出 $r_0(t_0 + nT)$，并且将其送入门限设备(如门限比较器)。门限比较器输出二元数字序列信号 $\tilde{m}(t)$。

在本节中，我们将研究计算二元信号发生比特错误的概率，即误比特率(bit-error rate, BER)的一般方法。在随后的章节中，将由该方法得到 OOK、BPSK 及 FSK 等各种不同的二进制系统的误比特率表达式。

为得到检测后二进制信号误码率的通用公式，令 T 为发射-比特数据所需的时间间隔。在 1 比特的时间间隔 $(0, T)$ 内所发射的信号为

$$s(t) = \begin{cases} s_1(t), & 0 < t \leqslant T, \quad \text{当发射数据1时} \\ s_2(t), & 0 < t \leqslant T, \quad \text{当发射数据0时} \end{cases} \tag{7.1}$$

其中，$s_1(t)$ 为发射数据 1 时所对应的信号波形，而 $s_2(t)$ 为发射数据 0 时所对应的信号波形。如果 $s_1(t) = -s_2(t)$，$s(t)$ 被称为反极性信号。接收机输入端的信号加噪声经处理电路后输出一个模拟的基带信号，表示为

$$r_0(t) = \begin{cases} r_{01}(t), & 0 < t \leqslant T, \quad \text{当发射数据1时} \\ r_{02}(t), & 0 < t \leqslant T, \quad \text{当发射数据0时} \end{cases} \tag{7.2}$$

其中，$r_{01}(t)$ 为当发射数据 1 时受噪声污染的输出信号，$r_{02}(t)$ 为当发射数据 0 时受噪声污染的输出信号(注意，如果接收机使用非线性处理电路，如包络检测器，那么信号加噪声的叠加输出就是无效的处理)。模拟电压的波形 $r_0(t)$ 在每比特的 t_0 时刻被抽样，即 $0 < t_0 \leqslant T$。对于匹配滤波处理电路，t_0 通常就是 T。抽样的结果为

$$r_0(t_0) = \begin{cases} r_{01}(t_0), & \text{当发射数据1时} \\ r_{02}(t_0), & \text{当发射数据0时} \end{cases} \tag{7.3}$$

因为信号被信道噪声所污染，所以 $r_0(t_0)$ 是一个具有连续分布的随机变量。为简化起见，我们将用 r_0 代替 $r_0(t_0)$，即

$$r_0 = r_0(t_0) = \begin{cases} r_{01}, & \text{当发射数据1时} \\ r_{02}, & \text{当发射数据0时} \end{cases} \tag{7.4}$$

我们称 r_0 为统计检验量。

现在，假定可以通过计算得到两个随机变量 $r_0 = r_{01}$ 和 $r_0 = r_{02}$ 的概率密度函数。这些概率密度函数实际上是条件概率密度函数，因为它们分别依赖于发送的是数据 1 还是数据 0。当 $r_0 = r_{01}$ 时，概率密度函数为 $f(r_0 \mid s_1 \text{ 发射})$，而当 $r_0 = r_{02}$ 时，概率密度函数为 $f(r_0 \mid s_2 \text{ 发射})$。这些条件概率密度函数如图 7.2 所示。为了图示的方便，假定随机变量的分布具有高斯分布的形状。实际系统中 PDF 的形状依赖于信道噪声的分布、所采用的滤波器和检测器的类型以及发送的二元信号的种类(在后面的各节中，我们将利用第 6 章中的结论研究得到各种概率密度函数)。

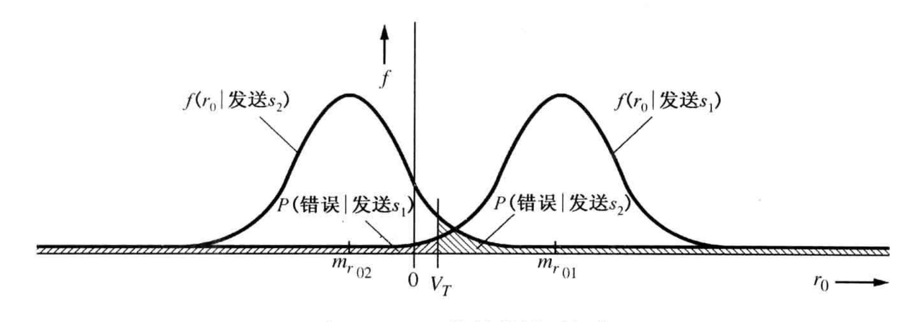


图 7.2 二元信号的错误概率

在误码率通用公式的推导中，假定接收机的处理电路具有这样的极性：如果发射的数据为 1，且接收机的输入端仅有信号（无噪声），$r_0 > V_T$；反之，如果发射的数据为 0，$r_0 < V_T$；V_T 是比较器设置的门限（电压）。

当接收机的输入端为信号加噪声时，将发生以下两种类型的错误。一种错误就是当 $r_0 < V_T$ 时，而发射的数据为 1：

$$P(\text{错误}|s_1\text{发送}) = \int_{-\infty}^{V_T} f(r_0|s_1)\,\mathrm{d}r_0 \tag{7.5}$$

这种情况如图 7.2 中 V_T 左侧的阴影区域所示。类似地，另外一种错误发生于当 $r_0 > V_T$ 时，而发射的数据为 0：

$$P(\text{错误}|s_2\text{发送}) = \int_{V_T}^{\infty} f(r_0|s_2)\,\mathrm{d}r_0 \tag{7.6}$$

此时，误码率为

$$P_e = P(\text{错误}|s_1\text{发送})P(s_1\text{发送}) + P(\text{错误}|s_2\text{发送})P(s_2\text{发送}) \tag{7.7}$$

该结果可由概率论（见附录 B）的知识推导得到，由若干联合事件组成的事件的概率为

$$P(E) = \sum_{i=1}^{2} P(E,\, s_i) = \sum_{i=1}^{2} P(E|s_i)P(s_i)$$

由式(7.5)、式(7.6)及式(7.7)得到二元通信系统误码率的一般表达式：

$$P_e = P(s_1\text{发送})\int_{-\infty}^{V_T} f(r_0|s_1)\,\mathrm{d}r_0 + P(s_2\text{发送})\int_{V_T}^{\infty} f(r_0|s_2)\,\mathrm{d}r_0 \tag{7.8}$$

P(发送 s_1) 和 P(发送 s_2) 称为信源的分布概率或者先验分布概率。在大多数应用场合，我们都假定信源的分布是先验等概的，即

$$P(\text{发送二进制数据}1) = P(\text{发送}s_1) = \frac{1}{2} \tag{7.9a}$$

$$P(\text{发送二进制数据}0) = P(\text{发送}s_2) = \frac{1}{2} \tag{7.9b}$$

在本章后面各节所得到的结论中，都假定信源是服从等概分布的。条件概率密度函数依赖于信号波形的形状、信道噪声及所采用的接收机处理电路。我们将随后分析得到高斯信道噪声和线性电路的处理结果。

7.1.2　对高斯噪声的结果

假定信道噪声为零均值的广义平稳高斯过程，接收机的处理电路除门限判决器以外都是线性电路。于是得到（见第 6 章）：对于高斯过程输入，线性处理器的输出仍为高斯过程。对于基带信号，如第 4 章中所述，超外差电路（由混频器、中频级和乘法检测器组成）是线性电路。然而如果应用了自动增益控制（Automatic Gain Control，AGC）或限幅器，那么接收机将是非线性接收机，本节的结论将无法应用。另外，如果应用的是诸如包络检测器等非线性接收机，那么检测器的输出噪声将不是高斯过程。当线性接收机的输入为二进制信号加噪声时，其输出样本为

$$r_0 = s_0 + n_0 \tag{7.10}$$

这里应用了简化的表示形式 $r_0(t_0) = r_0$。$n_0(t_0) = n_0$ 是零均值高斯随机变量，$s_0(t_0) = s_0$ 是依赖于发射信号的常数，即

$$s_0 = \begin{cases} s_{01}, & \text{当发射数据1时} \\ s_{02}, & \text{当发射数据0时} \end{cases} \tag{7.11}$$

其中，对于已知输入信号波形 $s_1(t)$ 和 $s_2(t)$ 的某种特定的接收机而言，s_{01} 和 s_{02} 是已知的常数。因为输出端噪声样本 n_0 是一个零均值的高斯随机变量，所以整个输出的样本 r_0 是一个取决于发送的是1还是0，均值为 s_{01} 或 s_{02} 的高斯随机变量。以上这些都如图7.2所示，其中当发射的数据为1时 r_0 的均值为 $m_{r_{01}} = s_{01}$，而当发射的数据为0时 r_0 的均值为 $m_{r_{02}} = s_{02}$。于是两个条件概率密度函数为

$$f(r_0|s_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0}\,e^{-(r_0-s_{01})^2/(2\sigma_0^2)} \tag{7.12}$$

和

$$f(r_0|s_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0}\,e^{-(r_0-s_{02})^2/(2\sigma_0^2)} \tag{7.13}$$

当输入噪声为广义平稳过程时，接收机处理电路的输出噪声的平均功率为 $\sigma_0^2 = \overline{n_0^2} = \overline{n_0^2(t_0)} = \overline{n_0^2(t)}$。

当信源为先验等概信源时，将式(7.12)和式(7.13)代入式(7.8)，误码率将变为

$$P_e = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{V_T} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0}\,e^{-(r_0-s_{01})^2/(2\sigma_0^2)}\,dr_0 + \frac{1}{2}\int_{V_T}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0}\,e^{-(r_0-s_{02})^2/(2\sigma_0^2)}\,dr_0 \tag{7.14}$$

这可简化为在B.7节(附录B)中定义并且在表A.10(附录A)中列出的 $Q(z)$ 函数的形式。在第一个积分中令 $\lambda = -(r_0 - s_{01})/\sigma_0$，在第二个积分中令 $\lambda = (r_0 - s_{02})/\sigma_0$，从而得到：

$$P_e = \frac{1}{2}\int_{-(V_T-s_{01})/\sigma_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\lambda^2/2}d\lambda + \frac{1}{2}\int_{(V_T-s_{02})/\sigma_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\lambda^2/2}d\lambda$$

或

$$P_e = \frac{1}{2}Q\left(\frac{-V_T + s_{01}}{\sigma_0}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{V_T - s_{02}}{\sigma_0}\right) \tag{7.15}$$

例题7.1　二元信号的错误概率

使用式(7.15)，求解存在加性高斯噪声时二元信号的差错概率。计算过程和结果见M文件Example7_01.m。

当门限比较器选取适当的 V_T 值作为其门限时，可使误判的概率极小化。为了找到使 P_e 极小化的 V_T，我们需要求解 $dP_e/dV_T = 0$。对式(7.14)中的积分项进行微分，应用附录A.2节中的莱布尼兹准则，我们得到：

$$\frac{dP_e}{dV_T} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0}\,e^{-(V_T-s_{01})^2/(2\sigma_0^2)} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0}\,e^{-(V_T-s_{02})^2/(2\sigma_0^2)} = 0$$

或者

$$e^{-(V_T-s_{01})^2/(2\sigma_0^2)} = e^{-(V_T-s_{02})^2/(2\sigma_0^2)}$$

这意味着

$$(V_T - s_{01})^2 = (V_T - s_{02})^2$$

于是，对于最小的 P_e，比较器的门限需设置为

$$V_T = \frac{s_{01} + s_{02}}{2} \tag{7.16}$$

将式(7.16)代入式(7.15)，我们就得到最小 P_e 的表达式。于是，对于高斯噪声中的二元信号系统并且采用式(7.16)中给出的最优门限值时，其误码率为

$$P_e = Q\left(\frac{s_{01} - s_{02}}{2\sigma_0}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{(s_{01} - s_{02})^2}{4\sigma_0^2}}\right) \tag{7.17}$$

其中，我们做了 $s_{01} > V_T > s_{02}$ 的假设①。到目前为止，我们所做的优化只限于比较器的门限电平，而不包括处理电路中的滤波器。

7.1.3　高斯白噪声和用匹配滤波器接收的结果

如果接收滤波器(图 7.1 中的处理电路)得以优化，那么由式(7.17)所给出的误码率将会降低。如图 B.7 所示，为了使误码率 P_e 最小，我们必须使 Q 函数的自变量最大。因此需要寻找一种线性滤波器，使下式的取值极大化：

$$\frac{[s_{01}(t_0) - s_{02}(t_0)]^2}{\sigma_0^2} = \frac{[s_d(t_0)]^2}{\sigma_0^2}$$

$s_d(t_0) \triangleq s_{01}(t_0) - s_{02}(t_0)$ 是从样本值 s_{01} 中减去 s_{02} 得到的差分信号样本值。在 $t = t_0$ 时刻，差分输出信号的瞬时功率为 $s_d^2(t_0)$。在 6.8 节中已经得到，使输出信号功率在采样时刻 $t = t_0$ 相对于平均噪声功率 $\sigma_0^2 = \overline{n_0^2(t)}$ 极大的线性滤波器为匹配滤波器。当接收机输入端的噪声为白噪声时，匹配滤波器是对差分信号 $s_d(t) = s_1(t) - s_2(t)$ 的匹配滤波器。于是，对二元信号的匹配滤波器的冲激响应为

$$h(t) = C[s_1(t_0 - t) - s_2(t_0 - t)] \tag{7.18}$$

其中，$s_1(t)$ 为发送二进制码元 1 时接收机输入端的信号，$s_2(t)$ 为发送二进制码元 0 时接收机输入端的信号，C 为一实常数。此外，利用式(6.161)，得到匹配滤波器输出的峰值信号与平均噪声功率之比为

$$\frac{[s_d(t_0)]^2}{\sigma_0^2} = \frac{2E_d}{N_0}$$

其中，$N_0/2$ 是接收机输入端噪声的功率谱密度，而 E_d 是接收机输入端差分信号的能量，并且满足

$$E_d = \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 \mathrm{d}t \tag{7.19}$$

于是对于被高斯白噪声污染的二元信号系统，当采用匹配滤波接收时，若应用最优的门限，其误码率为

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2N_0}}\right) \tag{7.20}$$

我们将应用上述结论计算采用匹配滤波器接收时各种二元信号系统的 P_e。

---

① 如果 $s_{01} < V_T < s_{02}$，那么结果为

$$P_e = Q\left(\frac{s_{02} - s_{01}}{2\sigma_0}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{(s_{02} - s_{01})^2}{4\sigma_0^2}}\right)$$

其中，图 7.1 中门限设备的特性调整为当 $r_0 > V_T$ 时判为 0，而当 $r_0 < V_T$ 时判为 1。

7.1.4　高斯色噪声和应用匹配滤波器接收的结果

刚才我们使用的获得白噪声背景下二元信号系统误码率的方法，经修正后可应用于分析色噪声背景下二进制信号系统的误码性能。该修正方法示于图7.3中，其中预白化滤波被插入到接收机处理电路之前。预白化滤波器的传输函数为

$$H_p(f) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{P}_n(f)}} \tag{7.21}$$

于是，滤波器输出端的噪声 $\tilde{n}(t)$ 就变成了白噪声。经过这样的处理之后，我们就将色噪声中的信号检测问题变成了白噪声中的信号检测问题，上一小节中相应的设计方法就可以在此应用。处理电路中的匹配滤波器现在就匹配于滤波后的信号：

$$\tilde{s}(t) = \tilde{s}_1(t) = s_1(t) * h_p(t) \quad (\text{二进制 }1) \tag{7.22a}$$

$$\tilde{s}(t) = \tilde{s}_2(t) = s_2(t) * h_p(t) \quad (\text{二进制 }0) \tag{7.22b}$$

其中，$h_p(t) = \mathcal{F}^{-1}[H_p(f)]$。因为预白化处理产生的信号 $\tilde{s}_1(t)$ 和 $\tilde{s}_2(t)$ 的持续期超出了 T 秒，这将导致两种类型的性能下降：

- 滤波器输出信号中超出时间间隔 T 秒的部分的能量将不被匹配滤波器用于最大化输出信号能量。
- 上一个信号单元的能量在本信号单元的时间间隔中的延续将导致码间串扰(见第3章)。

只有当原始信号的持续时间远小于时间间隔 T 秒时，经滤波器输出得以扩展的信号才有可能不超出时间间隔 T，于是上述两类负面作用就可以减轻或消除。

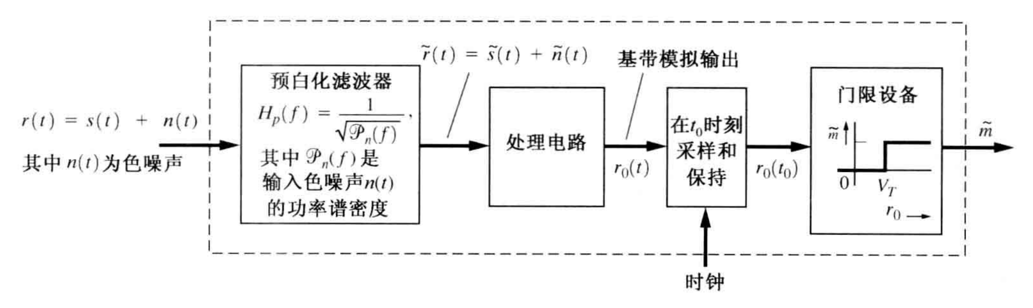


图7.3　用于色噪声信道的匹配滤波接收机

7.2　基带二元系统的性能

7.2.1　单极性信号

如图7.4(b)所示，两个基带信号的波形分别为

$$s_1(t) = +A, \qquad 0 < t \leqslant T \quad (\text{数据 }1) \tag{7.23a}$$

$$s_2(t) = 0, \qquad 0 < t \leqslant T \quad (\text{数据 }0) \tag{7.23b}$$

其中，$A > 0$。接收机的输入为单极性信号加高斯白噪声。

首先，我们计算传输函数 $H(f)$ 为具有单位增益的低通滤波器的接收机的性能。选取LPF的等效带宽为 $B > 2/T$，于是在滤波器的输出端单极性信号的波形得以保护，而噪声则被滤波器

衰减。[1] 于是，$s_{01}(t_0) \approx A$ 和 $s_{02}(t_0) \approx 0$。滤波器输出端的噪声功率为 $\sigma_0^2 = (N_0/2)(2B)$，其中 B 是滤波器的等效带宽，最优门限设置为 $V_T = \frac{1}{2}A$。我们应用式(7.17)，就得到等效带宽为 B 的 LPF 接收机的误码率为

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2}{4N_0B}}\right) \quad \text{（低通滤波器）} \tag{7.24a}$$

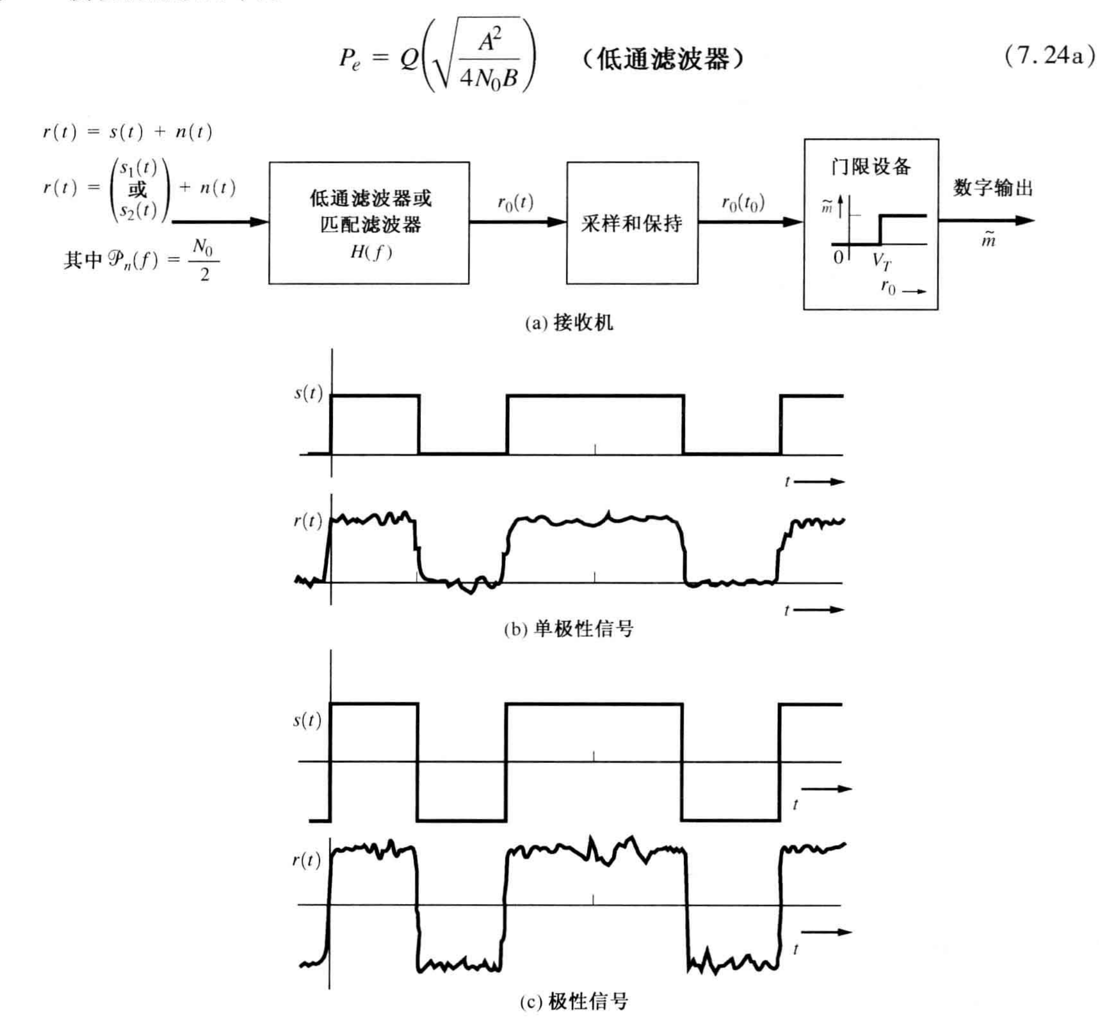


图 7.4　基带二元信号的接收机

应用式(7.20)就可得到在 $t_0 = T$ 采样时刻匹配滤波器的性能。因为此时差分信号的能量为 $E_d = A^2T$，所以其误码率为

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2T}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \quad \text{（匹配滤波器）} \tag{7.24b}$$

因为发送数据 1 时每比特的能量为 A^2T，而发送数据 0 时每比特的能量为 0，所以每比特的平均

---

[1] 从式(3.39b)，我们知道单极性信号(方波脉冲)的 PSD 与 $[\sin(\pi fT)/(\pi fT)]^2$ 成正比，于是第二零点带宽为 $2/T$。参考助学例题 SA7.1 和 SA7.2，我们看到，如果 LPF 的带宽远远大于 $2/T$，那么经滤波后的信号将由峰值近似为 A 的近似方波脉冲信号组成。

能量为 $E_b = A^2T/2$。当信号波形为方波脉冲时，匹配滤波器就是积分器。于是最优门限值为

$$V_T = \frac{s_{01} + s_{02}}{2} = \frac{1}{2}\left(\int_0^T A\mathrm{d}t + 0\right) = \frac{AT}{2}$$

在通常情况下，我们将误码率表示成 E_b/N_0 的函数的形式，因为它表明了在高斯白噪声信号中发送 1 比特数据所需的平均能量。同时将误码率表示成 E_b/N_0 的函数的形式，可以很方便地比较各种不同信号技术的误码性能。

式(7.24b)的结果示于图 7.5 中。

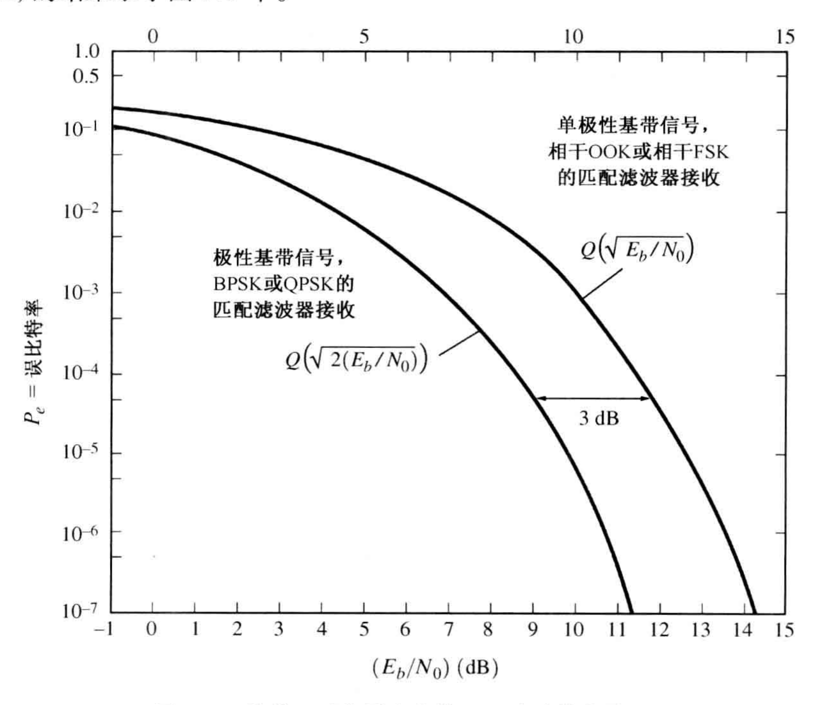


图 7.5 几种二元信号方案的匹配滤波接收的 P_e

7.2.2 极性信号

如图 7.4(c)所示，基带极性信号的波形函数为

$$s_1(t) = +A, \qquad 0 < t \leqslant T \quad (\text{数据}1) \tag{7.25a}$$

$$s_2(t) = -A, \qquad 0 < t \leqslant T \quad (\text{数据}0) \tag{7.25b}$$

因为 $s_1(t) = -s_2(t)$，所以极性信号是相反极性的信号。

应用式(7.17)我们可以得到低通滤波器(LPF)接收机的性能。假定低通滤波器 LPF 的等效带宽为 $B \geqslant 2/T$，那么在采样时刻 $t = t_0$ 输出信号的样本为 $s_{01}(t_0) \approx A$ 和 $s_{02}(t_0) \approx -A$。另外，$\sigma_0^2 = N_0B$，最优的门限设置为 $V_T = 0$。于是，极性信号的误码率为

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2}{N_0B}}\right) \quad (\text{低通滤波器}) \tag{7.26a}$$

其中，B 是低通滤波器的等效带宽。

再次应用式(7.20)，得到当 $t_0 = T$ 时，匹配滤波接收机的性能(极性信号的具有积分-清零

功能的匹配滤波器如图6-17所示）。因为此时差分信号的能量为 $E_d = (2A)^2T$，所以其误码率为

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2A^2T}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{2\left(\frac{E_b}{N_0}\right)}\right) \quad \text{（匹配滤波器）} \tag{7.26b}$$

其中，每比特的平均能量为 $E_b = A^2T$，最优门限值为 $V_T = 0$。

基带单极性和基带极性信号的误码率示于图7.5中。由图显而易见，为获得相同的误码率 P_e，单极性信号的信噪比 E_b/N_0 要比极性信号高3 dB(即极性信号较单极性信号具有3 dB的优势)。

7.2.3 双极性信号

对于双极性NRZ信号，用交替变化的正负值表示数据1，而用零电平表示数据0。于是，

$$s_1(t) = \pm A, \quad 0 < t \leqslant T \quad \text{（数据1）} \tag{7.27a}$$

$$s_2(t) = 0, \quad 0 < t \leqslant T \quad \text{（数据0）} \tag{7.27b}$$

其中，$A > 0$。除了如图7.6所示需要两个门限值 $+V_T$ 和 $-V_T$ 之外，它与极性信号很相似。图7.6(b)所示为加性高斯噪声背景下的误判概率。误码率为

$$P_e = P(\text{错误}|\text{发送}\,A+)P(\text{发送}\,A+) + P(\text{错误}|\text{发送}-A)P(\text{发送}-A) + P(\text{错误}|\text{发送}\,s_2)P(\text{发送}\,s_2)$$

应用图7.6(b)，得到：

$$P_e \approx \left[2Q\left(\frac{A-V_T}{\sigma_0}\right)\right]\frac{1}{4} + \left[2Q\left(\frac{V_T}{\sigma_0}\right)\right]\frac{1}{2}$$

或者

$$P_e \approx Q\left(\frac{V_T}{\sigma_0}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{A-V_T}{\sigma_0}\right)$$

通过计算，我们找到使误码率极小化的门限值 $V_T = \frac{A}{2} + \frac{\sigma_0^2}{A}\ln 2$。对于一个误码率较低的系统(即可用的)，$A > \sigma_0$，其最优门限近似为 $V_T = A/2$，误码率为

$$P_e = \frac{3}{2}Q\left(\frac{A}{2\sigma_0}\right)$$

对于采用低通滤波器的接收机，若其输入为双极性信号加上白噪声，$\sigma_0^2 = N_0B$。于是，误码率为

$$P_e = \frac{3}{2}Q\left(\sqrt{\frac{A^2}{4N_0B}}\right) \quad \text{（低通滤波器）} \tag{7.28a}$$

其中，输入噪声的功率谱密度为 $N_0/2$，滤波器的等效带宽为 B Hz。如果采用匹配滤波接收，应用式(6.161)得到其输出信噪比：

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = \frac{A^2}{\sigma_0^2} = \frac{2E_d}{N_0}$$

对于NRZ双极性信号，其差分信号的能量为 $E_d = A^2T = 2E_b$，其中 E_b 是每比特的平均能量。于是对于匹配滤波接收机，其误码率为

$$P_e = \frac{3}{2}Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \quad \text{（匹配滤波器）} \tag{7.28b}$$

对于双极性 RZ 信号，因为 $E_d = A^2T/4 = 2E_b$，故其误码率公式与式(7.28b)相同。以上这些结论表明双极性信号的误码率是式(7.24b)中描述的单极性信号误码率的 3/2 倍。

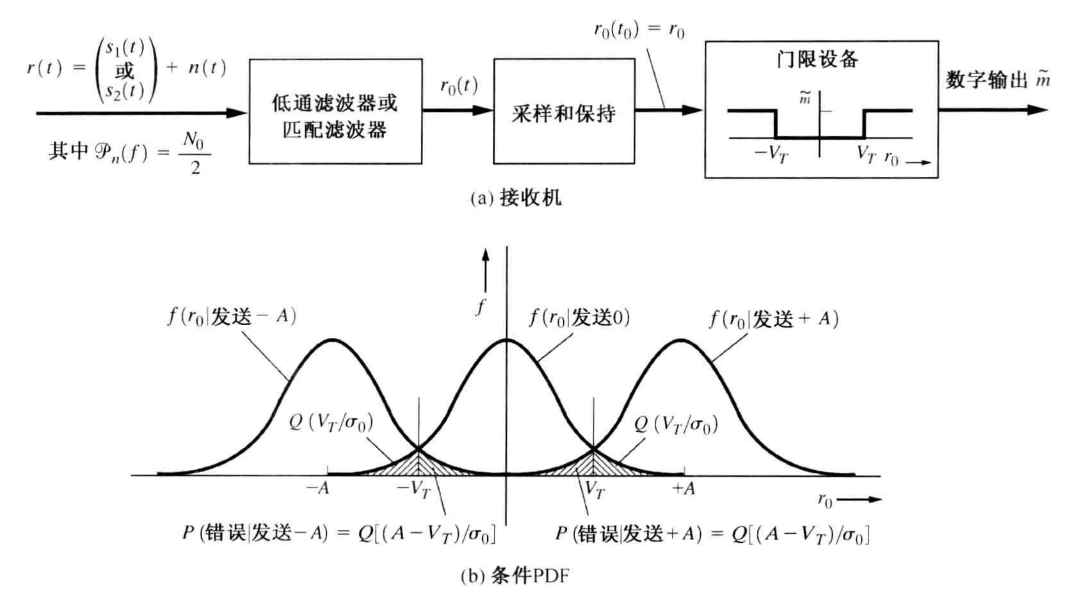


图 7.6 极性信号的接收机

例题 7.2 使用匹配滤波器时极性、单极性、双极性 NRZ 信号的误码率

分析并画出存在加性高斯白噪声(Additive White Gaussian Noise, AWGN)时极性、单极性、双极性 NRZ 信号的误码率曲线。计算过程和结果见 M 文件 Example7_02.m。将得到的结果同图 7.5进行比较。

例题 7.3 使用低通滤波器时极性、单极性、双极性 NRZ 信号的误码率

假定接收机中均使用了 $B = 2/T$ 的低通滤波器，重做例题 7.2。计算过程和结果见 M 文件 Example7_03.m。

7.3 带通二元信号的相干检测

7.3.1 开关键控

如图 5-1(c)所示，一个 OOK 信号可表示为

$$s_1(t) = A\cos(\omega_c t + \theta_c), \qquad 0 < t \leqslant T \text{ (数据1)} \tag{7.29a}$$

或者

$$s_2(t) = 0, \qquad 0 < t \leqslant T \text{ (数据0)} \tag{7.29b}$$

对于相干检测，乘法检测器如图 7.7 所示。在实际系统中，对于射频信号，混频器把接收到的 OOK 信号转换到中频，这样很容易得到稳定的高增益功率放大，最后乘法检测器再把信号变换到基带。图 7.7 所示为将接收到的信号和噪声变到基带的处理过程。

假定接收机的输入端为 OOK 信号加离散白噪声(在相应的频带上)。如第 6 章中所述，带通噪声可表示为

$$n(t) = x(t)\cos(\omega_c t + \theta_n) - y(t)\sin(\omega_c t + \theta_n)$$

其中，噪声 $n(t)$ 的 PSD 为 $\mathcal{P}_n(f) = N_0/2$，并且 θ_n 是独立于 θ_c 且服从均匀分布的随机变量。

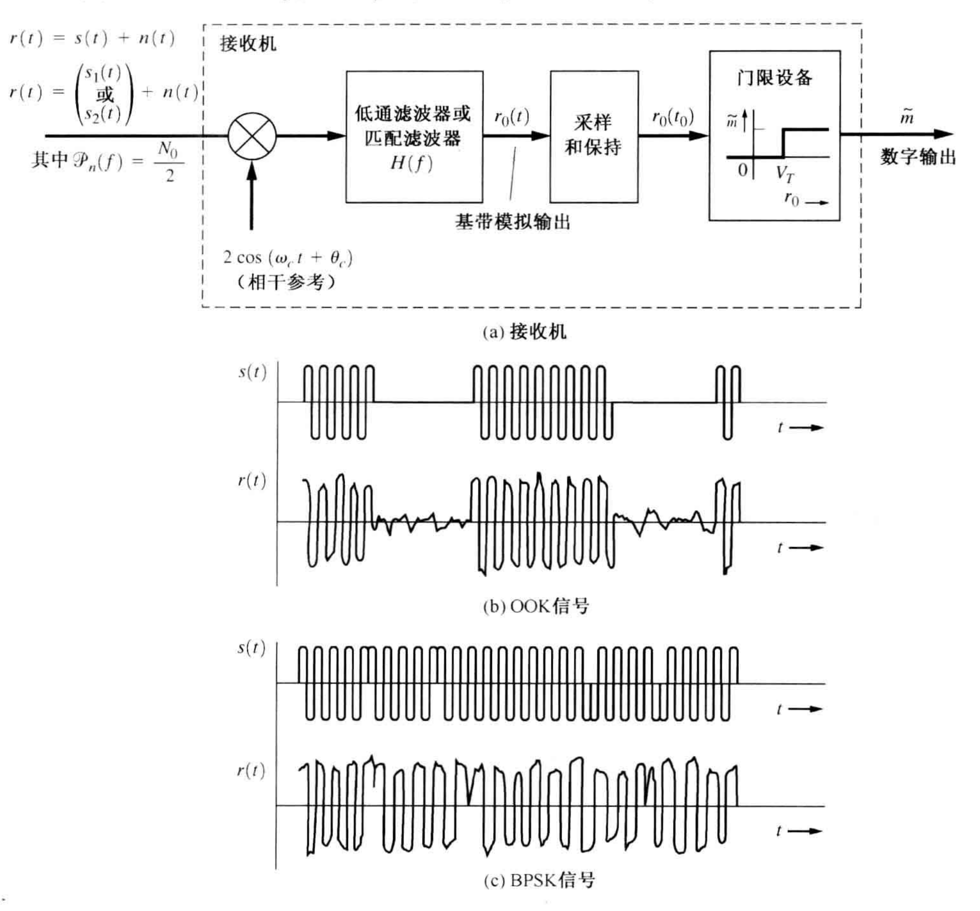


图 7.7　OOK 或者 BPSK 信号的相干检测

图 7.7 所示的接收机可以是传递函数为 $H(f)$ 的低通滤波器(LPF)或匹配滤波器。当然，接收机为匹配滤波器时其性能最优(得到最低的误码率)。

首先，我们计算采用具有单位直流增益低通滤波(LPF)的接收机的性能。假定滤波器的等效带宽为 $B \geqslant 2T$，于是 OOK 信号的包络信息在滤波器的输出端得以保存下来。其基带的模拟输出为

$$r_0(t) = \begin{cases} A, & 0 < t \leqslant T, \quad \text{当发射数据1时} \\ 0, & 0 < t \leqslant T, \quad \text{当发射数据0时} \end{cases} + x(t) \tag{7.30}$$

其中，$x(t)$ 是基带噪声。应用式(6.133g)，我们计算得到噪声功率为 $\overline{x^2(t)} = \sigma_0^2 = \overline{n^2(t)} = 2(N_0/2)(2B) = 2N_0 B$。因为 $s_{01} = A$ 和 $s_{02} = 0$，所以最优门限设置为 $V_T = A/2$。应用式(7.17)，我们得到其误码率为

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2}{8N_0 B}}\right) \quad \text{(窄带滤波器)} \tag{7.31}$$

其中，B 是低通滤波器的等效带宽。这种接收机的等效带宽为 $B_p = 2B$。

应用式(7.20)可以得到匹配滤波接收机的性能。接收机输入端差分信号的能量为①

$$E_d = \int_0^T [A\cos(\omega_c t + \theta_c) - 0]^2 dt = \frac{A^2T}{2} \tag{7.32}$$

于是误码率为

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2T}{4N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \quad \text{(匹配滤波器)} \tag{7.33}$$

其中，每比特信号的平均能量为 $E_b = A^2T/4$。当 $s_1(t)$ 的包络为方波时，匹配滤波器就是积分器，于是最优门限值为

$$V_T = \frac{s_{01} + s_{02}}{2} = \frac{1}{2}s_{01} = \frac{1}{2}\left[\int_0^T 2A\cos^2(\omega_c t + \theta_c)dt\right]$$

当 $f_c \gg R$ 时可近似简化为 $V_T = AT/2$。注意，OOK 系统的性能与图 7.5 所示的基带单极性信号的性能一致。

7.3.2 二元相移键控

如图 7.7 所示，BPSK 信号为

$$s_1(t) = A\cos(\omega_c t + \theta_c), \qquad 0 < t \leqslant T \quad \text{(数据 1)} \tag{7.34a}$$

和

$$s_2(t) = -A\cos(\omega_c t + \theta_c), \qquad 0 < t \leqslant T \quad \text{(数据 0)} \tag{7.34b}$$

BPSK 信号也称为相位反转键控(Phase-Reversal Keying, PRK)。因为 $s_1(t) = -s_2(t)$，所以 BPSK 也是反极性信号。

这里我们再次从分析采用单位增益及等效带宽为 $B \geqslant 2T$ 的低通滤波接收机的性能入手。基带的模拟输出为

$$r_0(t) = \begin{Bmatrix} A, & 0 < t \leqslant T, & \text{当发射数据1时} \\ -A, & 0 < t \leqslant T, & \text{当发射数据0时} \end{Bmatrix} + x(t) \tag{7.35}$$

其中，$\overline{x^2(t)} = \sigma_0^2 = \overline{n^2(t)} = 2N_0B$。因为 $s_{01} = A$ 和 $s_{02} = -A$，故最优门限 $V_T = 0$。应用式(7.17)，可得到其误码率为

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2}{2N_0B}}\right) \quad \text{(窄带滤波器)} \tag{7.36}$$

对于相同的噪声功率 N_0，基于包络峰值功率(Peak Envelope Power, PEP)，将 BPSK 信号与 OOK 信号进行比较，达到同一误码率 P_e 时 BPSK 信号的峰值功率要比 OOK 信号小 6 dB。然而如果考虑的是平均功率的话，那么 BPSK 信号比 OOK 信号要低 3 dB。这是因为 OOK 信号的峰值功率比其平均功率要高 3 dB，而 BPSK 信号的包络峰值功率与平均功率相同。

应用式(7.20)就得到匹配滤波接收机的性能。BPSK 信号的匹配滤波接收机如图 6.19 所示，由一个相关器和一个积分-清除器组成。接收机输入端的差分信号的能量为

① 严格地说，f_c 必须是比特速率 $R = 1/T$ 的一半的整数倍，以保证对于 E_d 为 $A^2T/2$。然而，因为 $f_c \gg R$，不论是否满足 $E_d = A^2T/2$，所有的实际系统均有 $f_c = nR/2$。

$$E_d = \int_0^T [2A\cos(\omega_c t + \theta_c)]^2 dt = 2A^2T \tag{7.37}$$

于是，其误比特率为

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2T}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{2\left(\frac{E_b}{N_0}\right)}\right) \text{（匹配滤波器）} \tag{7.38}$$

其中，信号每比特的平均能量为 $E_b = A^2T/2$，且 $V_T = 0$。BPSK 信号的性能与基带极性信号的性能完全一致。但是与 OOK 信号相比要好 3 dB(如图 7.5 所示)。

例题 7.4　BPSK 信号的误码率

分析并画出存在 AWGN 时 BPSK 信号的误码率。分别使用匹配滤波器接收机和 $B = 2/T$ 的低通滤波器接收机求解。计算过程和结果见 M 文件 Example7_04. m。

7.3.3　频移键控

FSK 信号可以采用两个乘法检测器进行相干检测。这由图 7.8 给出，因为线性变换的阶数的变化不影响结果，所以图中乘法器输出端的 LPF 组被一个低通滤波器所取代。发送的信号分别为

$$s_1(t) = A\cos(\omega_1 t + \theta_c),\quad 0 < t \leqslant T \text{（数据 1）} \tag{7.39a}$$

$$s_2(t) = A\cos(\omega_2 t + \theta_c),\quad 0 < t \leqslant T \text{（数据 0）} \tag{7.39b}$$

其中，频移量为 $2\Delta F = f_1 - f_2$，假定 $f_1 > f_2$ 时。接收机输入端的信号为 FSK 信号加上高斯噪声。$s_1(t)$ 和 $s_2(t)$ 的功率谱密度函数如图 7.8(b)所示。

首先，我们分析具有单位直流增益的低通滤波器 $H(f)$ 的接收机的性能。假定滤波器的等效带宽为 $2/T \leqslant B < \Delta F$。低通滤波器与产生频率变换的乘法检测器相结合，就等效于一个中心频率分别在 $f = f_1$ 和 $f = f_2$ 的双边带通滤波器，每个边带的等效带宽为 $B_p = 2B$。于是影响输出的输入噪声由两个窄带分量 $n_1(t)$ 和 $n_2(t)$ 组成，其中 $n_1(t)$ 的频谱的中心频率位于 f_1，$n_2(t)$ 的频谱的中心频率位于 f_2，如图 7.8 所示。进一步，$n(t) = n_1(t) + n_2(t)$，应用式(6.130)，得到：

$$n_1(t) = x_1(t)\cos(\omega_1 t + \theta_c) - y_1(t)\sin(\omega_1 t + \theta_c) \tag{7.40a}$$

和

$$n_2(t) = x_2(t)\cos(\omega_2 t + \theta_c) - y_2(t)\sin(\omega_2 t + \theta_c) \tag{7.40b}$$

频移量为 $2\Delta F > 2B$，于是通过滤波就可以区分信号 0 和 1。图 7.8(a)所示的通过上边带信道的信号加噪声为

$$r_1(t) = \begin{Bmatrix} s_1(t), & \text{当发射数据1时} \\ 0, & \text{当发射数据0时} \end{Bmatrix} + n_1(t) \tag{7.41}$$

通过下边带信道的信号加噪声为

$$r_2(t) = \begin{Bmatrix} 0, & \text{当发射数据1时} \\ s_2(t), & \text{当发射数据0时} \end{Bmatrix} + n_2(t) \tag{7.42}$$

其中，$r(t) = r_1(t) + r_2(t)$。噪声 $n_1(t)$ 和 $n_2(t)$ 的功率为 $\overline{n_1^2(t)} = \overline{n_2^2(t)} = (N_0/2)(4B) = 2N_0B$。于是基带的模拟输出为

$$r_0(t) = \begin{Bmatrix} +A, & 0 < t \leqslant T, & \text{当发射数据1时} \\ -A, & 0 < t \leqslant T, & \text{当发射数据0时} \end{Bmatrix} + n_0(t) \tag{7.43}$$

其中，$s_{01} = +A$，$s_{02} = -A$ 和 $n_0(t) = x_1(t) - x_2(t)$。最优门限设置为 $V_T = 0$。此外，基带噪声 $n_1(t)$

和 $n_2(t)$ 相互独立，因为它们存在于相互不重叠的频带中(见图 7.8)，并且它们是白噪声(习题 7.29 中要求证明该命题)。于是基带噪声 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 是相互独立的，其输出噪声功率为

$$\overline{n_0^2(t)} = \sigma_0^2 = \overline{x_1^2(t)} + \overline{x_2^2(t)} = \overline{n_1^2(t)} + \overline{n_2^2(t)} = 4N_0B \tag{7.44}$$

将 s_{01}, s_{02} 及 σ_0 代入式(7.17)，得到：

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2}{4N_0B}}\right) \quad \text{(带通滤波器)} \tag{7.45}$$

基于 PEP 比较 FSK、BPSK 及 OOK 信号的性能，我们得到对于同一误码率 P_e，FSK 信号需要比 BPSK 信号高 3 dB 的功率，但是与 OOK 相同(因为 OOK 的平均功率比其峰值功率小 3 dB)。

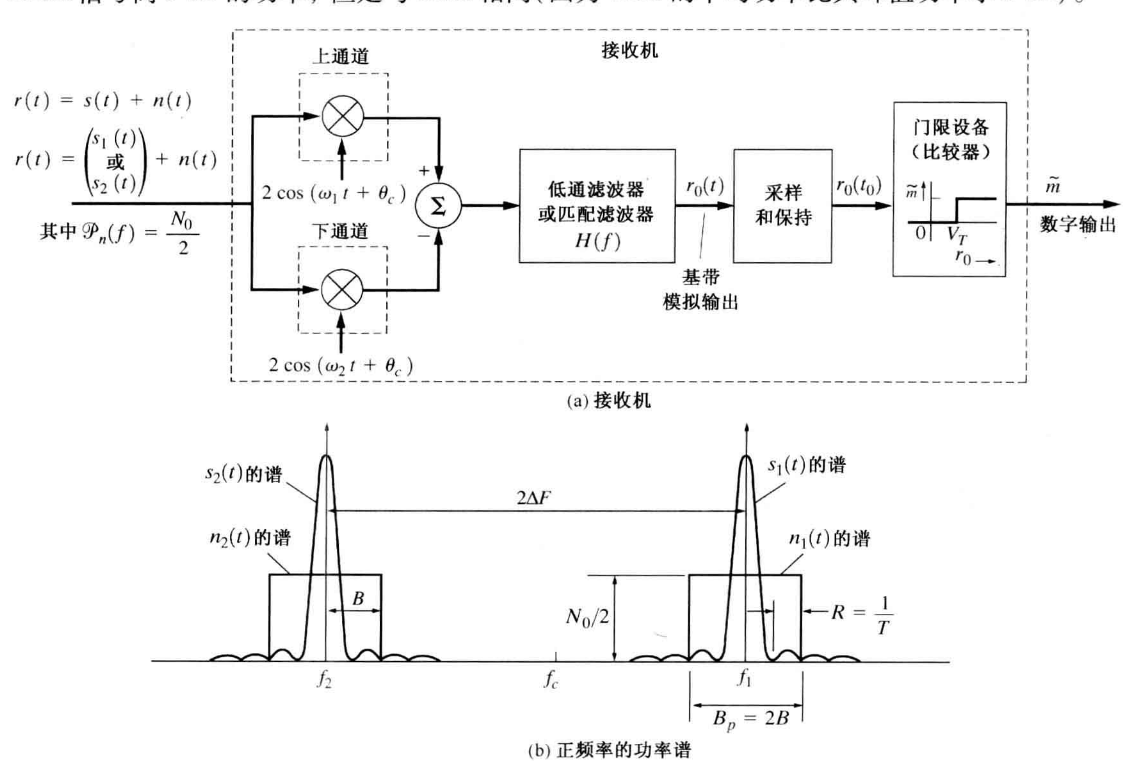


图 7.8 FSK 信号的相干检测

应用式(7.20)，就可以得到基于匹配滤波接收机的 FSK 信号的性能。差分信号的能量为

$$\begin{aligned} E_d &= \int_0^T [A\cos(\omega_1 t + \theta_c) - A\cos(\omega_2 t + \theta_c)]^2 \, dt \\ &= \int_0^T [A^2\cos^2(\omega_1 t + \theta_c) - 2A^2\cos(\omega_1 t + \theta_c) \\ &\quad \times \cos(\omega_2 t + \theta_c) + A^2\cos^2(\omega_2 t + \theta_c)] \, dt \end{aligned}$$

或者①

① 对于 $\int_0^T A^2\cos^2(\omega_1 t + \theta_c)\,dt = \frac{1}{2}A^2\left[\int_0^T dt + \int_0^T \cos(2\omega_1 t + 2\theta_c)\,dt\right]$ 形式的积分，因为等号右边第二个积分项是振荡的，所以等号右边第二项相对于第一项可以忽略(黎曼-勒贝格引理[Olmsted,1961])。

$$E_d = \frac{1}{2}A^2T - A^2\int_0^T [\cos(\omega_1 - \omega_2)t]\,dt + \frac{1}{2}A^2T \tag{7.46}$$

考虑到当$2\Delta F = f_1 - f_2 = n/(2T) = nR/2$时的情形。在这个条件下积分(即交叉乘积项)值为0。这个条件就是要求$s_1(t)$与$s_2(t)$正交。于是$s_1(t)$对于下边信道的输出无影响(见图7.8),同样,$s_2(t)$对于上边信道的输出也无影响。此外,如果$(f_1 - f_2) \gg R$,那么$s_1(t)$与$s_2(t)$将近似正交,因为此时积分值与A^2T相比已变得可以忽略不计。假定上述其一或两个条件全部满足,那么$E_d = A^2T$,于是FSK信号的误码率为

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2T}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \quad \text{(匹配滤波器)} \tag{7.47}$$

其中,每比特的平均能量为$E_b = A^2T/2$。FSK信号的性能与OOK信号一致(匹配滤波接收),比BPSK信号差3 dB(见图7.5)。

正如我们在下节中将阐述的那样,相干检测比非相干检测的性能要好。然而相干检测时必须可以获取相干参量。这些相干参量一般从包含噪声的输入信号中获取,因此它们也受噪声的影响。这些因素都将使误码率P_e比用前面的公式中得到的结果要高。提取载波参量的电路往往比较复杂且价格昂贵,所以我们也愿意忍受稍差一点的性能而采用非相干电路以降低成本。

例题7.5　使用相干检测时FSK信号的误码率

分析并画出AWGN信道中使用相干检测时FSK信号的误码率曲线。分别使用匹配滤波器接收机和$B = 2/T$的低通滤波器接收机求解。计算过程和结果见M文件Example7_05.m。

7.4　带通二元信号的非相干检测

非相干接收机误码率公式的推导比相干接收机误码率公式的获取要困难得多。但是,与相干接收机相比,非相干接收机的电路要相对简单。例如,使用非相干接收的OOK方式是光纤通信系统中使用最为广泛的信号(调制和解调)技术。

在本节中,我们将讨论两类非相干接收机的误码率——OOK信号的非相干接收及FSK信号的非相干接收。正如第5章所指出的那样,BPSK信号不能进行非相干检测。然而我们将看到DPSK可以采用部分(准)相干技术进行解调。

7.4.1　开关键控

OOK信号的非相干接收机的方框图如图7.9所示。假定在接收机输入端的信号为OOK信号加上高斯白噪声,于是通过滤波器后的输出噪声为带限的高斯噪声,整个滤波器的输出为信号加噪声:

$$r(t) = \begin{cases} r_1(t), & 0 < t \leqslant T, \quad \text{当发射数据1时} \\ r_2(t), & 0 < t \leqslant T, \quad \text{当发射数据0时} \end{cases} \tag{7.48}$$

令滤波器的带宽为B_p。B_p至少要与OOK信号的传输带宽一样大,这样信号的波形在滤波器的输出端才能保持不失真。当发送数据1时,$s_1(t) = A\cos(\omega_c t + \theta_c)$,于是,

$$r_1(t) = A\cos(\omega_c t + \theta_c) + n(t), \quad 0 < t \leqslant T$$

或

$$r_1(t) = [A + x(t)]\cos(\omega_c t + \theta_c) - y(t)\sin(\omega_c t + \theta_c), \quad 0 < t \leqslant T \tag{7.49}$$

当发送数据0时，$s_2(t)=0$，于是，

$$r_2(t)=x(t)\cos(\omega_c t+\theta_c)-y(t)\sin(\omega_c t+\theta_c),\quad 0<t\leqslant T \tag{7.50}$$

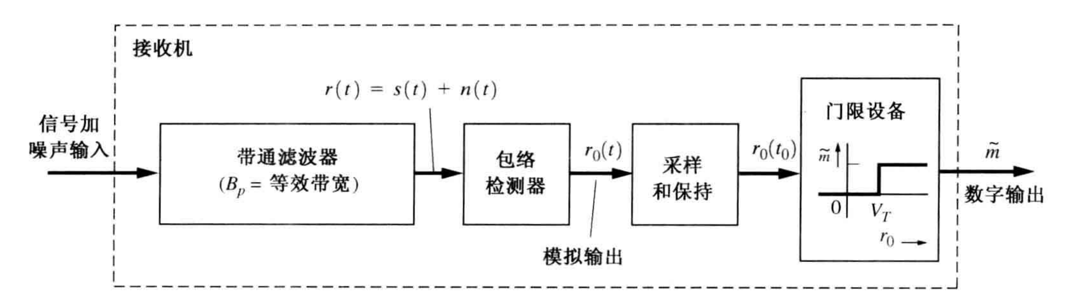


图7.9 OOK信号的非相干检测

应用式(7.8)，就可以得到服从等概分布的信号的误码率：

$$P_e=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{V_T}f(r_0|s_1)\,\mathrm{d}r_0+\frac{1}{2}\int_{V_T}^{\infty}f(r_0|s_2)\,\mathrm{d}r_0 \tag{7.51}$$

我们需要分析包络检波器的输出的概率密度函数$f(r_0\mid s_1)$和$f(r_0\mid s_2)$。其中，当包络检波器的输入为$r_1(t)$时，$f(r_0\mid s_1)$为其概率密度函数；当包络检波器的输入端为$r_2(t)$时，$f(r_0\mid s_2)$为其概率密度函数。

我们首先计算$f(r_0\mid s_2)$。若发送的是$s_2(t)$，包络检波器的输入$r_2(t)$由式(7.50)中的带限高斯噪声组成。在例题6.13中，通过分析得到，其包络的PDF服从瑞利分布。显然包络检波器的输出为其包络，故$r_0=R=r_{02}$。于是噪声的概率密度函数为

$$f(r_0|s_2)=\begin{cases}\dfrac{r_0}{\sigma^2}\,\mathrm{e}^{-r_0^2/(2\sigma^2)}, & r_0\geqslant 0\\ 0, & \text{否则}\end{cases} \tag{7.52}$$

参数σ^2为包络检波器输入噪声的方差。于是，$\sigma^2=(N_0/2)(2B_p)=N_0B_p$，其中，$B_p$是带通滤波器的等效带宽，而$N_0/2$是接收机输入端噪声的功率谱密度。

假定发送的是$s_1(t)$，包络检波器的输入信号由式(7.49)所描述。因为$n(t)$是高斯过程(其频谱在$f=\pm f_c$处无冲激函数)，所以对应于式(7.50)，其同相基带分量，$A+x(t)$是一个均值为A而不是为0的高斯过程。应用与例6.13中同样的方法就可以得到其包络$r_0=R=r_{01}$的概率密度函数，其结论在习题6.54中被引用。于是对于包络检波器的输入为正弦信号加噪声的情形来说，

$$f(r_0|s_1)=\begin{cases}\dfrac{r_0}{\sigma^2}\,\mathrm{e}^{-(r_0^2+A^2)/(2\sigma^2)}I_0\left(\dfrac{r_0A}{\sigma^2}\right), & r_0\geqslant 0\\ 0, & \text{否则}\end{cases} \tag{7.53}$$

这是服从莱斯分布的概率密度函数，其中，

$$I_0(z)\triangleq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{z\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta \tag{7.54}$$

是第一类零阶修正贝塞尔函数。

两个条件概率密度函数$f(r_0\mid s_2)$和$f(r_0\mid s_1)$如图7.10所示。事实上，$f(r_0\mid s_2)$是$f(r_0\mid s_1)$当$A=0$时的特例，因为在这种条件下，检测器的输入只有噪声，于是式(7.53)就变成了

式(7.52)。在图中我们画出了式(7.53)中当 $A=1$ 及 $A=4$ 时的情形。从图中可以看到，当 $A\sigma \gg 1$ 时，分布函数的最大值出现在 $r_0=A$ 处。另外，对于 $A\sigma \gg 1$，$f(r_0 \mid s_1)$ 具有高斯函数的形状(如后面所述)。

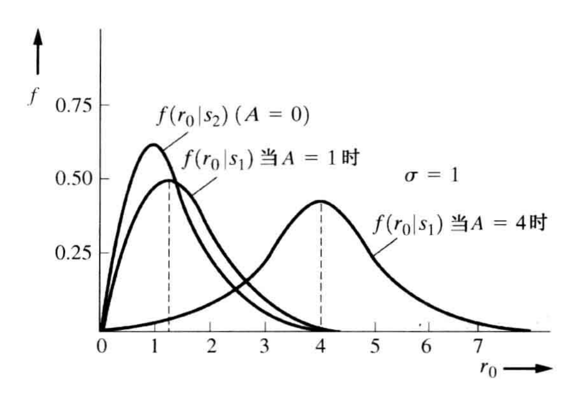


图 7.10 用于非相干 OOK 信号接收的条件概率密度函数

将式(7.52)和式(7.53)代入式(7.51)，就得到 OOK 信号非相干接收机的误码率：

$$P_e=\frac{1}{2}\int_0^{V_T}\frac{r_0}{\sigma^2}\,\mathrm{e}^{-(r_0^2+A^2)/(2\sigma^2)}\,I_0\left(\frac{r_0A}{\sigma^2}\right)\mathrm{d}r_0+\frac{1}{2}\int_{V_T}^{\infty}\frac{r_0}{\sigma^2}\,\mathrm{e}^{-r_0^2/(2\sigma^2)}\,\mathrm{d}r_0 \tag{7.55}$$

最优门限就是使误码率 P_e 极小化的 V_T 值，对于 $A/\sigma \gg 1$ 的情形，最优门限值非常接近 $V_T=A/2$，所以可以应用这个值简化数学分析。[①] 包含贝塞尔函数的积分不能直接计算，然而当 $z\gg 1$ 时，$I_0(z)$ 可以用 $I_0(z)=\mathrm{e}^z/\sqrt{2\pi z}$ 来近似。于是对于 $A/\sigma \gg 1$，式(7.55)中左边的积分变为

$$\frac{1}{2}\int_0^{V_T}\frac{r_0}{\sigma^2}\,\mathrm{e}^{-(r_0^2+A^2)/(2\sigma^2)}\,I_0\left(\frac{r_0A}{\sigma^2}\right)\mathrm{d}r_0\approx\frac{1}{2}\int_0^{A/2}\sqrt{\frac{r_0}{2\pi\sigma^2A}}\,\mathrm{e}^{(r_0-A)^2/(2\sigma^2)}\,\mathrm{d}r_0$$

因为 $A/\sigma \gg 1$，所以除了在 A 附近的 r_0 以外，其余的积分值都可被忽略，因而积分的下限可以扩展至 $-\infty$，并且 $\sqrt{r_0/(2\pi\sigma^2A)}$ 可以用 $\sqrt{1/(2\pi\sigma^2)}$ 代替。于是，

$$\frac{1}{2}\int_0^{V_T}\frac{r_0}{\sigma^2}\,\mathrm{e}^{-(r_0^2+A^2)/(2\sigma^2)}\,I_0\left(\frac{r_0A}{\sigma^2}\right)\mathrm{d}r_0\approx\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{V_T}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,\mathrm{e}^{-(r_0-A)^2/(2\sigma^2)}\,\mathrm{d}r_0 \tag{7.56}$$

将式(7.56)代入式(7.55)，就可以得到误码率(BER)为

$$P_e=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{A/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,\mathrm{e}^{-(r_0-A)^2/(2\sigma^2)}\,\mathrm{d}r_0+\frac{1}{2}\int_{A/2}^{\infty}\frac{r_0}{\sigma^2}\,\mathrm{e}^{-r_0^2/(2\sigma^2)}\,\mathrm{d}r_0$$

或者

$$P_e=\tfrac{1}{2}Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)+\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-A^2/(8\sigma^2)} \tag{7.57}$$

对 $z\gg 1$，应用 $Q(z)=\mathrm{e}^{-z^2/2}/\sqrt{2\pi z^2}$，我们得到：

$$P_e=\frac{1}{\sqrt{2\pi}(A/\sigma)}\,\mathrm{e}^{-A^2/(\delta\sigma^2)}+\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-A^2/(\delta\sigma^2)}$$

① 大多数实际系统工作于 $A/\sigma \gg 1$ 的状态。

因为$A/\sigma \gg 1$，所以等号右边的第二项比第一项的影响要大。最终，我们得到OOK信号非相干接收的近似误码率为

$$P_e = \frac{1}{2}e^{-A^2/(8\sigma^2)}, \quad \frac{A}{\sigma} \gg 1$$

或者

$$P_e = \frac{1}{2}e^{-[1/(2TB_p)](E_b/N_0)}, \quad \frac{E_b}{N_0} \gg \frac{TB_p}{4} \tag{7.58}$$

其中，每比特信号的平均能量为$E_b = A^2T/4$，并且$\sigma^2 = N_0B_p$。$R = 1/T$是OOK信号的比特率，B_p为包络检波器前一级的带通滤波器的等效带宽。

式(7.58)说明了误码率取决于带通滤波器的等效带宽。当等效带宽B_p减小时，误码率P_e减小。当然，以上结果只有当码间串扰可以忽略时才正确。参考式(3.74)，我们得到当滚降系数为$r = 0$时(无ISI)最小的带通滤波器带宽。这意味着最小的带通带宽为$B_p = 2B = R = 1/T$。对于最小带宽$B_p = 1/T$，其误码率如图7.14所示。

例题7.6 使用非相干检测时OOK信号的误码率

利用式(7.57)，分析并画出AWGN信道中使用非相干检测时OOK信号的误码率曲线，其中$B_p = 1/T$。计算过程和结果见M文件Example7_06.m。将得到的结果同图7.14进行比较。

7.4.2 频移键控

频移键控(Frequency-Shift-Keyed, FSK)信号的非相干接收机示于图7.11中。输入端信号由式(7.39)中的FSK信号加上功率谱密度为$N_0/2$的高斯白噪声组成。FSK信号和噪声的频谱如图7.8(b)所示，其中带通滤波器的带宽为B_p。假定频率偏移量$2\Delta F = f_1 - f_2$足够大，则可以忽略$s_1(t)$和$s_2(t)$频谱的重叠部分。

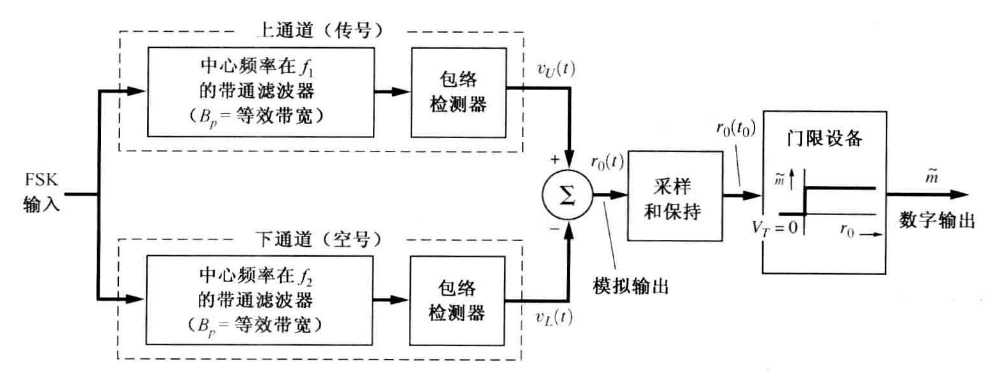


图7.11 FSK的非相干检测

通过计算式(7.8)就可以得到接收机的误码率。当接收机输入端只有信号的时候，若发送的数据为1，加法器的输出为$r_0(t) = +A$；若发送的数据为0，加法器的输出为$r_0(t) = -A$。因为对称性以及上下边带接收机输出噪声的相似性，所以最优门限为$V_T = 0$。同样，在给定s_1的条件下$r_0(t)$的条件概率密度函数与给定s_2的条件下$r_0(t)$的条件概率密度函数也相似，即

$$f(r_0|s_1) = f(-r_0|s_2) \tag{7.59}$$

将式(7.59)代入式(7.8)，得到其误码率为

$$P_e = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} f(r_0|s_1)\,dr_0 + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} f(r_0|s_2)\,dr_0$$

或者

$$P_e = \int_0^{\infty} f(r_0|s_2)\,\mathrm{d}r_0 \tag{7.60}$$

如图7.11所示，当上边带的输出 $v_U(t)$ 大于下边带的输出 $v_L(t)$ 时，$r_0(t)$ 为正的信号。于是，

$$P_e = P(v_U > v_L|s_2) \tag{7.61}$$

对应于接收机输入端为数据0加噪声的情形，我们知道上边带带通滤波器的输出仅为高斯噪声(无信号)。于是上边带通道包络检波器的输出 v_U 是服从瑞利分布的噪声：

$$(v_U|s_2) = \begin{cases} \dfrac{v_U}{\sigma^2}\,\mathrm{e}^{-v_U^2/(2\sigma^2)}, & v_U \geqslant 0 \\ 0, & v_U < 0 \end{cases} \tag{7.62}$$

其中，$\sigma^2 = N_0 B_p$。另一方面，v_L 服从莱斯分布，因为下边带通道的包络检波器的输入端为正弦信号加上噪声：

$$f(v_L|s_2) = \begin{cases} \dfrac{v_L}{\sigma^2}\,\mathrm{e}^{-(v_L^2+A^2)/(2\sigma^2)}\, I_0\!\left(\dfrac{v_L A}{\sigma^2}\right), & v_L \geqslant 0 \\ 0, & v_L < 0 \end{cases} \tag{7.63}$$

其中，$\sigma^2 = N_0 B_p$。将式(7.62)和式(7.63)代入式(7.61)，得到：

$$P_e = \int_0^{\infty} \frac{v_L}{\sigma^2}\,\mathrm{e}^{-(v_L^2+A^2)/(2\sigma^2)}\, I_0\left(\frac{v_L A}{\sigma^2}\right)\left[\int_{v_L}^{\infty} \frac{v_U}{\sigma^2}\,\mathrm{e}^{-v_U^2/(2\sigma^2)}\,\mathrm{d}v_U\right]\mathrm{d}v_L$$

计算括号里的积分，我们得到误码率为

$$P_e = \mathrm{e}^{-A^2/(2\sigma^2)} \int_0^{\infty} \frac{v_L}{\sigma^2}\,\mathrm{e}^{-v_L^2/\sigma^2} I_0\left(\frac{v_L A}{\sigma^2}\right)\mathrm{d}v_L \tag{7.64}$$

积分值可通过附录A中的积分表查出。于是，对于FSK信号的非相干检测，误码率为

$$P_e = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-A^2/(4\sigma^2)}$$

或者

$$P_e = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-[1/(2TB_p)](E_b/N_0)} \tag{7.65}$$

其中，每比特信号的平均能量为 $E_b = A^2T/2$ 和 $\sigma^2 = N_0 B_p$。$N_0/2$ 是输入噪声的功率谱密度，B_p 是每个带通滤波器的等效带宽(见图7.11)。将式(7.65)与式(7.58)进行比较，我们看到OOK与FSK系统的信噪比是一致的。图7.14所示就是式(7.65)对应于满足无码间串扰的最小滤波器带宽 $B_p = R = 1/T$ 的情形。比较FSK信号相干检测和FSK信号的非相干检测的误码性能，我们看到，当误码率小于 10^{-4} 时，FSK信号的非相干检测仅需比相干检测高1 dB的信噪比。因为不需要产生和提取参考信号，所以FSK信号的非相干检测接收机比FSK信号相干检测接收机简单得多。于是在实际系统中，几乎所有的FSK信号接收机都使用非相干检测。

例题7.7 使用非相干检测时FSK信号的误码率

分析并画出AWGN信道中使用非相干检测时FSK信号的误码率曲线，其中 $B_p = 1/T$。同时计算并画出相干MF检测时FSK信号的误码率曲线。计算过程和结果见M文件Example7_07.m。将得到的结果同图7.14进行比较。

7.4.3　差分相移键控

不能对相移键控信号进行非相干检测。然而，当前一个信号单元的信号给本信号单元提供了一个延时版本的相位参考时，就可以采用部分相干检测技术进行检测。部分相干检测接收机如图 7.12 所示，其中差分解码器由(1 比特)时延器和乘法器组成。如果接收机的输入端为不包含噪声的 BPSK 信号，采样 – 保持电路的输出 $r_0(t_0)$ 将是正的(数据 1)。若当前数据与上个数据比特不同时 $r_0(t_0)$ 将是负的(数据 0)。于是，如果 BPSK 信号经过了差分编码(例如，如表 3.4 所示)，那么在接收机的输出端将输出已恢复的编码序列，这种由差分编码 BPSK 信号组成的信号称为 DPSK(Differential Phase-Shift Keying，差分相移键控)。

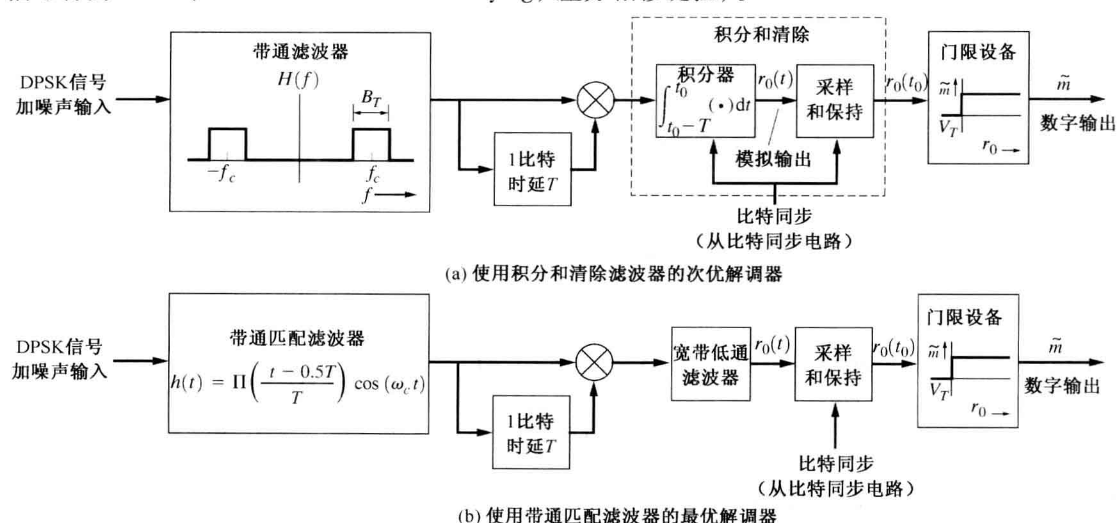


图 7.12　DPSK 信号的解调

做了如下假设以后，就可以分析得到 DPSK 接收机的误码率：

- 输入噪声为高斯白噪声。
- 信号加噪声的合成信号的相位变化缓慢，参考相位可视为常数。
- 载波相位振荡器足够稳定，于是当前信号单元中的相位与上一个信号单元的相位相同。

J. H. Park 分析得到了图 7.12(a)中的次优解调器在大输入信噪比(但不是非常大)，并满足 $B_T > 2/T$ 的情况下的误码率。该结论为[Park，1978]

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{(E_b/N_0)}{1 + [(B_T T/2)/(E_b/N_0)]}}\right) \tag{7.66a}$$

对于典型的 B_T 和 E_b/N_0，在 $B_T = 3/T$ 和 $E_b/N_0 = 10$ 附近，误码率为

$$P_e = Q\left(\sqrt{E_b/N_0}\right) \tag{7.66b}$$

于是图 7.12(a)所示的次优接收机的性能与图 7.14 所给出的 OOK 和 FSK 信号的性能相似。

图 7.12(b)给出了一种最优 DPSK 接收机[Couch，1993，图 8.25]。DPSK 最优解调接收机的误码率为

$$P_e = \frac{1}{2}e^{-(E_b/N_0)} \tag{7.67}$$

当然，也有其他形式的最优 DPSK 接收机[Lindsey 和 Simon，1973；Simon，1978]。

式(7.67)中所描述的最优 DPSK 接收机的误码率特性由图 7.14 给出。比较 BPSK 和 DPSK 在最优解调条件下的误码特性，我们看到对于相同的误码率 P_e，要求 $P_e = 10^{-4}$ 或更低，DPSK 信号要求至少比 BPSK 高 1 dB 的信噪比。在实际系统中我们常采用 DPSK 信号，这是因为 DPSK 接收机不需要载波同步电路。

7.5　正交相移键控和最小频移键控

如 5.10 节中所述，正交相移键控(Quadrature Phase-Shift Keying，QPSK)是每个符号具有 $L = 4$ 种电平的多电平信号调制技术，于是每个信号间隔(T 秒)传送 2 比特信号。QPSK 信号可表示为

$$s(t) = (\pm A)\cos(\omega_c t + \theta_c) - (\pm A)\sin(\omega_c t + \theta_c), \qquad 0 < t \leqslant T \tag{7.68}$$

其中余弦载波上的($\pm A$)是一比特的数据，而正弦载波上的($\pm A$)是另 1 比特的数据。相应的输入噪声为

$$n(t) = x(t)\cos(\omega_c t + \theta_n) - y(t)\sin(\omega_c t + \theta_n)$$

QPSK 信号等效于两路 BPSK 信号——一路使用余弦载波，另一路使用正弦载波。QPSK 信号采用图 7.13 所示的相干接收机进行检测(这是在图 4.31 中首次给出的 IQ 检测器的一种应用)。因为接收机的上下通道都是 BPSK 接收机，所以其误码率与 BPSK 系统相同。于是，从式(7.38)，我们得到 QPSK 接收机的误码率为

$$P_e = Q\left(\sqrt{2\left(\frac{E_b}{N_0}\right)}\right) \tag{7.69}$$

图 7.14 中画出了相应的误码率曲线。QPSK 信号与 BPSK 信号的误码率相同。但是对于同一比特率 R，两种信号的带宽不同。对于某一给定比特率，QPSK 信号的带宽是 BPSK 信号的一半。这些结果可由式(5.103)及式(5.106)得到，其中 QPSK 信号每个符号传送 2 比特的信息而 BPSK 信号每个符号传送 1 比特的信息。π/4 QPSK 信号的带宽与 QPSK 相同。对于相同的误码率，差分检测 π/4 QPSK 信号需要比 QPSK 信号高 3 dB 的信噪比。但是相干检测 π/4 QPSK 信号与 QPSK 信号相同。

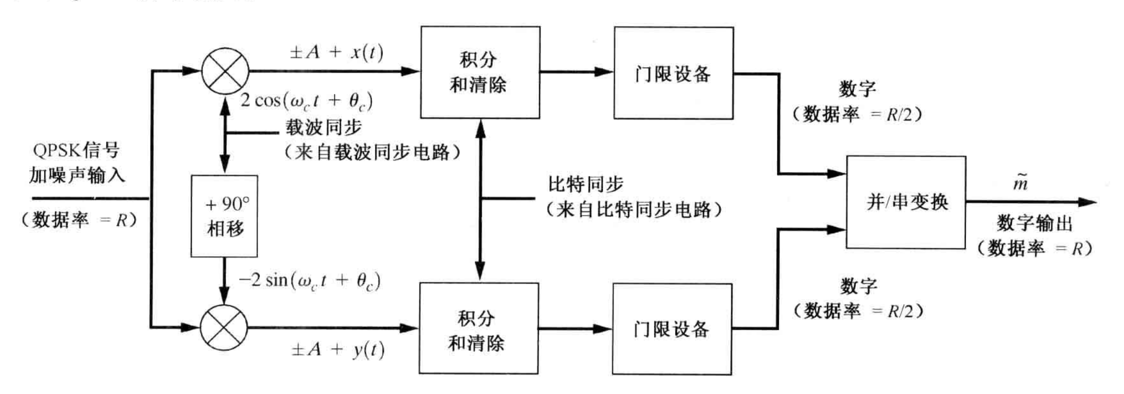


图 7.13　QPSK 信号的匹配滤波器检测

在第 5 章中已指出除了 $x(t)$ 和 $y(t)$ 正交分量上的数据是偏移量以及它们的等效数据脉冲波形是用余弦函数的正部分代替方波脉冲以外，MSK 信号基本上等价于 QPSK 信号(这使 MSK 信号的 PSD 滚降比 PSK 要快)。除了其匹配滤波器是一个与积分-清零电路同步的升余弦波形

而不是方波脉冲外，MSK 的最优接收机与 QPSK(见图 7.13)相似。因为 MSK 和 QPSK 信号的表示形式及最优接收机结构只是脉冲波形不同，所以 MSK 与 QPSK 的误比特率相同，如式(7.69)所示，其误比特率曲线由图 7.14 给出。

如果对数据进行适当的编码，那么 MSK 信号上的数据可以用 FM 型检测器进行检测，因为 MSK 信号是具有使 $s_1(t)$ 和 $s_2(t)$ 正交的具有最小频移量的 FSK 信号。于是对次优 MSK 检测器，其误比特率可由 FSK 的误比特率得到，相干 FM 检测其误比特率如式(7.47)所示，对于非相干检测其误比特率如式(7.65)所示。

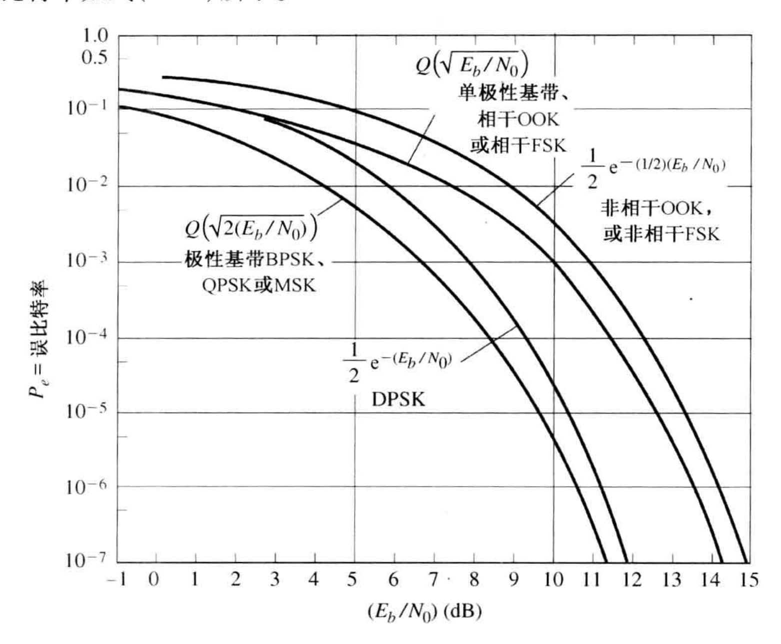


图 7.14 几种数字信号方案的误比特率的比较

7.6 数字信号系统的比较

7.6.1 误比特率和带宽

表 7.1 中比较了前面各节中不同信号的误比特率性能，同时也给出了这些信号的最小带宽。如第 3 章和第 5 章中所述(除 MSK 信号的特例以外)，当采用 $\sin x/x$ 型数据脉冲时，可以达到最小绝对带宽。

表 7.1 数字信号方法的比较

数字信号的类型	所需的最小传输带宽[a]（其中 R 是比特率）		错误性能	
基带信号				
单极性	$R/2$	(5.105)	$Q[\sqrt{(E_b/N_0)}]$	(7.24b)
极性	$R/2$	(5.105)	$Q[\sqrt{2(E_b/N_0)}]$	(7.26b)

a. ITU 所规定的典型带宽比这些最小值都要大[Jordan, 1985]。

（续表）

数字信号的类型	所需的最小传输带宽[a]（其中 R 是比特率）		错误性能			
双极性	$R/2$	(5.105)			$3Q[\sqrt{(E_b/N_0)}]/2$	(7.28b)
带通信号			相干检测		非相干检测	
OOK	R	(5.106)	$Q[\sqrt{(E_b/N_0)}]$	(7.33)	$e^{-(1/2)(E_b/N_0)}/2$，$(E_b/N_0)>1/4$	(7.58)
BPSK	R	(5.106)	$Q[\sqrt{2(E_b/N_0)}]$	(7.38)	需要相干检测	
FSK	$2\Delta F+R$，其中 $2\Delta F=f_2-f_1$ 是频移	(5.89)	$Q[\sqrt{(E_b/N_0)}]$	(7.47)	$e^{-(1/2)(E_b/N_0)}/2$	(7.65)
DPSK	R	(5.106)	实际系统中不使用		$e^{-(E_b/N_0)}/2$	(7.67)
QPSK	$R/2$	(5.106)	$Q[\sqrt{2(E_b/N_0)}]$	(7.69)	需要相干检测	
MSK	$1.5R$（零点带宽）	(5.115)	$Q[\sqrt{2(E_b/N_0)}]$	(7.69)	$e^{-(1/2)(E_b/N_0)}/2$	(7.65)

a. ITU 所规定的典型带宽比这些最小值都要大[Jordan，1985]。

图7.14画出了表7.1中各公式所表达的误比特率曲线。除那些描述非相干检测的曲线外，所有这些结果都是在假定使用最优接收机——匹配滤波器的情况下得到的。实际系统中，稍微简单一些的滤波器也能达到与匹配滤波器相近的性能。例如，对一个带宽为比特率且具有三个极点的巴特沃思(Butterworth)滤波器来说，要达到与匹配滤波器相同的误码性能时(误比特率高于10^{-12})，所需信噪比要高0.4 dB。

比较各种不同的带通信号技术，我们看到对于给定信号速率及给定信噪比 E_b/N_0，QPSK 和 MSK 是所需带宽最小、性能最好并且误比特率 P_e 最小的信号之一。然而 QPSK 信号接收机相对比较昂贵，因为它需要相干解调。如图7.14所示，对于10^{-4}或更低的误比特率 P_e 要求，DPSK（使用非相干接收机）仅需要比 QPSK 或 BPSK 高1 dB 的信噪比 E_b/N_0。因为 DPSK 较 BPSK 更容易接收，因此在实际系统中 DPSK 比 BPSK 用得更多。同样，非相干 FSK 接收机的性能与相干接收机的性能非常接近。因为非相干 FSK 接收机比相干 FSK 接收机简单，所以它在实际系统中用得更多。实际系统中，在发射机和接收机之间存在着多条不同长度的路径(由于反射)，这将导致衰落和接收信号(相位)的非相干。在这种情况下，相干检测很难实现，不考虑接收机的复杂度，一类补救的方法就是采用非相干检测技术。

采用信道编码可以降低图7.14中各系统的误比特率 P_e，这是在第1章中介绍的概念。应用香农信道容量公式，可以看到对于无穷大带宽信道采用最优编码技术(未知)，当信噪比 E_b/N_0 高于 -1.59 dB 时，系统误比特率接近于0。采用编解码技术，BPSK 和 QPSK 系统可得到9 dB 的增益，也就是说，在图7.14中，对于给定的误比特率，当采用编码技术时，其所需信噪比 E_b/N_0 最多可以降低9 dB。

7.6.2 多电平信号的符号错误和比特错误

对于多电平调制系统(与二进制信号系统相比)，很难得到简单的闭式解形式的比特错误概率(也称为误比特率 BER)。这就是为什么除了 QPSK(在7.5节中讨论的由两路正交的 BPSK 信号组成)信号以外，表7.1和图7.14中未包括多电平系统 BER 的原因。当然，多电平信号的 BER 可以通过仿真和测量得到。

在某些情况下，可以得到多电平系统误符号率上界的简单形式的表达式。对于 MPSK，误符号率的界为[Wilson, 1996]

$$P(E) \leqslant Q\left[\sqrt{2\left(\frac{E_b}{N_0}\right)(\log_2 M)\sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)}\right], \quad \text{对于MPSK信号}$$

在高斯白噪声的情况下，对于适当的 M 和 E_b/N_0，如 $M = 8$ 和 $(E_b/N_0)_{\text{db}} = 10$ dB。这个上界变紧。对于 QAM 信号(高斯白噪声信道)，其符号率的界为[Wilson, 1996]

$$P(E) \leqslant 4Q\left[\sqrt{2\left(\frac{E_b}{N_0}\right)\eta_M}\right], \quad \text{对于MQAM信号}$$

其中，对于 16 QAM，其有效因子 η_M 为 -4 dB，对于 32 QAM 为 -6 dB，64 QAM 为 -8.5 dB，128 QAM为 -10.2 dB，256 QAM 为 -13.3 dB。

误符号率(也称为错字率，Word Error Rate，WER)与误码率之间不是简单的关系。然而误码率与误符号率的界之间的关系为[Couch, 1993]

$$\frac{1}{K}P(E) \leqslant P_e \leqslant \frac{(M/2)}{M-1}P(E)$$

其中，P_e 是误比特率，$P(E)$ 是误符号率，并且有 $M = 2^K$。在低误码率 ($P_e < 10^{-3}$) 系统中发生错误时，错误的符号通常选自信号星座图上离正确符号最近的符号，其结果就是使得误比特率接近于下界。对于比特/符号的映射为格雷码(见表 3.1)的情形，因为对于距离最近的相邻符号只有 1 比特的错误，此时误比特率就接近于下界。例如，假定 $M = 128(K = 7)$，则

$$0.143\,P(E) \leqslant P_e \leqslant 0.504\,P(E)$$

对于通常的低误比特率的工作条件，即 $P_e < 10^{-3}$，误比特率将接近于下界，于是对于 $M = 128$，有 $P_e \approx 0.143P(E)$。

7.6.3 同步

众所周知，数据通信系统中需要三个级别的同步：

1. 比特同步。
2. 帧或字同步。
3. 载波同步。

比特及帧同步在第 3 章中已经讨论。

相干检测接收机中需要载波同步。如果数字信号的频谱在载波频率上有离散的线谱，如等概的 OOK 信号，就可以用锁相环从接收信号中恢复参考载波。这在第 4 章中已经讨论并且由图 4.24给出。在 BPSK 信号中，没有离散载波频率分量，但是其频谱关于载波频率对称。于是可用科斯塔环或平方环进行载波同步的恢复。这些环的方框图如图 5.3 和图 P5.60 所示。如 5.4 节所述，这些电路将可能会产生 180°的相位误差，必须克服这种误差以保证得到恢复的数据不是对原发送数据反号的信号。对于 QPSK 信号，可以通过一个更普遍的科斯塔环或一个四次幂环[Spilker, 1977]来获得参考载波。这些环存在着 0、±90°、180°的四相模糊性，这些必须加以克服以得到正确的数据。这些事实再次表明为什么非相干接收技术(可用于 OOK、FSK 或 DPSK 信号)很受欢迎。

如果系统中采用了匹配滤波电路，接收机就需要比特同步器，用于对采样保持电路提供比特同步信号的时钟。比特同步器的结构框图如图 3.20 所示。

所有的误码率公式都是在假定接收机可获得不受噪声影响的比特同步和载波同步的条件下分析得到的。当然，如果这些同步信号是从接收机的输入端含有噪声的信号中获得的话，那么参考信号也会含有噪声，于是误码率 P_e 将比不受噪声影响的理想同步情况下要高。

大多数数字通信系统所需的第三类同步就是帧同步。在一些系统中，这种同步仅仅用于区分串行数据，而将之转换成字或字节。在另外一些系统中，由于发射机使用了分组码或卷积码，于是在接收机门限判决器的输出端，通过译码可以检测甚至纠正一些比特错误。在这些系统中，帧同步信号用以提供接收机解码电路的时钟。另外，时分复用(Time-Division Multiplex, TDM)系统中需要帧同步，该系统的结构框图如图 3.37 所示。当有多个数字码源时就需要更高层的同步，如网络同步。例如，在第 8 章中讨论的卫星多址通信系统就需要网络同步。

7.7　PCM 系统的输出信噪比

在前面各节中，我们研究了各种数字通信系统的误码率 P_e，这些误码率是接收机输入端的信号每比特能量 E_b 及噪声功率谱密度 $N_0/2$ 的函数。现在我们研究模拟信号编码成 PCM 信号后，以一定的误码率 P_e 在数字通信系统中传输的技术，如图 7.15 所示。图中，数字发射机和接收机可以是前面各节中研究的任何一个数字信号系统。例如，$s(t)$ 可以是 FSK 信号，接收机则为 FSK 接收机。恢复后的 PCM 信号中存在着一些错误的比特(由信道噪声造成的)。于是 PCM 解码器输出的模拟信号将会由于这些比特错误及量化误差而产生噪声。现在的问题是，输出的模拟信号的峰值功率与平均噪声功率之比 $(S/N)_{out}$ 是多少？如果输入的模拟信号在 $-V \sim +V$ 上服从均匀分布，并且信号在 $-V \sim +V$ 上有 M 个均匀量化的台阶，那么答案就是

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{pk out}} = \frac{3M^2}{1 + 4(M^2 - 1)P_e} \tag{7.70}$$

该结论首次在 3.3 节得到了应用。

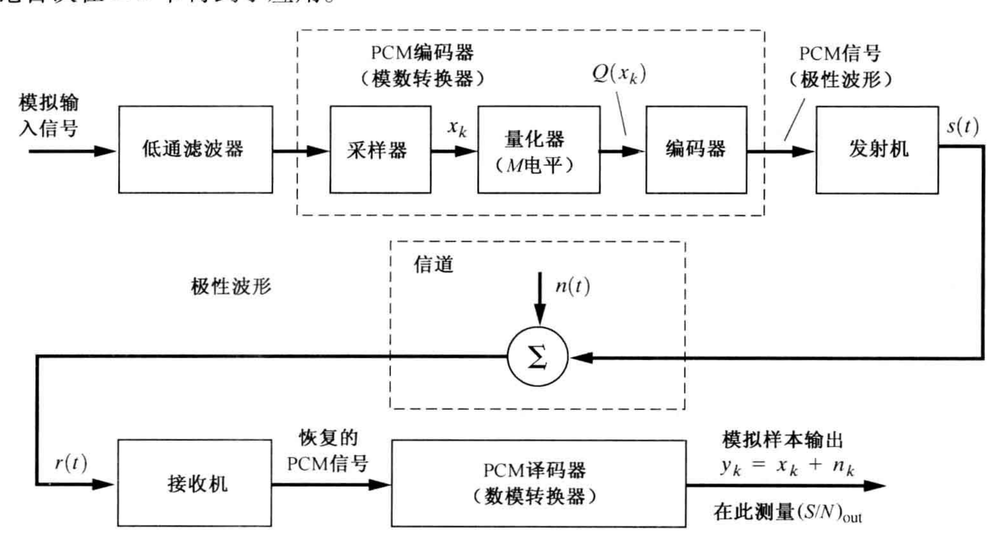


图 7.15　PCM 通信系统

我们将在此推导式(7.70)。如图 7.15 所示，模拟样本 x_k 是在采样时刻 $t = kT_s$ 得到的。如图 7.16 所示，样本被量化成某一值 $Q(t_k)$，它将是 M 个可能的电平中的某一个。量化后的样本

$Q(x_k)$ 编码成 n 比特的 PCM 码字（a_{k1}, a_{k2}, …, a_{kn}），其中 $M = 2^n$。如果使用的是极性信号，则 a_k 取值为 +1 或 -1。为简单起见，我们假定 PCM 码字与量化值的关系为[1]

$$Q(x_k) = V\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\left(\tfrac{1}{2}\right)^j \tag{7.71}$$

例如，如果第 k 个样本的 PCM 码字为(+1, +1, …, +1)，于是量化值为

$$Q(x_k) = V\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right) = \frac{V}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

从附录 A 中，我们得到该有限序列之和为

$$Q(x_k) = \frac{V}{2}\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2}-1}\right] = V - \frac{V}{2^n}$$

其中，δ 为量化台阶(见图 7.16)。于是，PCM 码字(+1, +1, …, +1)代表了量化的最大值，如图 7.16 所示。同样，我们也可以得到其他量化电平与 PCM 码字之间的对应关系。

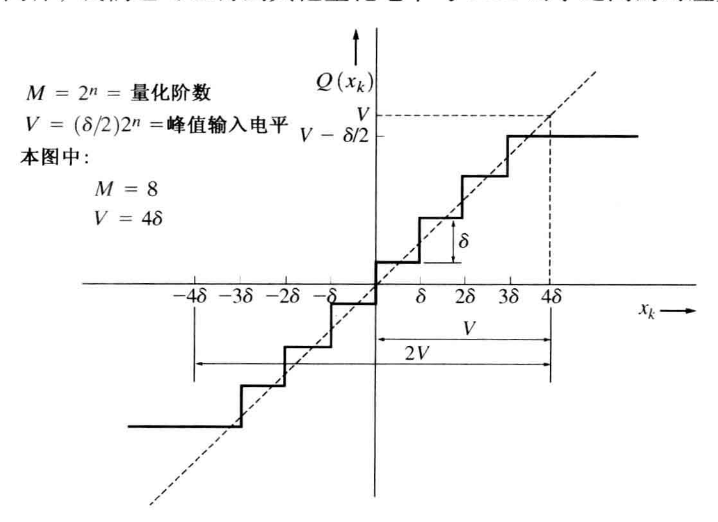


图 7.16　$M = 8$ 的均匀量化器的特性(每个 PCM 字包含 $n = 3$ 比特)

再次回到图 7.15，我们看到 PCM 系统对于第 k 个采样时刻的模拟样本输出为

$$y_k = x_k + n_k$$

其中，x_k 是信号(与输入样本相同)，n_k 是噪声。输出峰值信号与平均噪声功率之比为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{pk out}} = \frac{[(x_k)_{\max}]^2}{\overline{n_k^2}} = \frac{V^2}{\overline{n_k^2}} \tag{7.72}$$

其中，从图 7.16 中很容易看到 $(x_k)_{\max} = V$。如第 3 章所述，假定噪声 n_k 由两部分互不相关的分量组成：

- 由量化误差产生的量化噪声：

$$e_q = Q(x_k) - x_k \tag{7.73}$$

- 由信道噪声导致比特错误而产生的噪声：

① 为了数学上的简化，我们在式(7.71)中使用的是普通二进制码，而不是表 3.1 所示的格雷码。

$$e_b = y_k - Q(x_k) \tag{7.74}$$

于是，

$$\overline{n_k^2} = \overline{e_q^2} + \overline{e_b^2} \tag{7.75}$$

首先，我们分析量化噪声的功率。对于均匀分布的信号，量化噪声也是均匀分布的。进一步，如图 3.8(c)所示，均匀分布的定义区间为$(-\delta/2, \delta/2)$，其中δ为量化台阶(在图 3.8(c)中$\delta = 2$)。于是，对于$M = 2^n = 2V/\delta$(见图 7.16)：

$$\overline{e_q^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e_q^2 f(e_q)\,\mathrm{d}e_q = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} e_q^2 \frac{1}{\delta}\,\mathrm{d}e_q = \frac{\delta^2}{12} = \frac{V^2}{3M^2} \tag{7.76}$$

通过式(7.74)可以得到由于错误比特而产生的噪声的功率：

$$\overline{e_b^2} = \overline{[y_k - Q(x_k)]^2} \tag{7.77}$$

其中，$Q(x_k)$的定义由式(7.71)给出。应用式(7.71)中的算法就可以从接收到的 PCM 码字重构出模拟样本信号y_k。假定接收到第k个样本的 PCM 码字为$(b_{k1}, b_{k2}, \cdots, b_{kn})$，从而得到：

$$y_k = V\sum_{j=1}^{n} b_{kj}\left(\tfrac{1}{2}\right)^j \tag{7.78}$$

只要在恢复后的数字(PCM)信号中存在 1 比特的错误，b就与a不同。应用式(7.78)和式(7.71)，式(7.77)就变为

$$\begin{aligned}\overline{e_b^2} &= V^2\overline{\left[\sum_{j=1}^{n}(b_{kj} - a_{kj})\left(\tfrac{1}{2}\right)^j\right]^2} \\ &= V^2\sum_{j=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\left(\overline{b_{kj}b_{k\ell}} - \overline{a_{kj}b_{k\ell}} - \overline{b_{kj}a_{k\ell}} + \overline{a_{kj}a_{k\ell}}\right)2^{-j-\ell}\end{aligned} \tag{7.79}$$

其中，当$j \neq \ell$时b_{kj}和$b_{k\ell}$是接收到的 PCM 码字中两个不同位置的码元。同样，当$j \neq \ell$时，$a_{k\ell}$和$a_{k\ell}$分别位于发射和接收信号中不同的比特位置(对 PCM 码字的第k个样本)。如果$j \neq \ell$，编码后产生的比特相互独立。此外，该比特还具有零均值。于是，对于所有$j \neq \ell$，$\overline{b_{k\ell}b_{kl}} = \overline{b_{k\ell}} \cdot \overline{b_{k\ell}} = 0$。对式(7.79)右边的其他项取期望，可以得到类似的结果。式(7.79)变为

$$\overline{e_b^2} = V^2\sum_{j=1}^{n}\left(\overline{b_{kj}^2} - 2\overline{a_{kj}b_{kj}} + \overline{a_{kj}^2}\right)2^{-2j} \tag{7.80}$$

计算式中的期望值，可得到①：

$$\begin{aligned}\overline{b_{kj}^2} &= (+1)^2P(+1\mathrm{Rx}) + (-1)^2P(-1\mathrm{Rx}) = 1 \\ \overline{a_{kj}^2} &= (+1)^2P(+1\mathrm{Tx}) + (-1)^2P(-1\mathrm{Tx}) = 1 \\ \overline{a_{kj}b_{kj}} &= (+1)(+1)P(+1\mathrm{Tx}, +1\mathrm{Rx}) + (-1)(-1)P(-1\mathrm{Tx}, -1\mathrm{Rx}) \\ &\quad + (-1)(+1)P(-1\mathrm{Tx}, +1\mathrm{Rx}) + (+1)(-1)P(+1\mathrm{Tx}, -1\mathrm{Rx}) \\ &= [P(+1\mathrm{Tx}, +1\mathrm{Rx}) + P(-1\mathrm{Tx}, -1\mathrm{Rx})] \\ &\quad - [P(-1\mathrm{Tx}, +1\mathrm{Rx}) + P(+1\mathrm{Tx}, -1\mathrm{Rx})] \\ &= [1 - P_e] - [P_e] = 1 - 2P_e\end{aligned}$$

于是式(7.80)可以简化为

① 符号 +1Tx 表示发送的是二进制数据 1，-1Tx 表示发送的是数据 0。+1Rx 表示接收到的是数据 1，而 -1Rx 表示接收到的是数据 0。

$$\overline{e_b^2} = 4V^2 P_e \sum_{j=1}^{n} \left(\tfrac{1}{4}\right)^j$$

根据附录 A 中的结论，此式为

$$\overline{e_b^2} = V^2 P_e \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{4}{3} V^2 P_e \frac{(2^n)^2 - 1}{(2^n)^2}$$

或者

$$\overline{e_b^2} = \tfrac{4}{3} V^2 P_e \frac{M^2 - 1}{M^2} \tag{7.81}$$

借助于式(7.75)，将式(7.76)和式(7.81)代入式(7.72)，得到：

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{pk out}} = \frac{V^2}{(V^2/3M^2) + (4V^2/3M^2)P_e(M^2 - 1)}$$

将之化简即可得到式(7.70)。

例题 7.8 PCM 系统输出端恢复的模拟信号的 S/N

利用式(7.70)，分析并画出量化阶数 $M = 256$ 和 $M = 8$ 时，PCM 数模转换器输出端恢复的模拟信号的峰值 S/N 随 BER 变化的曲线。计算过程和结果见 M 文件 Example7_08. m。将得到的结果与图 7.17 进行比较。

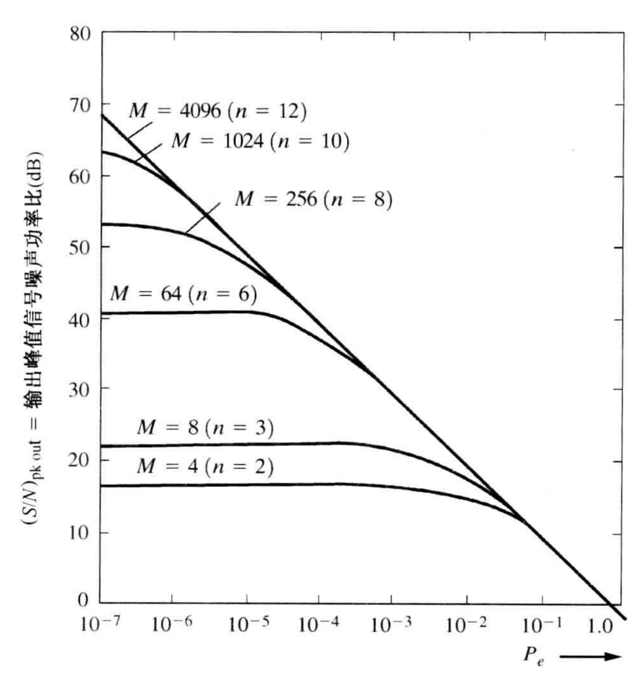


图 7.17 作为 P_e 和量化阶数 M 的函数的 PCM 系统的 $(S/N)_{\text{out}}$

图 7.17 给出了利用式(7.70)得到的曲线。对于一个有 M 个量化台阶的 PCM 系统来说，数字接收机的输出信噪比是其误码率的函数。当 $P_e < 1/(4M^2)$ 时，输出端的模拟信号主要被量化噪声所污染。事实上，对于 $P_e = 0$，$(S/N)_{\text{out}} = 3M^2$，所有的噪声都是量化噪声。相反，当 $P_e > 1/(4M^2)$时，输出主要受信道噪声的影响。

同时强调一下，式(7.70)描述的是输出峰值信噪比。平均信噪比很容易从刚才的结论中得到，平均信噪比为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = \frac{\overline{(x_k)^2}}{\overline{n_k^2}} = \frac{V^2}{3\overline{n_k^2}} = \frac{1}{3}\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{pk out}}$$

其中，$\overline{x_k^2} = V^2/3$，因为 x_k 在 $-V \sim +V$ 之间服从均匀分布。当 $(S/N)_{\text{out}}$ 为系统输出的平均信号噪声功率比时，应用式(7.72)和式(7.70)，计算得到：

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = \frac{M^2}{1 + 4(M^2 - 1)P_e} \tag{7.82}$$

其中，$(S/N)_{\text{out}}$ 是系统输出的平均信号噪声功率比。

7.8 模拟系统的输出信噪比

在第 4 章和第 5 章中，我们研究了数字及模拟通信系统的一些调制解调技术。讨论了 AM、DSB-SC、SSB、PM 和 FM 调制技术，并对这些信号的带宽进行了分析。现在计算上述这些系统的输出信噪比，它是输入信号、噪声及系统参数的函数。我们将再次发现非相干系统的数值分析比相干系统要难，因而常用近似的方法来简化结论。实际应用中，我们更倾向于采用非相干系统，因为其接收机的价格在通常状况下都比较便宜。整个系统的成本包括一个发射机和成千上万乃至百万个接收机，如 FM、AM 和模拟 TV 广播。

对于加性噪声信道系统，接收机的输入为

$$r(t) = s(t) + n(t)$$

对于传输带宽为 B_T 的带通系统，有

$$\begin{aligned} r(t) &= \text{Re}\{g_s(t)e^{j(\omega_c t+\theta_c)}\} + \text{Re}\{g_n(t)e^{j(\omega_c t+\theta_c)}\} \\ &= \text{Re}\{[g_s(t) + g_n(t)]e^{j(\omega_c t+\theta_c)}\} \end{aligned}$$

或者

$$r(t) = \text{Re}\left\{g_T(t)e^{j(\omega_c t+\theta_c)}\right\} \tag{7.83a}$$

其中，

$$\begin{aligned} g_T(t) &\triangleq g_s(t) + g_n(t) \\ &= [x_s(t) + x_n(t)] + j[y_s(t) + y_n(t)] \\ &= x_T(t) + jy_T(t) \\ &= R_T(t)e^{j\theta_T(t)} \end{aligned} \tag{7.83b}$$

这里，$g_T(t)$ 表示接收机输入端信号总的(即合成)复包络，它由信号的复包络加上噪声的复包络组成。整个复包络的特性与高斯噪声一起已在第 6 章中进行了分析。表 4.1 给出了不同类型调制信号的复包络特性。

7.8.1 与基带系统的比较

各类带通系统的噪声性能可以通过分析当接收机输入端为调制信号加噪声时接收机的输出信噪比 $(S/N)_{\text{out}}$ 得到。我们想知道其输出信噪比 $(S/N)_{\text{out}}$ 是否比 AM 系统、DSB-SC 系统或 FM 系统要高。为了比较信噪比，假设接收机输入端调制信号的功率相同，并且输入噪声的功率谱密度函数为 $N_0/2$（即输入白噪声的功率谱密度为 $N_0/2$ ）。

为比较各种不同带通系统的输出信噪比 $(S/N)_{\text{out}}$，我们需要一个通用的对接收机输入的测量准则。对于模拟系统，其准则为接收的信号功率 P_s 除以信息(调制)带宽内的噪声功率。这等价于基带传输系统的输出信噪比 $(S/N)_{\text{out}}$，如图 7.18 所示，即

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{baseband}} = \frac{P_s}{N_0 B} \tag{7.84}$$

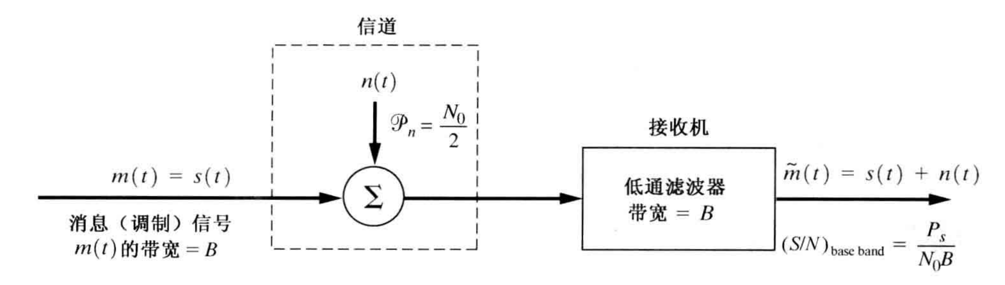


图 7.18 基带系统

我们可以通过计算作为 $(P_s/N_0B) = (S/N)_{\text{baseband}}$ 函数的系统输出信噪比 $(S/N)_{\text{out}}$，来比较不同调制系统的性能。其中，P_s 是接收机输入端 AM、DSB-SC 或 FM 信号的功率；B 是基带调制信号的带宽，为了有相同的比较基准，对于所有的基带调制信号均采用相同的基带带宽(如果 B 被选为输入调制信号的带宽 B_T，则对于某一固定的信噪比值 $(S/N)_{\text{baseband}}$ 来说，比较将不在相同的噪声功率谱密度上进行，因为 AM 信号和 FM 信号的 B_T 值是不同的)。

接收机输入的 SNR 为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{in}} = \frac{P_s}{N_0 B_T} = \left(\frac{S}{N}\right)_{\text{baseband}}\left(\frac{B}{B_T}\right) \tag{7.85}$$

其中，B_T 为接收机输入端带通信号的带宽。

我们将计算几种不同系统的输出信噪比 $(S/N)_{\text{out}}$。

7.8.2 使用乘法检测器的 AM 系统

图 7.19 给出了使用相干检测接收机的 AM 系统结构框图。由式(5.3)，我们得到 AM 信号的复包络为

$$g_s(t) = A_c[1 + m(t)]$$

复合接收信号加噪声的复包络为

$$g_T(t) = [A_c + A_c m(t) + x_n(t)] + \mathrm{j}y_n(t) \tag{7.86}$$

对于乘法检测器，应用式(4.71)得到其输出信号为

$$\tilde{m}(t) = \mathrm{Re}\{g_T(t)\} = A_c + A_c m(t) + x_n(t)$$

其中，A_c 是由于离散的 AM 载波而在检测器输出端产生的直流电压，① $A_c m(t)$ 是检测到的调制信号，$x_n(t)$ 是检测到的噪声。输出 SNR 为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = \frac{A_c^2 \overline{m^2(t)}}{\overline{x_n^2(t)}} = \frac{A_c^2 \overline{m^2(t)}}{2N_0 B} \tag{7.87}$$

---

① 直流分量常常被用于给前级 RF 和 IF 提供自动增益控制(Automatic Gain Control，AGC)。

其中，由式(6.133g)，可得到 $\overline{x_n^2} = \overline{n^2} = 2(N_0/2)(2B)$。输入信号的功率为

$$P_s = \frac{A_c^2}{2}\overline{[1+m(t)]^2} = \frac{A_c^2}{2}[1+\overline{m^2}]$$

其中，假设 $\overline{m(t)} = 0$（即调制信号无直流分量）。于是输入 SNR 为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{in}} = \frac{(A_c^2/2)(1+\overline{m^2})}{2N_0B} \tag{7.88}$$

结合式(7.87)和式(7.88)得到

$$\frac{(S/N)_{\text{out}}}{(S/N)_{\text{in}}} = \frac{2\overline{m^2}}{1+\overline{m^2}} \tag{7.89}$$

对于 100% 的正弦波调制，$\overline{m^2} = \frac{1}{2}$ 以及 $(S/N)_{\text{out}}/(S/N)_{\text{in}} = \frac{2}{3}$。

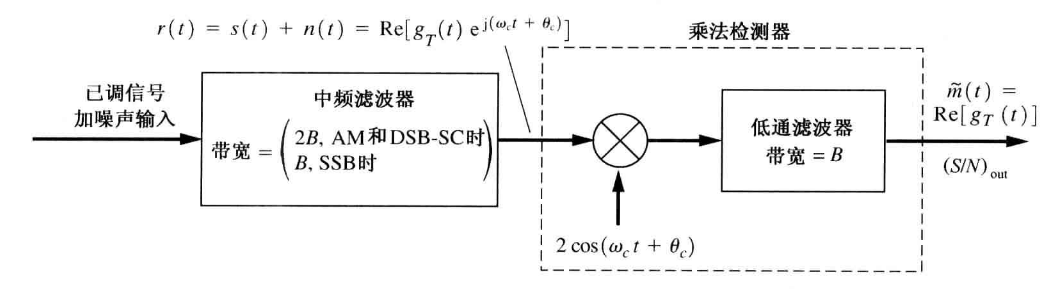


图 7.19　相干接收机

为了比较，用 $(S/N)_{\text{baseband}}$ 代替 P_s 后，式(7.87)变为

$$\frac{(S/N)_{\text{out}}}{(S/N)_{\text{baseband}}} = \frac{\overline{m^2}}{1+\overline{m^2}} \tag{7.90}$$

对于 100% 的正弦波调制，有 $(S/N)_{\text{out}}/(S/N)_{\text{base band}} = \frac{1}{3}$。这表明了 AM 系统相对于相同信号功率的基带系统要差 4.8 dB，这是因为所附加的功率在离散的 AM 载波上。[①] 这些结果如图 7.27 所示。

7.8.3　使用包络检波器的 AM 系统

包络检波器在其输出端的输出为 $KR_T(t)$，其中 K 是比例常数。于是对于输入端为信号加上噪声的情形，其输出为

$$KR_T(t) = K|g_s(t) + g_n(t)|$$

将式(7.86)代入 $g_s(t) + g_n(t)$，得到：

$$KR_T(t) = K|[A_c + A_cm(t) + x_n(t)] + \mathrm{j}[y_n(t)]| \tag{7.91}$$

功率为

$$\overline{[KR_T(t)]^2} = K^2A_c^2\overline{\left\{\left[1+m(t)+\frac{x_n(t)}{A_c}\right]^2 + \left[\frac{y_n(t)}{A_c}\right]^2\right\}} \tag{7.92}$$

① AM 载波上没有信息量，但是其允许 AM 接收机使用比较经济的包络检波器。

对于 $(S/N)_{\text{in}}$ 较大的情形，$(y_n/A_c)^2 \ll 1$，于是得到：

$$\overline{[KR_T(t)]^2} = (KA_c)^2 + K^2A_c^2\overline{m^2} + K^2\overline{x_n^2} \tag{7.93}$$

其中，$(KA_c)^2$ 是 AGC 项的功率，$K^2A_c^2\ \overline{m^2}$ 是检测到的调制信号的功率，而 $K^2\ \overline{x_n^2}$ 是检测到的噪声功率。于是，对于较大的 $(S/N)_{\text{in}}$，有

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = \frac{A_c^2\overline{m^2}}{\overline{x_n^2}} = \frac{A_c^2\overline{m^2}}{2N_0B} \tag{7.94}$$

将该结果与式(7.87)比较，我们看到，对应于较大的 $(S/N)_{\text{in}}$ 的情形，包络检波器的性能与乘法检测器的性能相同。

对于较小的 $(S/N)_{\text{in}}$ 的情形，包络检波器的性能比乘法检测器的性能要差。参考式(7.91)，可得到检测器的输出为

$$KR_T(t) = K|g_T(t)| = K|A_c[1 + m(t)] + R_n(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_n(t)}|$$

当 $(S/N)_{\text{in}} < 1$ 时，如图 7.20 所示，$g_T(t)$ 的幅度可近似为

$$KR_T(t) \approx K\{A_c[1 + m(t)]\cos\theta_n(t) + R_n(t)\} \tag{7.95}$$

于是，对于高斯噪声信道，包络检波器的输出由服从瑞利分布的噪声 $R_n(t)$，加上与随机噪声因子 $\cos\theta_n(t)$ 相乘的信号项组成。乘性因子对信号的污染远大于加性瑞利噪声。这就产生了一个门限效应，即当 $(S/N)_{\text{in}} < 1$ 时，$(S/N)_{\text{out}}$ 变得非常小。事实上，我们可以看到对应于 $(S/N)_{\text{in}} < 1$ 的情形，$(S/N)_{\text{out}}$ 正比于 $(S/N)_{\text{in}} < 1$ 的平方[Schwartz Bennett 和 Stein，1966]。尽管 $(S/N)_{\text{in}} < 1$ 较小时包络检波器比乘法检波器的性能要差得多，但是在 AM 广播信道中这种差别几乎可以忽略。这是因为 AM 信号收听者常常只收听那些信噪比足够高，即高于25 dB 的那些电台。在这样的条件下，包络检波器的性能与乘法检测器的性能相同。另外，包络检波器价格不高，并且不需要相干参考量。因为这些原因，所以包络检波器广泛用于 AM 广播信道接收机中。在其他一些应用中，如收听弱 AM 电台的信号或 AM 数据传输系统时，则采用乘法器以避免在弱信号系统中应用包络检波器产生的乘性噪声的影响。

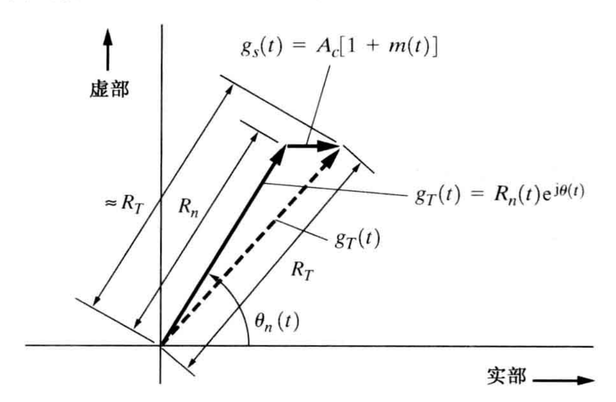


图 7.20　AM 的向量图，$(S/N)_{\text{in}} \ll 1$

7.8.4　DSB-SC 系统

如第 5 章中所述，DSB-SC 信号是离散载波分量被抑制的 AM 信号。如图 7.19 所示，应用相干检测就可以从 DSB-SC 信号中恢复调制信号 $m(t)$。对于 DSB-SC，有

$$g_s(t) = A_cm(t) \tag{7.96}$$

遵循式(7.89)的推导过程，DSB-SC 信号的信噪比为

$$\frac{(S/N)_{\text{out}}}{(S/N)_{\text{in}}} = 2 \tag{7.97}$$

应用式(7.90)，得到:

$$\frac{(S/N)_{\text{out}}}{(S/N)_{\text{baseband}}} = 1 \tag{7.98}$$

因此，DSB-SC 系统的噪声性能与基带信号系统相同，尽管其所要求的带宽是基带信号系统的两倍(即 $B_T = 2B$)。

7.8.5 SSB 系统

图7.19 也给出了 SSB 信号接收机的结构，其中 IF 部分的带宽现在为 $B_T = 2B$。SSB 信号的复包络为

$$g_s(t) = A_c[m(t) \pm \mathrm{j}\hat{m}(t)] \tag{7.99}$$

其中，+ 号表示 USSB 系统，而 - 号表示 LSSB 系统。SSB 信号加噪声的复包络为

$$g_T(t) = [A_c m(t) + x_n(t)] + \mathrm{j}[\pm A_c\hat{m}(t) + y_n(t)] \tag{7.100}$$

乘法检测器的输出为

$$\hat{m}(t) = \mathrm{Re}[g_T(t)] = A_c m(t) + x_n(t) \tag{7.101}$$

相应信噪比为

$$(S/N)_{\text{out}} = \frac{A_c^2\,\overline{m^2(t)}}{\overline{x_n^2(t)}} = \frac{A_c^2\,\overline{m^2(t)}}{N_0 B} \tag{7.102}$$

其中，$\overline{x_n^2} = \overline{n^2} = 2(N_0/2)(B)$。应用式(6.133g)，我们得到输入信号的功率为

$$P_s = \frac{1}{2}\overline{|g_s(t)|^2} = \frac{A_c^2}{2}[\overline{m^2} + \overline{(\hat{m})^2}] = A_c^2\overline{m^2} \tag{7.103}$$

以及输入的噪声功率为 $P_n = \overline{n^2(t)} = N_0 B$。于是，

$$\frac{(S/N)_{\text{out}}}{(S/N)_{\text{in}}} = 1 \tag{7.104}$$

同理，有

$$\frac{(S/N)_{\text{out}}}{(S/N)_{\text{baseband}}} = 1 \tag{7.105}$$

在噪声性能和带宽要求上，SSB 信号与基带信号完全相同(即 $B_T = B$)。此外，式(7.98)和式(7.105)表明了 DSB、SSB 和基带信号系统具有相同的输出 SNR。

7.8.6 PM 系统

如图 7.21 所示，PM 调制信号可以用一个(相干)相位检测器进行恢复。(在第 4 章中，我们证明了当 β_p 很小时，相位检测器可以用一个限波器加一个乘法器来实现。)PM 信号的复包络具有如下的形式:

$$g_s(t) = A_c e^{\mathrm{j}\theta_s(t)} \tag{7.106a}$$

其中，

$$\theta_s(t) = D_p m(t) \tag{7.106b}$$

检测器输入端的信号加噪声的复包络为

$$\begin{aligned} g_T(t) &= |g_T(t) e^{j\theta_T(t)} = [g_s(t) + g_n(t)] \\ &= A_c e^{j\theta_s(t)} + R_n(t) e^{j\theta_n(t)} \end{aligned} \tag{7.107}$$

当输入信号为高斯噪声时(即没有有用信号),如例题6.13所述,$R_n(t)$ 服从瑞利分布,$\theta_n(t)$ 服从均匀分布。

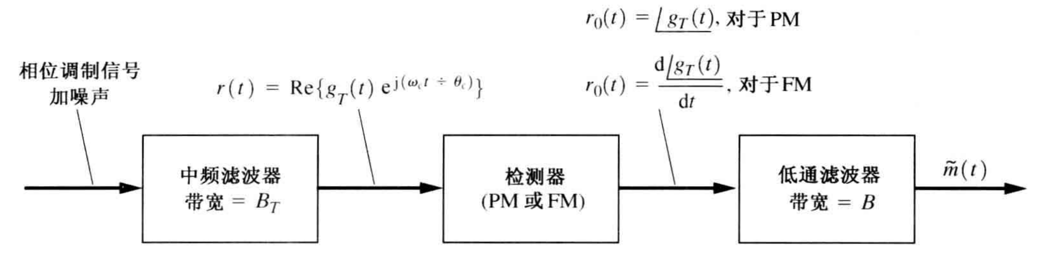


图 7.21 相位调制信号的接收机

相位检测器输出与 $\theta_T(t)$ 成正比:

$$r_0(t) = K\angle g_T(t) = K\theta_T(t)$$

其中,K 为检测器的增益。对应于较大的 $(S/N)_{\text{in}}$,可以借助于 $g_T = g_s + g_n$ 的矢量图来近似 $g_T(t)$,如图7.22所示。于是,对于 $A_c \gg R_n(t)$,合成相角近似为

$$r_0(t) = K\theta_T(t) \approx K\left\{\theta_s(t) + \frac{R_n(t)}{A_c}\sin[\theta_n(t) - \theta_s(t)]\right\} \tag{7.108}$$

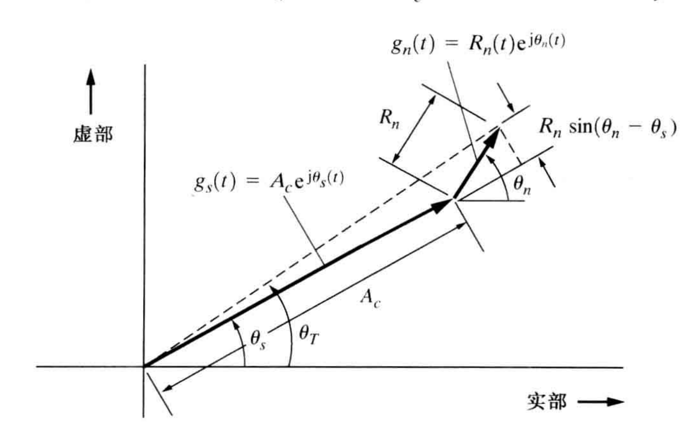


图 7.22 角度调制的向量图,$(S/N)_{\text{in}} \gg 1$

对于没有进行相位调制(仍有载波信号)的情形,公式简化为

$$r_0(t) \approx \frac{K}{A_c} y_n(t), \quad \theta_s(t) = 0 \tag{7.109}$$

其中,应用式(6.127e),可得到 $y_n(t) = R_n(t)\sin\theta_n(t)$。这表明了(PM接收机输入端)未调制的载波抑制了输出端的噪声。这称为静态效应,它在输入信号高于门限的情况下发生[即当 $(S/N)_{\text{in}} \gg 1$ 时]。此外,当采用相位调制并且当 $(S/N)_{\text{in}} \gg 1$ 时,可以用 $R_n(t)\sin[\theta_n(t)]$ 代替 $R_n(t)\sin[\theta_n(t) - \theta_s(t)]$。之所以可以这样做,是因为 $\theta_s(t)$ 被认为是确知的,因此对于

给定的 t 值，$\theta_s(t)$ 是常数。因为由式(6.153)可知，$\theta_n(t)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上服从均匀分布，所以 $\theta_n(t) - \theta_s(t)$ 在宽度为 2π 的区间上服从均匀分布，即 $\cos[\theta_n(t) - \theta_s(t)]$ 与 $\cos[\theta_n(t)]$ 具有相同的概率密度函数(PDF)，所以可以进行替代。于是，对于较大的 $(S/N)_{\text{in}}$，PM 检测器相应部分的输出近似为

$$r_0(t) \approx s_0(t) + n_0(t) \tag{7.110}$$

其中，

$$s_0(t) = K\theta_s(t) = KD_p m(t) \tag{7.111a}$$

$$n_0(t) = \frac{K}{A_c} y_n(t) \tag{7.111b}$$

应用式(6.133l)，就可以得到输出噪声 $n_0(t)$ 的功率谱密度函数，于是得到：

$$\mathcal{P}_{n_0}(f) = \begin{cases} \dfrac{K^2}{A_c^2} N_0, & |f| \leqslant B_T/2 \\ 0, & \text{否则} \end{cases} \tag{7.112}$$

其中，输入噪声的功率谱密度在中频带通滤波器的通带上为 $N_0/2$，而在其带外为 0。式(7.112)的结果示于图 7.23(a)中，其中阴影标注的频谱部分可以通过低通滤波器。

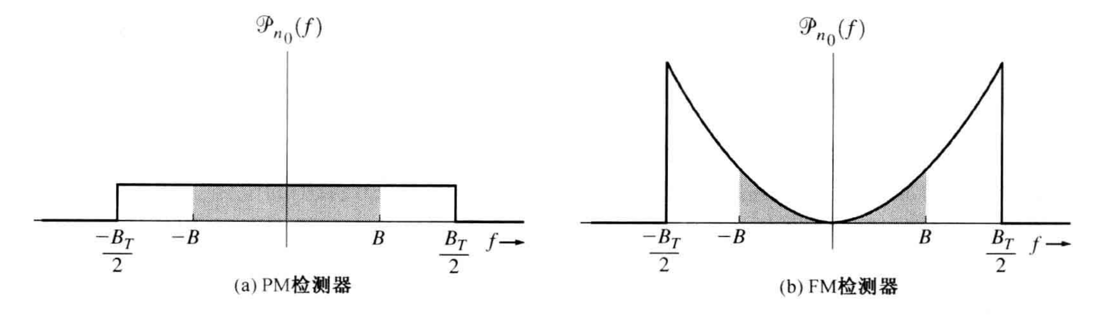


图 7.23　角度调制接收机检测器输出噪声的 PSD

接收机的输出由对 $r_0(t)$ 低通滤波后的信号组成。然而 $s_0(t)$ 的频谱位于滤波器的通带内，于是，

$$\widetilde{m}(t) = s_0(t) + \widetilde{n}_0(t) \tag{7.113}$$

其中，$\tilde{n}_0(t)$ 是如图 7.23(a)中阴影部分所示的带限白噪声。接收机的噪声功率为

$$\overline{[\widetilde{n}_0(t)]^2} = \int_{-B}^{B} \mathcal{P}_{n_0}(f)\,\mathrm{d}f = \frac{2K^2 N_0 B}{A_c^2} \tag{7.114}$$

借助于式(7.111a)和式(7.114)很容易计算出系统的输出信噪比：

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = \frac{\overline{s_0^2}}{\overline{\widetilde{n}_0^2}} = \frac{A_c^2 D_p^2 \overline{m^2}}{2N_0 B}$$

应用式(5.46)和式(5.47)，可以将 PM 发射机的灵敏度常数表示成

$$D_p = \frac{\beta_p}{V_p}$$

其中，β_p 是 PM 指数，V_p 为 $m(t)$ 的峰值。于是输出信噪比变为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = \frac{A_c^2\beta_p^2\overline{(m/V_p)^2}}{2N_0B} \tag{7.115}$$

输入信噪比为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{in}} = \frac{A_c^2/2}{2(N_0/2)B_T} = \frac{A_c^2}{2N_0B_T} \tag{7.116}$$

其中,B_T 是 PM 信号的传输带宽(也是中频滤波器的带宽)。

通过式(5.61)给出的卡森定律可以计算得到 PM 信号的传输带宽:

$$B_T = 2(\beta_p + 1)B \tag{7.117}$$

其中,β_p 为 PM 指数。如式(5.47)所述,PM 指数与 PM 信号的峰值角度偏差大小相等。于是有

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{in}} = \frac{A_c^2}{4N_0(\beta_p + 1)B} \tag{7.118}$$

结合式(7.115),得到输出与输入信噪比之比为

$$\frac{(S/N)_{\text{out}}}{(S/N)_{\text{in}}} = 2\beta_p^2(\beta_p + 1)\overline{\left(\frac{m}{V_p}\right)^2} \tag{7.119}$$

将式(7.84)代入式(7.115),可将输出信噪比表示成等效基带系统的形式,其中 $P_s = A_c^2/2$:

$$\frac{(S/N)_{\text{out}}}{(S/N)_{\text{baseband}}} = \beta_p^2\overline{\left(\frac{m}{V_p}\right)^2} \tag{7.120}$$

该公式表明 PM 系统相对基带系统的改进依赖于其使用的最大相位偏移量。这意味着只需要通过简单地增加 β_p 就可以达到我们所需要的改进,具体取决于采用的电路。如果峰值相移超过 π 弧度,那么在某些电路中,将必须采用特殊的提取相位技术以得到输出相位的真实值(与相对值相比)。于是,$\beta_p m(t)/V_p = D_p m(t)$ 的最大值将为 π。对于正弦调制系统,这将提供比基带信号系统高 $D_p^2\overline{m^2} = \pi^2/2$ 或 6.9 dB 的增益。

这里必须强调一点,上述关于 $(S/N)_{\text{out}}$ 的结论只有在输入信号超过门限[即 $(S/N)_{\text{in}} > 1$]时才是正确的。

7.8.7 FM 系统

除了 FM 检测器的输出与 $d\theta_T(t)/dt$ 成正比,而 PM 检测器的输出与 $\theta_T(t)$ 成正比以外,我们分析 FM 系统输出信噪比的步骤与 PM 系统相同。图 7.21 所示角度调制接收机中检测器现在就变为 FM 检测器。FM 信号(仅有信号而无噪声)的复包络为

$$g_s(t) = A_c e^{j\theta_s(t)} \tag{7.121a}$$

其中,

$$\theta_s(t) = D_f\int_{-\infty}^{t} m(\lambda)\,d\lambda \tag{7.121b}$$

假设接收机的输入信号为 FM 信号加白噪声。

FM 检测器的输出与检测器输入端信号的相位的导数成正比:

$$r_0(t) = \left(\frac{K}{2\pi}\right)\frac{d\,\underline{/gT(t)}}{dt} = \left(\frac{K}{2\pi}\right)\frac{d\theta_T(t)}{dt} \tag{7.122}$$

在上面这个公式中,K 是 FM 检测器的增益。采用与推导式(7.108)、式(7.110)及式(7.111)相

同的步骤，得到检测器的输出可近似为

$$r_0(t) \approx s_0(t) + n_0(t) \tag{7.123}$$

其中，对于 FM 信号有

$$s_0(t) = \left(\frac{K}{2\pi}\right)\frac{\mathrm{d}\theta_s(t)}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{KD_f}{2\pi}\right)m(t) \tag{7.124a}$$

和

$$n_0(t) = \left(\frac{K}{2\pi A_c}\right)\frac{\mathrm{d}y_n(t)}{\mathrm{d}t} \tag{7.124b}$$

上面的这些结论只有在输入信号功率高于门限值时[即 $(S/N)_{\text{in}} \gg 1$ 时]才成立。对噪声求导[见式(7.124b)]，使 FM 检测器输出噪声的功率谱密度不同于 PM 系统。对于 FM 系统，我们有

$$\mathcal{P}_{n_0}(f) = \left(\frac{K}{2\pi A_c}\right)^2 |\mathrm{j}2\pi f|^2 \mathcal{P}_{yn}(f)$$

或者

$$\mathcal{P}_{n_0}(f) = \begin{cases} \left(\dfrac{K}{A_c}\right)^2 N_0 f^2, & |f| < B_T/2 \\ 0, & \text{否则} \end{cases} \tag{7.125}$$

这表明 FM 检测器的输出噪声功率谱密度函数具有抛物线形状，如图 7.23(b)所示。

接收机的输出由 $r_0(t)$ 经低通滤波后的成分组成。经由滤波后的噪声功率为

$$\overline{[\tilde{n}_0(t)]^2} = \int_{-B}^{B} \mathcal{P}_{n_0}(f)\,\mathrm{d}f = \frac{2}{3}\left(\frac{K}{A_c}\right)^2 N_0 B^3 \tag{7.126}$$

应用式(7.124a)和式(7.126)很容易计算输出 SNR：

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = \frac{\overline{s_0^2}}{\overline{[\tilde{n}_0]^2}} = \frac{3A_c^2[D_f/(2\pi B)]^2\overline{m^2}}{2N_0 B}$$

从式(5.44)和式(5.48)可得到：

$$\frac{D_f}{2\pi B} = \frac{\beta_f}{V_p}$$

其中，V_p 是 $m(t)$ 的峰值。于是输出 SNR 变为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = \frac{3A_c^2\beta_f^2\overline{(m/V_p)^2}}{2N_0 B} \tag{7.127}$$

输入 SNR 为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{in}} = \frac{A_c^2}{4N_0(\beta_f + 1)B} \tag{7.128}$$

结合式(7.127)和式(7.128)，我们得到输出与输入信噪比之比为

$$\frac{(S/N)_{\text{out}}}{(S/N)_{\text{in}}} = 6\beta_f^2(\beta_f + 1)\overline{\left(\frac{m}{V_p}\right)^2} \tag{7.129}$$

其中，β_f 是 FM 系数，V_p 是调制信号 $m(t)$ 的峰值。

例题 7.9　FM 系统的改善因子

利用式(7.29)，分析并画出正弦调制时，FM 系统改善因子(单位：dB) $I=(S/N)_{out}/(S/N)_{in}$ 随 β_f 变化的曲线。计算过程和结果见 M 文件 Example7_09.m。

将式(7.84)代入式(7.127)，即可将输出 SNR 表示成等效基带 SNR 的形式，其中 $P_s=A_c^2/2$，

$$\frac{(S/N)_{\text{out}}}{(S/N)_{\text{baseband}}}=3\beta_f^2\overline{\left(\frac{m}{V_p}\right)^2} \tag{7.130}$$

对应于正弦波调制的情形，有 $\overline{(m/V_p)^2}=\dfrac{1}{2}$，并且式(7.130)变为

$$\frac{(S/N)_{\text{out}}}{(S/N)_{\text{baseband}}}=\frac{3}{2}\beta_f^2\quad\textbf{（正弦波调制）} \tag{7.131}$$

乍看上去，上述的这些结论似乎意味着调频系统的性能可以简单地通过增加 FM 指数 β_f 而无限制地提高。但是，随着 β_f 的提高，传输带宽也提高了，结果输入信噪比 $(S/N)_{in}$ 降低了。这些关于输出信噪比 $(S/N)_{out}$ 的公式仅当 $(S/N)_{in}\gg 1$ 时才正确(即输入信号功率高于门限时)，所以不能通过简单增加 FM 指数 β_f 的方法来使输出信噪比 $(S/N)_{out}$ 达到很大值。式(7.131)的结果如图 7.24 中的点画线所示。

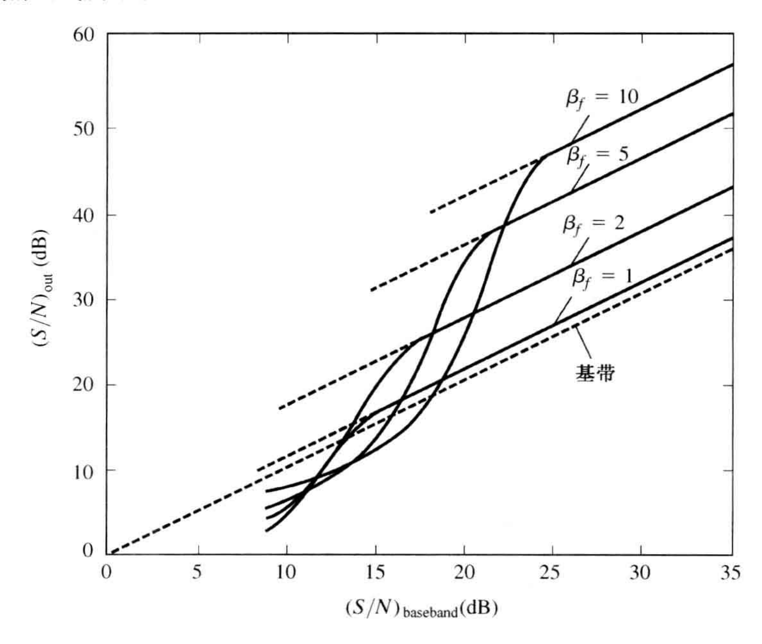


图 7.24　正弦波调制的 FM 信号加高斯噪声(无去加重)时的 FM 鉴频器的噪声性能(见 M 文件 Example7_10.m)

对于门限效应的分析起源于 1948 年(Rice，1948；Stumpers，1948)。Taub 和 Schilling 在 1986 年发表了一篇非常优秀的综述。他们证明了式(7.131)可用于描述在门限附近的 $(S/N)_{out}$。对于正弦波调制系统，FM 鉴频器的输出信噪比为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}}=\frac{\frac{3}{2}\beta_f^2\,(S/N)_{\text{baseband}}}{1+\left(\frac{12}{\pi}\beta_f\right)\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{baseband}}e\left\{-\left[\frac{1}{2(\beta_f+1)}\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{baseband}}\right]\right\}} \tag{7.132}$$

(该系统中没有采用预加重)。反映 FM 鉴频器门限效应的输出信噪比特性曲线如图 7.24 中的实线所示。这幅图表明了 FM 系统的噪声性能远远超过了基带系统。例如，对于 $\beta_f = 5$ 和对于 $(S/N)_{\text{baseband}} = 25$ dB，FM 系统的性能比基带系统的性能要好 15.7 dB。在后面的章节中我们将看到，应用预加重技术将获得更高的增益。

例题 7.10 FM 系统的噪声性能

利用式(7.132)，分析并画出正弦调制时，$\beta_f = 10$ 和 $\beta_f = 2$ 两种情况下 $(S/N)_{\text{out}}$ 随 $(S/N)_{\text{baseband}}$ 变化的曲线(单位：dB)。计算过程和结果见 M 文件 Example7_10. m。将得到的结果与图 7.24 进行比较。

7.8.8 门限扩展的 FM 系统

对于仅使用了 FM 鉴频器的接收机，任何一项技术都可能被用于降低门限值。例如，可用 FM 锁相环扩展 FM 鉴频器的门限值。然而，当输入信噪比很大时，所有 FM 接收机都达到相同的性能——也就是式(7.129)或式(7.130)中的指标。

图 7.25 给出了一个有反馈的 FM 接收机(FM receiver with feedback，FMFB)，这是另外一种门限扩展技术。FMFB 的接收机通过降低 FM 鉴频器输入端 FM 信号的调频指数来实现门限扩展，即 $\tilde{e}(t)$ 的调频指数比 $v_{\text{in}}(t)$ 小，我们将证明这一点。于是其门限将比图 7.24 中的门限要低。精确计算 FMFB 接收机的门限扩展值有些棘手[Taub 和 Schilling，1986]。然而，我们很容易证明 FMFB 技术的确减小了鉴频器输入端的调频信号的调频参数。参照图 7.25，得到接收机输入端 FM 信号为

$$v_{\text{in}}(t) = A_c \cos[\omega_c t + \theta_i(t)]$$

其中，

$$\theta_i(t) = D_f \int_{-\infty}^{t} m(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$$

VCO 的输出为

$$v_0(t) = A_0 \cos[\omega_0 t + \theta_0(t)]$$

其中，

$$\theta_0(t) = D_v \int_{-\infty}^{t} \widetilde{m}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$$

应用 $v_{\text{in}}(t)$ 和 $v_0(t)$ 的这些表达式，我们得到乘法器的输出为

$$\begin{aligned} e(t) &= A_c A_0 \cos[\omega_c t + \theta_i(t)] \cos[\omega_0 t + \theta_0(t)] \\ &= \frac{1}{2} A_c A_0 \cos[(\omega_c - \omega_0)t + \theta_i(t) - \theta_0(t)] \\ &\quad + \frac{1}{2} A_c A_0 \cos[(\omega_c + \omega_0)t + \theta_i(t) + \theta_0(t)] \end{aligned}$$

如果中频滤波器的通带在中心频率 $f_{\text{if}} \triangleq f_c - f_0$ 附近，则中频输出为

$$\widetilde{e}(t) = \frac{A_c A_0}{2} \cos[\omega_{\text{if}} t + \theta_i(t) - \theta_0(t)] \tag{7.133a}$$

或者

$$\widetilde{e}(t)=\frac{A_cA_0}{2}\cos\left\{\omega_{\text{if}}t+\int_{-\infty}^{t}[D_f m(\lambda)-D_v\widetilde{m}(\lambda)]\,\mathrm{d}\lambda\right\}\tag{7.133b}$$

FM 鉴频器的输出与相位的导数成正比：

$$\widetilde{m}(t)=\frac{K}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\left\{\int_{-\infty}^{t}[D_f m(\lambda)-D_v\widetilde{m}(\lambda)]\,\mathrm{d}\lambda\right\}}{\mathrm{d}t}$$

计算导数及求解 $\widetilde{m}(t)$ 的最终方程，得到：

$$\widetilde{m}(t)=\left(\frac{KD_f}{2\pi+KD_v}\right)m(t)$$

将 $\widetilde{m}(t)$ 的表达式代入式(7.133)，得到：

$$\widetilde{e}(t)=\frac{A_cA_0}{2}\cos\left[\omega_{\text{if}}t+\left(\frac{1}{1+(K/2\pi)D_v}\right)D_f\int_{-\infty}^{t}m(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\right]\tag{7.134}$$

这表明了 $\widetilde{e}(t)$ 的调频指数恰好是 $v_{\text{in}}(t)$ 的调频指数的 $1/[1+(K/2\pi)D_v]$ 倍。FMFB 接收机所能提供的门限扩展大约为 5 dB，而 PLL 约为 3 dB(均是与 FM 鉴频器的门限相比)。尽管这不是巨大的改进，但是对于工作于门限值附近的系统而言非常重要，如卫星通信系统。用门限扩展设备代替传统接收机的系统比应用双天线以获取 3 dB 增益的系统要便宜得多。其他门限扩展技术在[Klapper 和 Frankle，1972]一书中有介绍和分析。

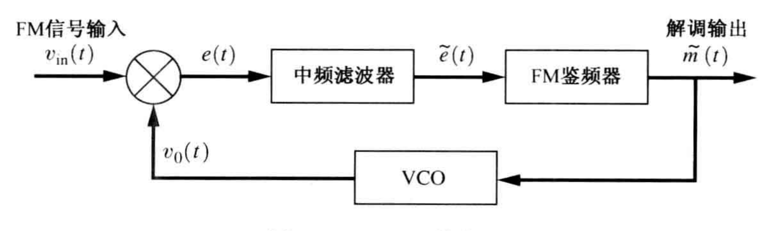


图 7.25　FMFB 接收机

7.8.9　去加重 FM 系统

FM 系统的噪声性能可以通过在发射机的输入端预加重调制信号的高频分量及在接收机的输出端去加重得以提高(如图 5.16 所示)。如图 7.23(b)所示，因为 FM 检测器输出端噪声的功率谱密度函数具有抛物线形状，所以其性能可以提高。

参照图 7.21，我们通过将去加重的特性加到 LPF 中去从而实现在接收机的去加重。假定 LPF 的传输函数在 B Hz 的消息频带上为

$$H(f)=\frac{1}{1+\mathrm{j}(f/f_1)}\tag{7.135}$$

对于标准的 FM 广播通信，使用了一个 75 μs 去加重滤波器，于是 $f_1=1/[(2\pi)(75\times10^{-6})]=2.1$ kHz。应用式(7.125)，得到采用去加重接收机的输出的噪声功率为

$$\overline{[\widetilde{n}_0(t)]^2}=\int_{-B}^{B}|H(f)|^2\mathcal{P}_{n_0}(f)\,\mathrm{d}f=\left(\frac{K}{A_c}\right)^2N_0\int_{-B}^{B}\left[\frac{1}{1+(f/f_1)^2}\right]f^2\,\mathrm{d}f$$

或者

$$\overline{[\widetilde{n}_0(t)]^2}=2\left(\frac{K}{A_c}\right)^2N_0f_1^3\left[\frac{B}{f_1}-\arctan\left(\frac{B}{f_1}\right)\right]\tag{7.136}$$

在典型的应用中，有 $B/f_1 \gg 1$，于是 $\arctan(B/f_1) \approx \pi/2$，与 B/f_1 相比，它可以忽略。于是式(7.136)变为当 $B/f_1 \gg 1$ 时，

$$\overline{[\widetilde{n}_0(t)]^2} = 2\left(\frac{K}{A_c}\right)^2 N_0 f_1^2 B \tag{7.137}$$

预加重-去加重系统的输出信号功率与没有使用预加重 - 去加重系统的功率相同。因为对于 $m(t)$ 而言，在 B Hz 的带宽上整个系统的频率响应是平坦的(常数)。① 于是由式(7.137)和式(7.124a)，我们得到输出 SNR 为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = \frac{\overline{s_0^2}}{\overline{\widetilde{n}_0^2}} = \frac{A_c^2[D_f/(2\pi f_1)]^2\overline{m^2}}{2N_0B}$$

另外，因为 $D_f/(2\pi B) = \beta_f/V_p$，于是输出 SNR 变为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = \frac{A_c^2\beta_f^2(B/f_1)^2\overline{(m/V_p)^2}}{2N_0B} \tag{7.138}$$

应用式(7.128)，得到输出信噪比与输入信噪比之比为

$$\frac{(S/N)_{\text{out}}}{(S/N)_{\text{in}}} = 2\beta_f^2(\beta_f + 1)\left(\frac{B}{f_1}\right)^2\overline{\left(\frac{m}{V_p}\right)^2} \tag{7.139}$$

其中，β_f 为 FM 指数，B 是基带调制电路的带宽，f_1 是去加重滤波器的 3 dB 带宽，V_p 是调制信号 $m(t)$ 的峰值，$\overline{(m/V_p)^2}$ 是 $m(t)/V_p$ 的均方根的平方。

将式(7.84)代入式(7.138)，得到以等效基带信噪比形式表示的输出信噪比：

$$\frac{(S/N)_{\text{out}}}{(S/N)_{\text{baseband}}} = \beta_f^2\left(\frac{B}{f_1}\right)^2\overline{\left(\frac{m}{V_p}\right)^2} \tag{7.140}$$

当 FM 系统中发送了一个正弦测试音时，$\overline{(m/V_p)^2} = \frac{1}{2}$ 并且式(7.140)变为

$$\frac{(S/N)_{\text{out}}}{(S/N)_{\text{baseband}}} = \frac{1}{2}\beta_f^2\left(\frac{B}{f_1}\right)^2 \quad (\text{正弦调制}) \tag{7.141}$$

当然，只有在接收机输入端的 FM 信号高于门限时上述结论才正确。

比较商用 FM 系统的噪声性能是很有趣的事。如表 5.4 所示，对于标准 FM 广播信道，$\beta_f = 5$，$B = 15$ kHz 和 $f_1 = 2.1$ kHz。将这些参数代入式(7.141)，得到如图 7.26 中实线所示的 FM 广播系统的噪声性能。但是对于没有采用预加重技术的同一系统，其性能如图中的虚线所示[由式(7.131)得到]。类似地，我们还给出了 $\beta_f = 1.67$，$B = 15$ kHz 和 $f_1 = 2.1$ kHz 的传统模拟 TV FM 伴音传输系统的性能。

图 7.26 也证明了应用去加重的 FM 系统的噪声性能比无去加重 FM 系统的性能要好得多。例如，对于 $(S/N)_{\text{baseband}} = 25$ dB 的标准 FM 广播系统 ($\beta_f = 5$，$B = 15$ kHz 和 $f_1 = 2.1$ kHz)，其性能要好 13.3 dB。

---

① 为了公平地比较应用和没有应用预加重的 FM 系统，其两个系统中峰值频移量 ΔF 的大小必须相同。对于典型的语音信号，预加重不能明显地增大 ΔF，因为信号 $m(t)$ 的低频分量占有很大的比重，因此这种分析是有效的。然而，如果 $m(t)$ 在整个语音信号的频带上具有扁平的频谱特性的话，则须降低预加重滤波器的增益，从而使应用和没有应用预加重的系统的频率偏差一致。在后一种情况下，应用预加重技术的系统所得到的性能上的改进比前一种要少。

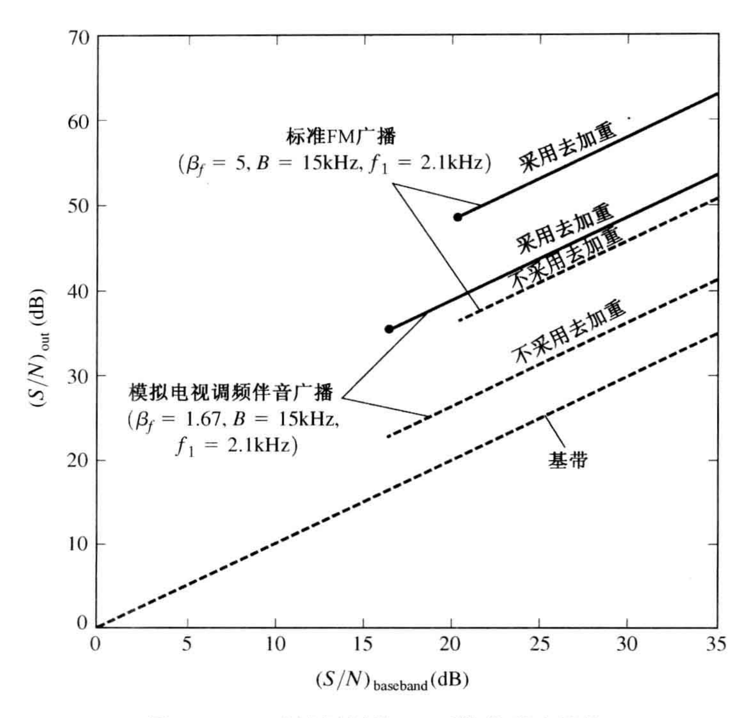


图 7.26　正弦波调制的 FM 系统的噪声性能

7.9　各类模拟信号系统的比较

表 7.2 比较了前几节中分析的模拟系统的性能。从表中可以看到，在输入信号高于门限的前提下，非线性调制系统的噪声性能具有较大的优越性。当然，噪声性能的改进是在使用较宽传输带宽的前提下获得的。如果输入 SNR 非常低，那么线性系统比非线性系统的性能要强。SSB 系统是具有最小传输带宽的系统，并且是在低输入 SNR 时具有最佳噪声特性的系统之一。

表 7.2　模拟信号技术的比较[a]

类型	线性	所需的传输带宽[b]	$(S/N)_{out}/(S/N)_{baseband}$		注释
基带	L	B	1	(7.84)	没有调制
AM	L[c]	$2B$	$\overline{m^2}/(1+\overline{m^2})$	(7.90)	采用相干检测时对所有 $(S/N)_{in}$ 成立；对高于门限的包络检测且 $\lvert m(t)\rvert\leqslant 1$ 正确
DSB-SC	L	$2B$	1	(7.98)	需要相干检测
SSB	L	B	1	(7.105)	需要相干检测；性能与基带系统相同
FM	NL	$2(\beta_f+1)B$	$\beta_p^2\,\overline{(m/V_p)^2}$	(7.120)	需要相干检测；$(S/N)_{in}$ 高于门限时成立
PM	NL	$2(\beta_p+1)B$	$3\beta_f^2\,\overline{(m/V_p)^2}$	(7.130)	$(S/N)_{in}$ 高于门限时成立
采用去加重的 FM	NL	$2(\beta_f+1)B$	$\beta_f^2\,(B/f_1)^2\,\overline{(m/V_p)^2}$	(7.140)	$(S/N)_{in}$ 高于门限时成立
PCM	NL	d	$M^2/(S/N)_{baseband}$	(7.82)	$(S/N)_{in}$ 高于门限时成立(即 $P_e\to 0$)

a. B 为调制信号的绝对带宽；f_1 为去加重信号的 3 dB 带宽；L 为线性；$m=m(t)$ 是调制信号；$M=2^n$ 为量化台阶数，其中 n 是 PCM 字的比特数；NL 为非线性；V_p 为 $m(ct)$ 的峰值；β_p 为 PM 调制指数；β_f 为 FM 调制指数。

b. ITU 规定的典型带宽大于这些最小值[Jordan, 1985]。

c. 严格意义上说，因为载波项的缘故，AM 信号不是线性的(见表 4.1)。

d. 带宽取决于所使用的数字系统的类型(例如，OOK 和 FSK)。

选取某一特定系统的主要依据为可允许的传输带宽和可得到的接收机输入信噪比。对这些系统噪声性能的比较如图 7.27 所示，其中，$V_p = 1$ 及 $\overline{m^2} = \dfrac{1}{2}$。我们选择了一个带宽扩展比为 $B_T/B = 12$ 的非线性系统用于比较，这对应于图中标注的 $\beta_f = 5$ 的 FM 系统和相应的 FM 商业广播系统。

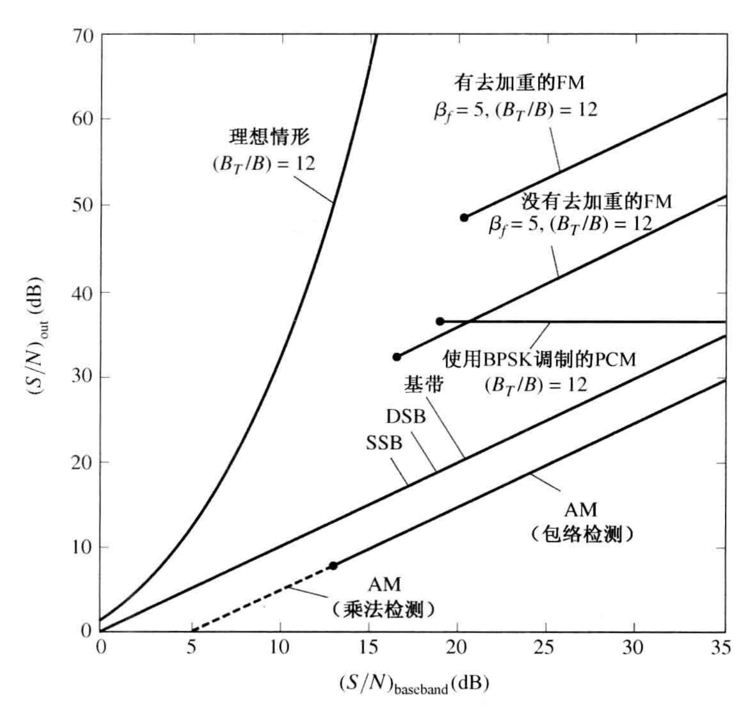


图 7.27　模拟系统噪声性能的比较

注意，除了在 AM 系统中“浪费”了载波功率以外，所有线性调制方法具有与基带系统相同的 SNR(SSB 系统具有与 DSB 系统相同的性能，因为 DSB 系统中的两个相干的边带补偿了 SSB 系统中由于带宽减小而只具有一半的噪声功率)。这些比较都是在信号具有相同的平均功率的基础上进行的。如果比较是在等峰值功率的基础上进行的(即信号具有相同的峰值功率)，那么 SSB 调制的输出信噪比要比 DSB 高 3 dB，而与 100% 调制的 AM 调制相比要高 9 dB(如习题 7.34所述)。当然，如果信号功率高于门限，所有非线性系统具有比线性调制系统更好的 SNR 性能，这是因为非线性系统具有更大的传输带宽。

7.9.1　理想系统的性能

什么是理论上可达到的最佳噪声性能呢？如何应用宽传输频带获得改进的噪声性能呢？香农的信道容量定理回答了这个问题。理想系统被定义为检测过程中不减小信道容量的系统。于是，

$$C_{\text{in}} = C_{\text{out}} \tag{7.142}$$

其中，C_{in} 是带通信道的容量，C_{out} 是检测后的信道容量。将式(1.10)代入式(7.142)，得到：

$$B_T \log_2[1 + (S/N)_{\text{in}}] = B \log_2[1 + (S/N)_{\text{out}}] \tag{7.143}$$

其中，B_T 是接收机输入端带通信号的传输带宽，B 是接收机输出端基带信号的传输带宽。求解

$(S/N)_{\text{out}}$，得到：

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = \left[1 + \left(\frac{S}{N}\right)_{\text{in}}\right]^{B_T/B} - 1 \tag{7.144}$$

但是

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{in}} = \frac{P_s}{N_0 B_T} = \left(\frac{P_s}{N_0 B}\right)\left(\frac{B}{B_T}\right) = \left(\frac{B}{B_T}\right)\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{baseband}} \tag{7.145}$$

其中应用了式(7.84)的结论。于是式(7.144)变为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = \left[1 + \left(\frac{B}{B_T}\right)\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{baseband}}\right]^{B_T/B} - 1 \tag{7.146}$$

描述理想系统性能的式(7.146)，其对应于 $B_T/B = 12$ 的情形如图 7.27 所示。众所周知，所有实际信号系统的性能均未能达到理想系统的性能，然而一些非线性系统(在门限值附近)接近于理想系统的性能。

7.10 小结

在 7.6 节中，我们总结了数字通信系统的性能，而在 7.9 节中总结了模拟通信系统的性能。读者们可以通过回顾相关内容达到对本章总结的目的。然而，为了精简这些章节，我们声明不存在任何情况下都能提供最优解的“最佳系统”。所需系统的噪声性能、所需的传输带宽、用不同的电信号的状态承载不同的信息等都是我们选定某一通信系统而不选择另一系统的依据。另外，我们分析的是在加性高斯白噪声信道中各种通信系统的性能，对于服从其他分布的噪声和乘性噪声，将会有不同的结论。

7.11 助学例题

SA7.1 Brickwall LPF 接收机的误码率 参考 7.2 节和图 7.4(a)和(b)，令使用 LPF 低通滤波器的接收机的输入为单极性信号加高斯白噪声。应用推导式(7.24a)时所做的假设，可以证明采用 LPF (非最优匹配滤波器)的接收机，其输出数据的误码率为 $P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2}{4N_0B}}\right)$，其中，$A$ 是单极性信号的峰值，$N_0/2$ 是噪声功率谱密度，B 是 LPF 的等效带宽。在得到这个结论的过程中，假定 LPF 的等效带宽满足 $B > 2T$，则可近似认为当发送二进制数据 1 时，滤波后的样本值 $s_{01}(t_0)$ 为 A，其中 T 是在发送数据 1 时传输的方波脉冲的带宽，$R = 1/T$ 是数据速率。如果接收机采用理想的 LPF(即 Brickwall LPF)，其传输函数为

$$H(f) = \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) \tag{7.147}$$

证明：当 $B \geq 2/T$ 时，$s_{01}(t_0) \approx A$ 成立。

解： 用 MATLAB 求得的解示于图 7.28 中。图 7.28(a)所示为未经滤波的方波脉冲，其幅度 $A = 1$、宽度 $T = 1$。图 7.28(b)、图 7.28(c)和图 7.28(d)所示的脉冲是 Brickwall LPF 的带宽分别为 $B = 1/T$, $B = 2/T$ 或 $B = 3/T$ 时滤波后的波形。对于 $B \geq 2/T$，当采样时刻位于各比特的中间时刻时，可以看到样本值近似为 A，其中 $A = 1$。我们还可以看到当 $B \geq 2/T$ 时，码间串扰可以忽略。此外，如图 7.28(b)所示，对于 $B = 1/T$，有 $s_{01}(t_0) \approx 1.2 \cdot 1 = 1.2A$。于是，我们倾向于在误码率公式中采用 $s_{01}(t_0) \approx 1.2A$ (这将得到一个较低的 BER)以及选定等效带宽为 $B = 1/T$。然而如果这样做的话，当 $B > 1/T$ 时，误码率公

式将不正确。另外（如助学例题 SA7.2 中所述）如果采用 RC LPF（代替 brickwall LPF，因为其在实际系统中很难实现），对于 $B = 1/T$，我们将得不到 $s_{01}(t_0) = 1.2A$，即如果用 $s_{01}(t_0) = 1.2A$ 来获得误码率公式，那么误码率公式对于 RC LPF 是不正确的。于是，式(7.24a)，其中假定当 $B \geq 2/T$ 时 $s_{01}(t_0) \approx A$，对于在实际系统中应用的任何 LPF 都近似正确。此外，如果对某一特定的滤波器 $s_{01}(t_0)$ 不为 A，那么仅需在式(7.24a)中用正确的样本替换 $A = 1$，就可以得到精确的结论（即不是近似值）。

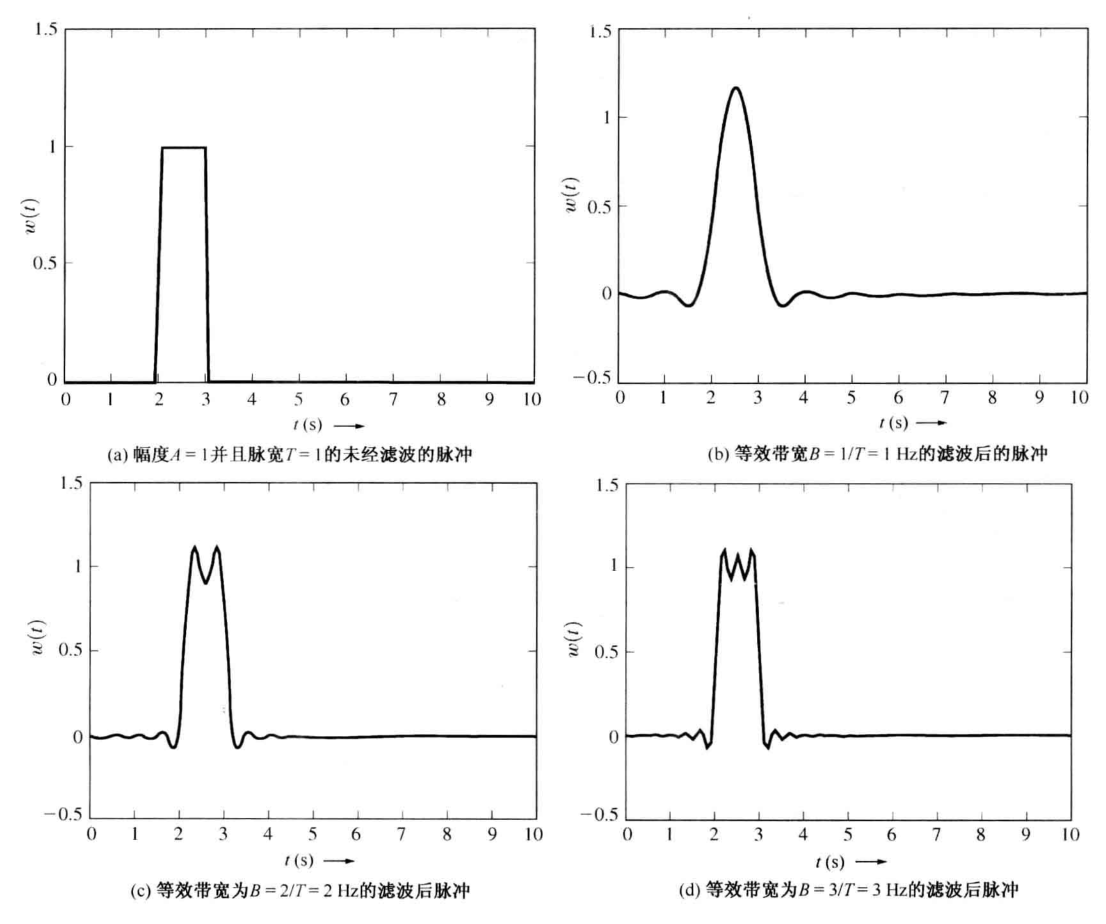


图 7.28　助学例题 SA7.1 的解表明了 Brickwall 低通滤波器的影响（见 M 文件 SA7_1.m）

SA7.2　RC LPF 接收机的 BER　重做助学例题 SA7.1，此时 LPF 为 RC 滤波器且其频率响应应为

$$H(f) = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\left(\frac{f}{B_{3\mathrm{dB}}}\right)} \tag{7.148}$$

其中，$B_{3\,\mathrm{dB}} = 1/(2\pi RC)$。注意，应用式(6.104)，我们可得到 RC LPF 的等效带宽为 $B = (\pi/2)B_{3\,\mathrm{dB}}$。

解： MATLAB 的解如图 7.29 所示。图 7.29(a)给出了幅度 $A = 1$、脉宽 $T = 1$ 时的未经滤波的方波脉冲。图 7.29(b)、(c)和(d)分别给出了当 RC LPF 的等效带宽分别为 $B = 1/T$、$B = 2/T$ 或 $B = 3/T$ 时滤波后的脉冲。若 $B = 1/T$，仅当采样时刻 t_0 精确地位于脉冲终点附近，即滤波后的脉冲达到最大值的时刻时，$s_{01}(t_0) = 1 = A$。这要求使用精确的比特同步器。对于 $B \geq 2/T$，可以看到 $s_{01}(t_0) = 1 = A$，采样时刻 t_0 也不需要很严格，因为在各比特持续的时间上，滤波后的脉冲基本上是平坦的。当 $B \geq 2/T$ 时，ISI 可以忽略，即习题 7.9(d)的解表明在最坏的情况下，信号与码间串扰之比为 70 dB。于是，式(7.24a)［假定当 $B \geq 2/T$ 时有 $s_{01}(t_0) \approx A$］得以成立。

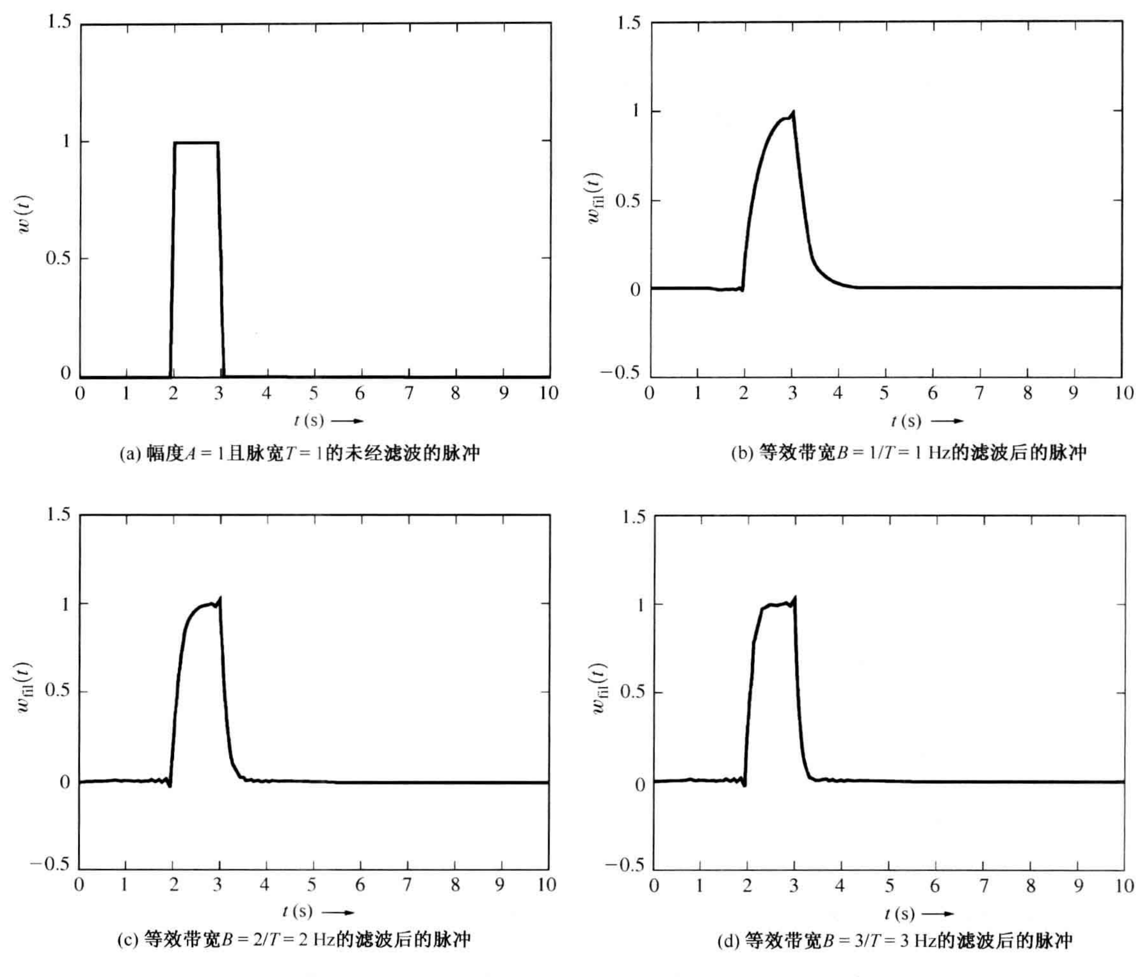


图 7.29 助学例题 SA7.2 的解表明了 RC 低通滤波器影响(见 M 文件 SA7_2.m)

SA7.3 MF 接收机和 RC 接收机的误码率比较 比较采用 RC 低通滤波器的数字接收机与采用匹配滤波器(Matched Filter, MF)的数字接收机的误码性能。针对图 7.4(a),令接收机的输入为单极性信号加高斯白噪声。假定单极性信号的速率为 $R = 9600$ bps,其峰值为 $A = 5$,噪声的功率谱密度为 $\mathcal{P}_n(f) = 3 \times 10^{-5}$。

(a) 如果接收机滤波器为 RC LPF,且其等效带宽为 $B = 2/T = 2R$。分析当噪声带宽为 RC LPF 的等效带宽时,RC 滤波器输入的 SNR 及接收机输出数据的 BER。

(b) 令 $B = 1/T = R$,重做(a)。

(c) 如果接收机为 MF 接收机,计算当噪声带宽为 MF 的等效带宽时,MF 的输入 SNR 及计算接收机输出数据的 BER。

(d) 比较采用 MF 接收机及 RC LPF 接收机的误码性能。

解: 接收机输入端信号的每比特平均能量为 $E_b = (A^2/2)T = A^2/(2R)$。$\mathcal{P}_n(f) = N_0/2 = 3 \times 10^{-5}$,故 $N_0 = 6 \times 10^{-5}$。于是,

$$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{\text{dB}} = 10 \log\left(\frac{A^2}{2N_0R}\right) = 10 \log\left(\frac{(5)^2}{2(6 \times 10^{-5})(9600)}\right) = 13.4 \text{ dB} \tag{7.149}$$

(a) 当使用带宽为 $B = 2/T = 2R$ 的 RC LPF 的接收机时,在带宽为 B 的频带内的噪声功率为 $P_n = (N_0/2)(2B)$。信号或噪声的均方根电压与平均功率的关系为 $V_{\text{RMS}}^2 = \overline{v^2(t)} = P$。因为输入信号的

平均功率为 $P_s = A^2/2$，接收机输入端信号的 RMS 电压为

$$V_s = \sqrt{A^2/2} = A/\sqrt{2} \doteq 5/\sqrt{2} = 3.54 \text{ V (RMS信号)}$$

接收机输入端的 rms 噪声电压(在 $2R$ 的带宽内测量)为

$$V_n = \sqrt{\frac{N_0}{2}(2B)} = \sqrt{2N_0R} = \sqrt{2(6\times10^{-5})(9600)} = 1.07 \text{ V (RMS噪声)}$$

于是，输入 SNR 为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{dB}} = 20\log\left(\frac{V_s}{V_n}\right) = 20\log\left(\frac{3.54}{1.04}\right) = 10.4 \text{ dB}$$

同时，通过应用下式得到 SNR：

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{dB}} = 10\log\left(\frac{P_s}{P_n}\right) = 10\log\left(\frac{A^2}{2N_0B}\right) \tag{7.150}$$

当 $B = 2/T = 2R$ 时，有

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{dB}} = 10\log\left(\frac{A^2}{4N_0R}\right) = 10.4 \text{ dB}$$

对于 RC LPF，应用式(7.24a)就得到误比特率，其中 $s_{01}(t_0) \approx A$ 和 $B = 2/T = 2R$。于是，我们得到：

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2}{8N_0R}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{(5)^2}{8(6\times10^{-5})(9600)}}\right) = 9.9\times10^{-3}$$

(b)对于 $B = 1/T = R$ 的 RC LPF 接收机，接收机输入端的 RMS 噪声电压(在带宽为 R 的频带内测量)为

$$V_n = \sqrt{\frac{N_0}{2}(2B)} = \sqrt{N_0R} = \sqrt{(6\times10^{-5})(9600)} = 0.76 \text{ V RMS噪声}$$

于是，输入 SNR 为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{dB}} = 20\log\left(\frac{V_s}{V_n}\right) = 20\log\left(\frac{3.54}{0.76}\right) = 13.4 \text{ dB}$$

同时，对 $B = R$，应用式(7.150)，我们得到：

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{dB}} = 10\log\left(\frac{A^2}{2N_0R}\right) = 13.4 \text{ dB}$$

对 $B = 1/T = R$，应用式(7.24a)可得误码率。故我们得到：

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2}{4N_0R}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{(5)^2}{4(6\times10^{-5})(9600)}}\right) = 4.9\times10^{-4}$$

(c)为了得到 MF 接收机的 SNR，首先需要计算 MF 的等效带宽。应用式(6.155)，我们得到匹配于方波脉冲 $s(t) = 5\Pi(t/T)$ 的匹配滤波器的传输函数为

$$H(f) = K\frac{S^*(f)}{\mathcal{P}_n(f)}\text{e}^{-\text{j}\omega t_0} = CT\left(\frac{\sin\pi Tf}{\pi Tf}\right)\text{e}^{-\text{j}\omega t_0}$$

其中，$C = 5K/(N_0/2)$。从式(2.192)，得到 MF 的等效带宽为

$$B = \frac{1}{|H(0)|^2}\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2\text{d}f = \int_0^{\infty}\left(\frac{\sin\pi Tf}{\pi Tf}\right)^2\text{d}f$$

为了计算积分值，做一次变量代换。令 $x = \pi Tf$，于是借助于附录 A，我们得到：

$$B = \frac{1}{\pi T}\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\text{d}x = \left(\frac{1}{\pi T}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2T} = \frac{1}{2}R \tag{7.151}$$

于是，接收机输入端 RMS 噪声电压(在带宽为 $B = R/2$ 的频带内测量)为

$$V_n = \sqrt{\frac{N_0}{2}(2B)} = \sqrt{N_0R/2} = \sqrt{6(\times 10^{-5})(9600)/2} = 0.54\,\text{V}\ (\text{RMS噪声})$$

如前面所得，RMS 信号电压为 $V_s = 3.54$ V。于是，输入 SNR 为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{dB}} = 20\log\left(\frac{V_s}{V_n}\right) = 20\log\left(\frac{3.54}{0.54}\right) = 16.4\ \text{dB}$$

同时，对 $B = R/2$，应用式(7.150)，我们得到：

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{dB}} = 10\log\left(\frac{A_2}{N_0R}\right) = 16.4\ \text{dB}$$

应用式(7.24b)，就可得到误码率为

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{A^2T}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{A^2}{2N_0R}}\right)$$

$$= Q\left(\sqrt{\frac{(5)^2}{2(6\times 10^{-5})(9600)}}\right) = 1.6\times 10^{-6}$$

应用图 7.14 可以验证 $(E_b/N_0)_{\text{dB}} = 13.4$ dB 时单极性信号的误码率。

(d) 如对助学例题 SA7.2 的求解中所讨论的那样，如果用的是价格便宜、$B = 2R$ 的 RC LPF，那么对于接收机而言，一个价格便宜的比特同步器就足够了(不需要非常精确的采样时间)。如(a)中所述，其误码率为 9.9×10^{-3}。

如果需要稍好一点的性能(即低误码率)，LPF 的带宽可减少为 $B = R$，则需要一个精确(更昂贵)的比特同步器。如(b)中所述，这使误码率降低为 4.9×10^{-4}。

如需要更好的性能，则需要用匹配滤波器(比 LPF 昂贵得多)，这可以通过用如图 6.17 所示的一个积分器和清零器来实现。匹配滤波器需要比特同步时钟以提供积分器和清零器的复位时钟。匹配滤波接收机得到最优的误码性能。如(c)中所述，在这种情况下，BER 减小为 1.6×10^{-6}。然而在一些实际应用如光纤系统中，噪声可以忽略。在这种情况下，一个简单[如(a)中所描述]的带宽为 $B = 2/T = 2R$ 的 LPF 就足够了，因为此时误码率趋于零。


SA7.4 预加重 FM 系统输出信噪比的提高 在 FM 系统中，经常在发射机的输入端使用预加重调制和接收机输出端使用去加重以提高输出 SNR。对于 75 μs 加重，接收机去加重 LPF 的 3 dB 拐角频率为 $f_1 = 1/(2\pi 75\ \mu\text{s}) = 2.12$ kHz，音频的带宽为 $B = 15$ kHz。试求与无预加重-去加重 FM 系统相比，采用预加重-去加重的 FM 系统的 SNR 改善的公式 I_{dB}，并计算当 $f_1 = 2.12$ kHz 和 $B = 15$ kHz 时的 I_{dB} 值。

解：参考式(7.121)~式(7.127)推导无去加重的 FM 系统输出信噪比的公式以及参考式(7.135)~式(7.138)推导采用去加重的 FM 系统的输出信噪比的公式。于是有

$$I = \frac{(S/N)_{\text{有加重}}}{(S/N)_{\text{无加重}}} = \frac{\left(\dfrac{\overline{s_0^2}}{\overline{n_0^2}}\right)_{\text{有加重}}}{\left(\dfrac{\overline{s_0^2}}{\overline{n_0^2}}\right)_{\text{无加重}}} \tag{7.152}$$

从 5.6 节及图 5.15 可以看到，包含两个滤波器——接收机的去加重滤波器 $H_d(f)$ 和发射机的预加重滤波器 $H_p(f)$ ——对输出音频信号 $s_0(t)$ 的频率响应的整体效果无影响，因为在带宽为 B 的整个音频频带上，$H_d(f)H_d(f) = 1$，其中 $B < f_2$。于是，有 $(\overline{s_0^2})_{\text{有加重}} = (\overline{s_0^2})_{\text{无加重}}$，式(7.152)简化为

$$I = \frac{(\overline{n_0^2})_{\text{有加重}}}{(\overline{n_0^2})_{\text{无加重}}} \tag{7.153}$$

与未采用去加重系统的接收机相比，采用去加重的接收机的输出噪声是不同的，这是因为去加重滤波

器衰减了位于音频的高频段的噪声(发射机预加重滤波器对于接收噪声无影响)。对 $(\overline{n_0^2})_{无加重}$ 应用式(7.126)并且对 $(\overline{n_0^2})_{有加重}$ 应用式(7.136)，我们看到式(7.153)变为

$$I = \frac{\frac{2}{3}\left(\frac{K}{A_c}\right)^2 N_0 B^3}{2\left(\frac{K}{A_c}\right)^2 N_0 f_1^3\left[\frac{B}{f_1} - \arctan\left(\frac{B}{f_1}\right)\right]}$$

或者

$$I = \frac{B^3}{3f_1^3\left[\frac{B}{f_1} - \arctan\left(\frac{B}{f_1}\right)\right]} \tag{7.154}$$

因为 $I_{dB} = 10\log(I)$，我们得到：

$$I_{dB} = 30\log\left(\frac{B}{f_1}\right) - 10\log\left\{3\left[\frac{B}{f_1} - \arctan\left(\frac{B}{f_1}\right)\right]\right\} \tag{7.155}$$

对于 $f_1 = 2.12$ kHz 和 $B = 15$ kHz，计算式(7.155)得到：

$$I_{dB} = 13.2 \text{ dB}$$

这检验了从图 7.26 得到的 I_{dB} 的值。

习题

★7.1　在一个二元通信系统中接收机的统计检验量 $r_0(t_0) = r_0$ 由极性信号加噪声组成。极性信号的值为 $s_{01} = +A$ 和 $s_{02} = -A$。假定噪声服从拉普拉斯分布：

$$f(n_0) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_0} e^{-\sqrt{2}|n_0|/\sigma_0}$$

其中，σ_0 是噪声的 RMS 值。

(a) 当信号服从等概分布时，试求作为 A/σ_0 函数的误码率 P_e 及最优门限 V_T。

(b) 画出作为 A/σ_0 (以分贝为单位)函数的 P_e。将结果与由式(7.26a)给出的对应于高斯噪声时的误码率进行比较。

7.2　借用 MATLAB 工具，画出 $\sigma_0 = 1$ 时拉普拉斯分布(见习题 7.1)的 PDF。同时画出均值为 0、标准差为 1 的高斯分布的 PDF 曲线。将两者加以比较。

7.3　应用式(7.8)，证明对应于对称极性信号加高斯白噪声情况下最优门限为

$$V_T = \frac{\sigma_0^2}{2s_{01}} \ln\left[\frac{P(\text{发送 } s_2)}{P(\text{发送 } s_1)}\right]$$

其中，接收滤波器输出信号的方差为 σ_0^2，s_{01} 是二进制信号 1 在滤波器输出端的样本值，P(发送 s_1)和 P(发送 s_2)分别是发送二进制信号 1 和 0 的概率。

7.4　有一个采用匹配滤波接收机接收极性信号的基带数字通信系统。发送二进制信号 1 的概率为 p，发送二进制信号 0 的概率为 $1-p$。

(a) 对于 $E_b/N_0 = 10$ dB，按对数坐标画出以 p 为自变量的函数 P_e。

(b) 参考式(1.8)，画出作为 p 的函数的熵 H，并比较两条曲线的形状。

7.5　如图 P7.5 所示，整个二进制通信系统可以看成一个信息信道。求解 4 个转移概率 $P(\tilde{m} \mid m)$，其中，$\tilde{m}$ 和 m 均为数据 0 或 1。假定统计检验是接收机输入的线性函数并且接收机的输入噪声为加性高斯噪声。提示：参考式(7.15)。

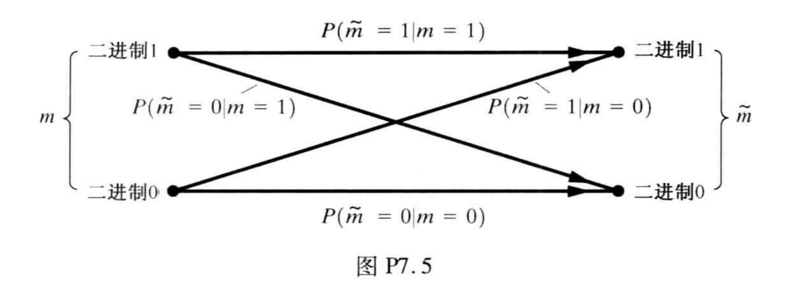


图 P7.5

★7.6 有这样一个应用匹配滤波器检测单极性信号的基带数据通信系统，其数据速率为 $R=9600$ bps。

(a) 求以 $(S/N)_{\text{in}}$ 为自变量的误码率 P_e 的表达式。$(S/N)_{\text{in}}$ 是接收机的输入信噪比，其中噪声是在匹配滤波器的等效带宽内测量的。提示：首先求得以 $(S/N)_{\text{in}}$ 为变量的 E_b/N_0 的表达式。

(b) 画出 P_e 与以 dB 为单位的 $(S/N)_{\text{in}}$ 的对数坐标图，且 $(S/N)_{\text{in}}$ 的变化范围是 0 ~ 15 dB。

7.7 当信号为极性信号时重做习题 7.6。

7.8 验证接收机滤波器是如何影响其基带数字通信系统性能的，式(7.26a)描述了采用低通滤波器且滤波器的带宽是足够宽，滤波器的输出为 $s_{01}=+A$ 或 $s_{02}=-A$ 时的误码率。取而代之，假定使用 RC 低通滤波器具有严格限定的带宽，其中 $T=1/f_0=2\pi RC$。T 是 1 比特的信号时间间隔(脉宽)，f_0 是如式(2.147)描述的 RC 低通滤波器的 3 dB 带宽。假定在每比特间隔的开始滤波器的初始状态复位为 0。

(a)求以 E_b/N_0 表示的误码率 P_e。

(b)以对数坐标画出当 E_b/N_0 从 0 变化到 15 dB 时的误码率。

(c)将这些结果与匹配滤波接收机相比较(如图 7.5 所示)。

★7.9 考虑应用极性信号(方波脉冲)的基带数字通信系统，其接收机如图 7.4(a)所示。假定接收机是一个 3 dB 带宽为 f_0 的二阶巴特沃思滤波器，滤波器的脉冲响应和传输函数为

$$h(t)=\left[\sqrt{2}\omega_0\,\mathrm{e}^{-(\omega_0/\sqrt{2})t}\sin\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}t\right)\right]u(t)$$

$$H(f)=\frac{1}{(\mathrm{j}f/f_0)^2+\sqrt{2}(\mathrm{j}f/f_0)+1}$$

其中，$\omega_0=2\pi f_0$。令 $f_0=1/T$，其中 T 是 1 比特的时间间隔(即脉宽)，假定在每比特间隔的起始时刻，滤波器都复位为零。

(a)求以 E_b/N_0 为自变量的函数 P_e。

(b)以对数坐标画出当 E_b/N_0 在 0 ~ 15 dB 之间变化时的误码率。

(c)与匹配滤波接收机的结果进行比较(如图 7.5 所示)。

7.10 考虑一个信号等概分布的单极性基带通信系统。假定接收机为一个"简单"的 RC LPF，其时间常数为 $RC=\tau$，其中 $\tau=T$，$1/T$ 是比特速率("简单"的意思就是在每比特间隔的起始点，LPF 不用复位为零)。

(a)对于接收机输入端仅有信号的情形，分析在 $t=t_0=nT$ 的采样时刻，LPF 输出的最小信号与 ISI 之比(以 dB 为单位)，其中 n 是常数。

(b)分析作为参数 K 的函数的信号与 ISI 之比，其中 $t=t_0=(n+K)T$，$0<K\leqslant 1$。

(c)使滤波器输出的信号与 ISI 功率比最大的最优采样时刻是多少?

(d)当 RC LPF 的带宽为 $2/T$ 时，重做(a)。

7.11 验证采用具有等概分布的单极性信号且无信道噪声的基带系统的性能。假定接收机采用了一个时间常数 $\tau=RC$ 的"简单"的 RC LPF 接收机("简单"的意思就是在每比特间隔的起始点，LPF 的初始状态不用复位为零)。计算在最差的情况下，采样时刻 $t=t_0=nT$ 时，滤波器输出的信

号与ISI之比(用dB表示)，其中n为整数。这个近似的结果当$T/\tau > \frac{1}{2}$时都是正确的。画出当T/τ在$\frac{1}{2} \leqslant T/\tau \leqslant 5$上变化时的函数图形。

★7.12 考虑习题7.10(d)中的单极性基带通信系统，假定接收机的输入噪声为高斯白噪声。

(a)对于在$t = t_0 = nT$的采样时刻，求以E_b/N_0为自变量的函数P_e的表达式。

(b)将(a)中的误码率与匹配滤波接收机的误码率进行比较，画出当$(E_b/N_0)_{dB}$从0变化到15 dB时这两条误码率的曲线。

7.13 对于基带极性信号系统重做习题7.12。

7.14 对于双极性信号，式(7.28)的推导过程意味着接收机最优门限值为$V_T = \frac{A}{2} + \frac{\sigma_0^2}{A}\ln 2$。

(a)证明这是最优门限值。

(b)证明当$P_e < 10^{-3}$时，$A/2$与最优门限近似相等。

★7.15 对于式(7.23)所描述的单极性基带信号：

(a)求匹配滤波器的频率响应及证明可以通过采用积分-清零滤波器来实现匹配滤波的操作。

(b)证明匹配滤波的等效带宽为$B_{eq} = 1/(2T) = R/2$。

7.16 在基带通信系统中采用等概的极性信号。接收机的输入是PSD为$N_0/2$ W/Hz的高斯噪声加上峰值为A伏特的极性信号，接收机使用电压增益为1000的匹配电路。

(a)求以A、N_0、T和V_T为自变量的函数P_e的表达式。其中，$R = 1/T$为比特速率，V_T是门限值。

(b)当$A = 8 \times 10^{-3}$ V，$N_0/2 = 4 \times 10^{-9}$ W/Hz，$R = 1200$ bps时，画出作为V_T的函数的P_e曲线。

★7.17 考虑一个采用匹配滤波器检测的基带极性信号通信系统。假定信道噪声是PSD为$N_0/2$的高斯白噪声，发送1的概率为$P(1)$，发送0的概率为$P(0)$。当匹配滤波器输出信号电平为A，匹配滤波器输出噪声的方差为$\sigma^2 = N_0/(2T)$时，求作为门限电平V_T的函数的P_e的表达式，其中$R = 1/T$是比特速率。

7.18 设计一个检测峰值$A = 5$ V的双极性RZ信号的接收机。在设计中假定采用RC低通滤波器，且数据速率为2400 bps。

(a)画出设计的方框图并解释其工作原理。

(b)给出设计的参数R、C和V_T的值。

(c)计算噪声的PSD以满足$P_e < 10^{-6}$。

7.19 对于一个OOK信号通信系统，当比特率$R = 10$ Mbps时，要求BER在10^{-5}以下。接收机的输入为OOK信号加高斯白噪声。

(a)求所需的最小传输带宽。

(b)求采用相干匹配滤波接收时，所需的最小E_b/N_0。

(c)对于非相干检测重做(b)。

7.20 令$2\Delta F = f_2 - f_1 = 1.5R$，对于FSK信号重做习题7.19。

★7.21 在本章中BPSK接收机的误码率是在相干接收机参考量与BPSK信号完全相同(见图7.7)的情况下得到的。假定参考信号与接收到的BPSK信号有θ_e的相位误差。求作为θ_e及其他参数的函数的误码率P_e的表达式，并且

(a)求取代式(7.36)的新公式。

(b)求取代式(7.38)的新公式。

(c)针对(b)中的结论，画出作为θ_e函数的P_e的对数坐标图，其中θ_e的变化范围是$-\pi < \theta_e < \pi$，$E_b/N_0 = 10$ dB。

★7.22 数据在一个拥有九个转发器加一个接收机的通信系统中传输，信号为BPSK调制方式。对于每个转发器(见3.5节)，其误码率为5×10^{-8}。假定噪声为加性高斯噪声：

(a)求解整个系统的 P_e。

(b)如果每个转发器都被一个理想放大器(无噪声或失真)代替,求整个系统的 P_e。

★7.23 在一个的长途电话系统中用 BPSK 方式传输数字信号,系统中每隔 50 英里放置一个再生转发器。整个系统的长度为 600 英里。再生转发器之间的电话线在 300 ~ 2700 Hz 频段上的特性得到均衡,转发器输入的 E_b/N_0 (高斯噪声)为 15 dB。

(a)求无 ISI 时的最大比特率 R。

(b)求系统的 P_e (确定包括系统终点的接收机)。

7.24 一个 BPSK 信号由下式给出:

$$s(t) = A\sin[\omega_c t + \theta_c + (\pm 1)\beta_p],\quad 0 < t \leqslant T$$

二进制数据用 ±1 来表示,其中 +1 对应发送数据 1,-1 对应发送数据 0,β_p 是由式(5.47)定义的调相指数。

(a)当 $\beta_p = \pi/2$ 时,证明这个 BPSK 信号就变为式(7.34)所描述的 BPSK 信号。

(b)当 $0 < \beta_p < \pi/2$ 时,证明与式(7.34)描述的 BPSK 信号相比多了一个离散的载波项。

7.25 参照习题 7.24 所示的 BPSK 信号,求作为调制参数 β_p 的函数的 P_e,其中 $0 < \beta_p \leqslant \pi/2$。采用窄带滤波器的接收机时,求作为 A、β_p、B 和 N_0 函数的 P_e。

7.26 重做习题 7.25,求采用匹配滤波器的接收机以 E_b、N_0 和 β_p 为自变量的函数 P_e (E_b 是接收到的 1 比特BPSK 信号的平均功率)。

7.27 参考习题 7.24 中所描述的 BPSK 信号,令 $0 < \beta_p < \pi/2$。

(a)画出 BPSK 信号检测的方框图,其中 PLL 用于从 BPSK 信号中提取相干检测的参考信号。

(b)解释(a)中为什么当接收机采用 PLL 恢复载波时常用曼彻斯特型编码(提示:看一看曼彻斯特编码 PSK 信号的频谱)。

7.28 为得到相干接收 FSK 信号的误码率 P_e,需要知道差分信号 E_d 的能量,如式(7.46)所示,对于正交 FSK 信号,互相关积分为 0,假定 f_1、f_2 和 T 选定得使 E_d 最大。

(a)试求使 E_d 最大的 f_1、f_2 和 T 的函数关系。

(b)试求使用这个 FSK 信号时作为 E_b 和 N_0 函数的 P_e。

(c)画出这类 FSK 信号的误码率曲线 P_e,并且比较由式(7.47)得到的正交 FSK 信号的误码率曲线。

★7.29 一个 R = 110 bps 的 FSK 信号在高斯白噪声 RF 信道上传输,接收机为非相干接收机,并且其噪声系数为 6 dB。接收机输入天线的阻抗为 50 Ω,接收机输入的信号电平为 0.05 μV,噪声电平为 $N_0 = kT_0$,其中 T_0 = 290 K,k 为玻尔兹曼常数(见 8.6 节)。求接收机输出数字信号的误码率 P_e。

7.30 对于 DPSK 信号重做习题 7.29。

7.31 在式(7.44)前分析了 FSK 接收机两个信道中的噪声。该分析表明 $n_1(t)$ 和 $n_2(t)$ 产生于同一个高斯噪声过程,但因为 $n_1(t)$ 与 $n_2(t)$ 无重叠的频谱,所以 $n_1(t)$ 与 $n_2(t)$ 相互独立。证明上述结论正确(提示:$n_1(t)$ 和 $n_2(t)$ 可以看成对于同一白噪声 $n(t)$ 的两个无重叠传递函数的线性滤波器的输出)。

7.32 在很多应用中通信系统的误码率设计成10^{-5}或更低。对下述信号寻找达到10^{-5}误码率的最小 E_b/N_0。

(a)极性基带信号。

(b)OOK。

(c)BPSK。

(d)FSK。

(e)DPSK。

★7.33　在电话线信道上传输数字数据。假定对电话线 300 ~ 2700 Hz 的频段进行了均衡，且其输出信号与高斯噪声功率比为 25 dB。

(a) 在本章研究的所有数字信号技术中，选择满足10^{-5}误码率的最大传输速率的系统，并求该系统的比特率 R。

(b) 将该结果与式(1.10)(香农信道容量公式)描述的理想数字信号方案的比特率 R 进行比较。

★7.34　一个带宽为 3500 Hz 的模拟基带信号具有均匀分布的 PDF，其信号以每秒 8 个样本的速率采样，均匀量化，并被编码成 8 比特的 PCM 信号。该 PCM 信号在有加性高斯白噪声的 DPSK 系统中传输。接收机输入信噪比为 8 dB。

(a) 求恢复后的 PCM 信号的 P_e。

(b) 求 PCM 系统输出的峰值信噪比。

7.35　扩频(Spread Spectrum，SS)信号经常用于抗窄带干扰和保密通信。采用直接序列扩频的信号(见 5.13 节)为

$$s(t) = A_c c(t) m(t) \cos(\omega_c t + \theta_c)$$

其中，θ_c 为初始载波相位，$m(t)$ 为基带调制二进制极性数据，$c(t)$ 为在通常情况下由 PN 序列构成的极性基带扩频波形。PN 码为 N 比特长的二进制序列。这里"比特"称为码片，因为它们没有包含数据，并且因为在传输 1 比特数据(在 $m(t)$)的时间内传送了很多码片。相同 N 比特的码字重复地传播，但是 N 非常大，于是码序列 $c(t)$ 看起来像数字噪声。PN 序列可以通过一个 r 级的线性反馈移位寄存器产生，于是 $N = 2^r - 1$。序列的自相关函数近似为

$$R_c(\tau) = \Lambda\left(\frac{\tau}{T_c}\right)$$

其中，T_c 是一个码片的持续时间(发送一个 PN 码字所需的时间)。$T_c \ll T_b$，其中 T_b 为 1 比特数据的持续时间。

(a) 求扩频信号的 PSD(提示：假定 $m(t)$，$c(t)$ 和 θ_c 相互独立，另外 $m(t)$ 的 PSD 可近似为冲激函数，因为与扩频信号的频谱相比，$m(t)$ 的带宽非常窄)。

(b) 画出最优接收机的方框图。注意，先对 $c(t)m(t)$ 进行相干检测，然后再使用相关处理器恢复数据 $m(t)$。

(c) 求解 P_e 的表达式。

★7.36　检验当接收机使用乘法检测器时，AM 通信系统的性能。对于正弦调制信号，画出作为调制比例函数的$[(S/N)_{out}/(S/N)_{in}]$。

★7.37　正弦测试音调制的 AM 发射机，调制比例为 40%。AM 信号在加性高斯白噪声信道上传输，分析该系统的噪声性能及该系统比 DSB-SC 系统差多少分贝(dB)。

7.38　一个对 SSB 信号的相位型接收机，如图 P7.38 所示(这是习题 5.21 的内容)。

(a) 证明该接收机是线性或非线性系统。

(b) 当输入为 SSB 信号加功率谱密度为 $N_0/2$ 的噪声时，求接收机输出 SNR 的公式。

7.39　如图 P7.38 所示，假定接收机仅由图中上半部分组成，于是点 C 就是输出。当输入为 SSB 信号加 PSD 为 $N_0/2$ 的白噪声时，求解 $(S/N)_{out}$。

7.40　考虑图 P7.40 中的接收机，令输入为 DSB-SC 信号加 PSD 为 $N_0/2$ 的白噪声，调制信号的均值为 0。

(a) 当 A_0 很大时，证明接收机等价于乘法器。

(b) 当 A_0 很大时，求作为 A_c、$\overline{m^2}$、N_0、A_0 和 B_T 的函数的 $(S/N)_{out}$。

7.41　当调制信号 $m(t)$ 为高斯随机过程时，比较 AM、DSB-SC 和 SSB 系统的性能。假定高斯调制信号具有 0 均值并且峰值为 $V_p = 1$，其中 $V_p \approx 4\sigma_m$。画出如下系统的 $(S/N)_{out}/(S/N)_{baseband}$，并比较这三种系统的性能。

(a) AM 系统。

(b)DSB-SC 系统。

(c)SSB 系统。

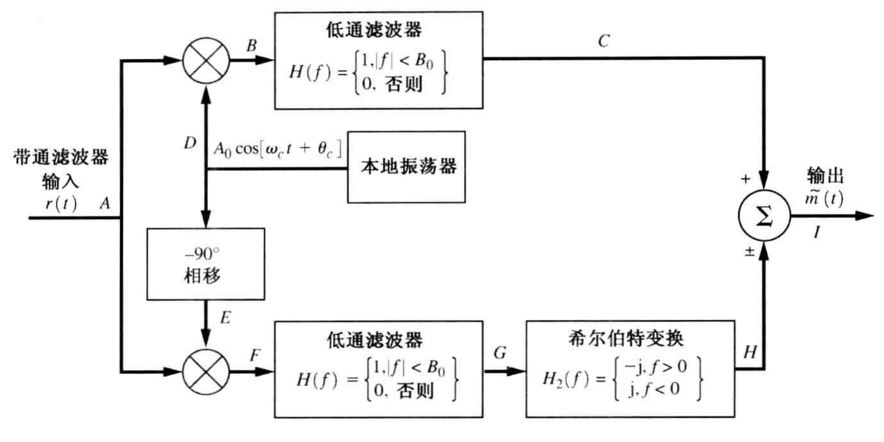


图 P7.38

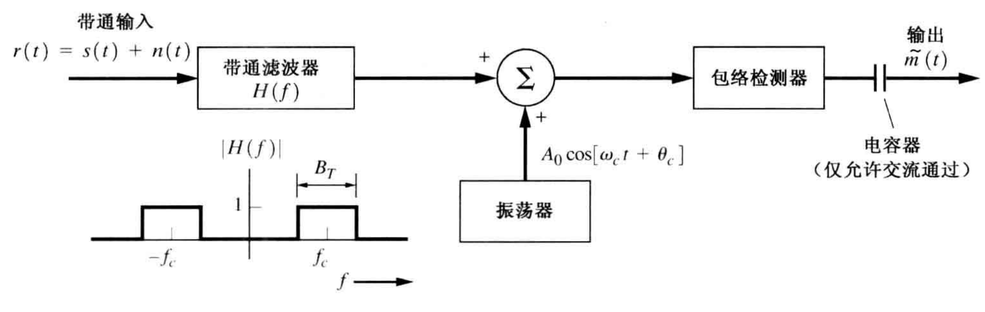


图 P7.40

7.42 如果将线性调制系统在等峰值功率的基础上进行比较(即所有信号的峰值功率相同),证明:

(a)SSB 与 DSB 相比 $(S/N)_{out}$ 有 3 dB 的增益。

(b)SSB 与 AM 相比 $(S/N)_{out}$ 有 9 dB 的增益(提示:见习题5.11)。

7.43 应用式(7.132),画出在传统电视调频伴音系统的参数下,其鉴频器输出 SNR 的门限特性(ΔF = 75 kHz 及 B = 15 kHz)。将所画出的该系统的 $(S/N)_{out}$ 与 $(S/N)_{baseband}$ 曲线与图7.24进行比较。

★7.44 中频带宽为 25 kHz、基带带宽为 5 kHz 的 FM 接收机的噪声系数为 12 dB,并采用了 75 μs 的去加重网络。接收机的输入信号为 FM 信号加噪声,其中噪声的功率谱密度为 $N_0/2=kT/2, T=290$ K(见8.6节)。当采用正弦波调制时,求使输出信噪比达到35 dB 的最小输入信号电平(以 dBm 为单位)。

7.45 参考表5.4,有这样一个双向 FM 移动无线系统,其参数为 $\beta_f=1, B=5$ kHz。

(a)求无去加重情况下的 $(S/N)_{out}$。

(b)求采用 $f_1=2.1$ kHz 的去加重系统的 $(S/N)_{out}$。注意,在该系统中 B 并不比 f_1 大很多。

(c)画出该系统 $(S/N)_{out}$ 与 $(S/N)_{baseband}$ 关系的曲线,并将该结果与图7.26中的 FM 广播系统进行比较。

7.46 比较两个应用不同去加重特性的 FM 系统的性能,假定 $\beta_f=5, \overline{(m/V_p)^2}=\frac{1}{2}, B=15$ kHz,并且信道为加性高斯白噪声信道。求下面两种情况下的 $(S/N)_{out}/(S/N)_{baseband}$ 值。

(a)25 μs 的去加重。

(b)75 μs 的去加重。

7.47 用具有高斯(幅度)分布频率特性的基带信号 $m(t)$ 调制发射机，假定调制信号具有零均值，并且峰值为 $V_p = 4\sigma_m$。FM 信号在高斯噪声信道上传送，令 $\beta_f = 3, B = 15$ kHz。求下面两种情况下的 $(S/N)_{out}/(S/N)_{baseband}$ 值。

(a)无去加重。

(b)75 μs 去加重。

7.48 FM 广播系统中，在发射机的音频输入端应用预加重滤波器，而接收机的输出采用去加重滤波器以提高输出 SNR。对于 75 μs 加重，去加重 LPF 接收机的 3 dB 带宽为 $f_1 = 2.1$ kHz。音频带宽为 $B = 15$ kHz。定义为 B/f_1 函数的改进因子 I 如下：

$$I = \frac{\text{使用预加重-去加重的系统}(S/N)_{out}}{\text{没有使用预加重-去加重的系统}(S/N)_{out}}$$

对于 $B = 15$ kHz，画出以 f_1 为自变量，以 dB 为单位的改进因子曲线，其中 50 Hz $< f_1 <$ 15 kHz。

★7.49 在 FM 广播系统中使用预加重，并且定义 $\Delta F = 75$ kHz 为 100% 调制，检验两类标准的不兼容性。假定调整 1 kHz 的音频测试音的幅度产生 100% 调制(即 $\Delta F = 75$ kHz)。

(a)如果频率变为 15 kHz，求得到的 $\Delta F(f_1 = 2.1\text{ kHz})$，并求其调制百分比。

(b)解释为什么当发送典型的音频信号时，这种现象不难出现。

7.50 5.7 节研究了立体声 FM 信号的传输。在发射机中，左声道音频 $m_L(t)$、右声道音频 $m_R(t)$ 都被 $f_1 = 2.1$ kHz 的网络预加重。这些预加重后的音频信号被转换成组合基带调制信号 $m_b(t)$，如图 5.17 所示。在接收端，FM 检测器的输出为被噪声污染的组合基带信号(假定噪声来自高斯白噪声信道)。污染的组合基带信号被解复用成污染的左声道和右声道的音频信号，$\widetilde{m}_L(t)$ 和 $\widetilde{m}_R(t)$ 被 2.1 kHz 的滤波器去加重。输出噪声来自 FM 检测器在 0～15 kHz 及 23～53 kHz 的输出噪声。子载波频率为 38 kHz。假定 FM 接收机的 SNR 很大，证明立体声 FM 系统比相应的单声道 FM 系统的噪声要高 22.2 dB。

★7.51 一个 FDM 信号 $m_b(t)$ 由 5 个 4 kHz 带宽的信道 $C_1, C_2, \cdots, C_5$ 组成，如图 P7.51 所示。FDM 信号是通过调制 5 个音频信号(每个 4 kHz 带宽)到 USSB(上单边带)上的子载波得到的。FDM 信号 $m_b(t)$ 调制 DSB-SC 发射机。生成的 DSB-SC 信号在高斯白噪声信道上传输，在接收端 DSB-SC 信号的平均功率为 P_s，噪声功率谱密度为 $N_0/2$。

(a)画出有 5 个输出的接收机的系统方框图，每一个输出对应一个音频信道。

(b)计算 5 个音频信道的输出 SNR。

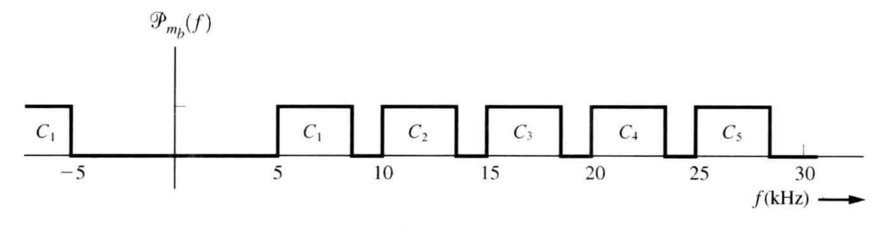


图 P7.51

7.52 将 FDM 信号对主载波进行频率调制，重做习题 7.51。假定 RMS 载波偏移量记为 ΔF_{rms}，并且 5 个音频信道相互独立。系统中没有采用去加重。

7.53 参考图 7.27。

(a)验证 PCM 曲线的正确性。

(b)导出对应于信道上传输 QPSK 信号时 PCM 曲线的公式。

(c)画出 $(S/N)_{out}$ 特性曲线，将 PCM/QPSK 系统的性能与 PCM/BPSK 系统及理想情况进行比较。

7.54 7.9 节讨论了理想模拟系统的性能。借助 MATLAB 工具，画出 $(S/N)_{out}$ 随 $(S/N)_{baseband}$ 变化的曲线，单位均使用 dB。令 $B_T/B = 12$。

第 8 章　有线及无线通信系统

本章要点

- 电话系统、数字用户线环路、数字用户线路(DSL)调制解调器和光纤环路
- 卫星通信系统和卫星无线电
- 链路预算分析及设计
- 蜂窝及个人通信系统
- 数字和模拟电视
- 电缆数据调制解调器
- 无线数据网络

8.1　飞速发展的电信事业

人们对个人通信业务如话音、视频、数据的需求及低成本集成电路和微处理器的发展促进了有线及无线电信事业的蓬勃发展。巨大的推动力推动着有线和无线系统上的高速数据传输。这不仅仅来自于传统的语音、视频和数据系统的发展，也来自于个人蜂窝电话的便利性、包含附件的 E-mail 和 Internet 的应用。

本章的目标是研究一些实际通信系统的设计。这些通信系统都是基于前面各章中所研究的通信原理而设计的。我们将看到现代设计是受工业标准影响的，同时也将看到一些复杂系统是如何从以往的系统演变而来的。这将是非常有趣的一章。

本章给出了电话系统、卫星系统、光纤系统、蜂窝电话系统、个人通信业务(PCS)、电视系统(包括数字电视)的结论及无线系统的链路预算分析。链路预算分析是在满足系统性能指标的情况下，对发送功率、天线增益及接收系统的噪声系数的折中过程。这种性能标准对于数字通信系统而言是可容忍的最大误码率，对于模拟通信系统而言则是最低输出 SNR。

8.2　电话系统

现代电话系统是由 1800 年的电报与电话系统发展演变而来的。被称为公用事业公司的电话公司在其公众电话交换网络(PSTN)上以租用的形式给大量用户提供业务。“公用事业公司”一词常用来指提供广泛商务活动的企业，如邮政、航空、运输、电话及数据服务等部门。公用事业公司通常作为大众福利由政府管理，并且在一些国家，某些公用事业公司的业务是由政府部门提供的。多用户的信息主要以时分复用(TDM)或分组数据的方式在电话系统中传输(如附录 C 中所述的 ATM)。

历史上，电话系统仅仅是设计成重新恢复从远程终端产生的语音信号。当今的现代电话系统非常复杂，它们在中心局(CO)应用大型数字计算机来交换呼叫和监视电话系统的性能。现代中心局确定 TDM PCM 语音数据、视频数据和计算机数据到远程终端和其他中心局的路由。

数字业务以下面三种方式之一提供给用户使用：(1)专门的租用电路，如 T_1 电路，它在任何时

候都无须拨号或交换就可以使用。(2)电路交换业务，在拨号的基础上就可以使用。(3)分组交换业务，如 8.3 节中将要讨论的数字用户线。数字用户线经常"在线"，但仅在有包交换时才使用。

8.2.1　历史背景

现代电话系统是由 Alexander Graham Bell 于 1876 年发明的相对简单的模拟电路演化而来的，其电路如图 8.1 所示，其中两个电话座机由一对电话双绞线(即双线)连接，并且由中心局的电池供电(历史上，两对电话线之间的连接是通过电话接线员完成的)。电池给电话线环路提供直流电流，在每个电话座机里都有一个炭精传声器。它由包在盒子中松散的碳粒组成，这个盒子有柔软的一侧，我们称之为振动膜。当声波拍打振动膜时，碳粒被压缩和松弛，从而产生了变化的阻抗，使直流回路电流被调制。于是，就产生了音频交流信号，如图 8.1 所示。座机的耳机中由一块放在磁场中的带有顺磁性振动膜的电磁铁组成。交流信号通过电磁铁，引起耳机中振动膜的振动，于是声音被恢复出来。

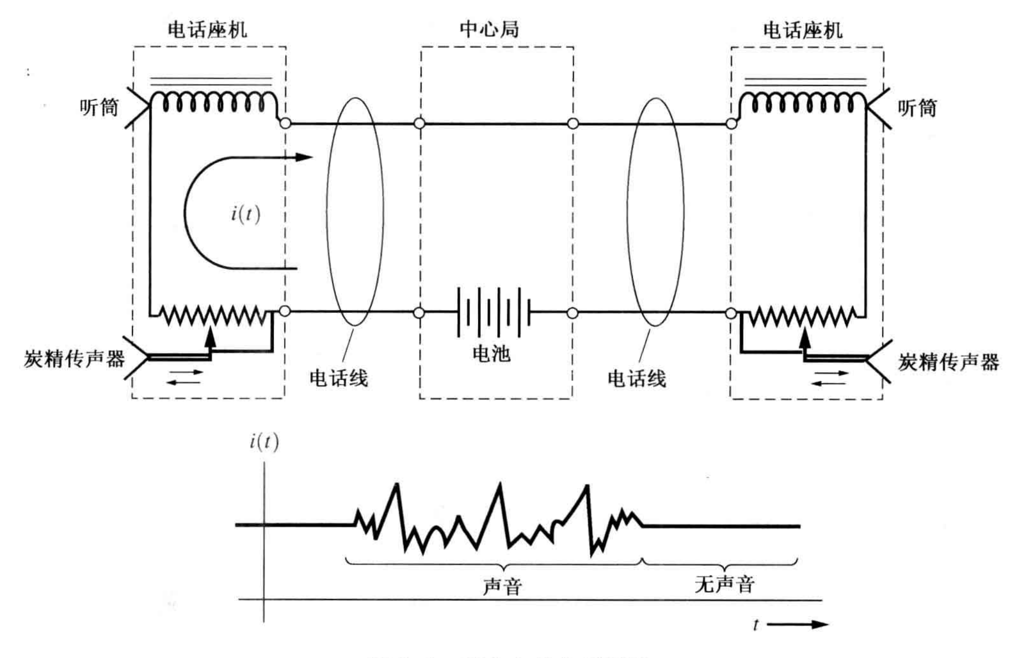


图 8.1　历史上的电话系统

如图 8.1 所示的双线电话系统有三个重要的优点：(1)不昂贵；(2)电话装置由 CO 通过电话线供电，于是用户端不需要电源供给；(3)电路为全双工。① 双线电话系统有一个主要的缺点：不能应用放大器，因为放大器只能对一个方向的信号放大。于是，对于远程电话连接就需要一种更先进的技术——四线电路。在四线电路中，一对(或一根光纤)被用于信号发送，而另一对则用于信号接收。

8.2.2　现代电话系统和远程终端

今天使用的模拟本地环路系统的简化流程图如图 8.2 所示。本地交换局通过对两个本地环路中适当部分采用硬线连接的方式将两个部分连接起来。这实质上是一个串行联接，每一个电

① 采用全双工电路，双方可以与对方同时讲话和接听。

话机的炭精传声器和听筒与电池(位于电话公司)是串联在一起的。图 8.2 画出了这个模拟本地环路系统，这个系统用以提供 POTS 业务。从中心局出来带正电压的导线称为尖塞引出线，它是绿色的；带负电压的导线称为环状引出线，它是红色的。尖塞和环起源于中心局还在用插塞式接线总机的时代。这些导线被连接到尖塞和环形的插头上。这种插头很像立体声耳机的插头，有尖塞、环和套管等接点。地线连接到套管接点处。

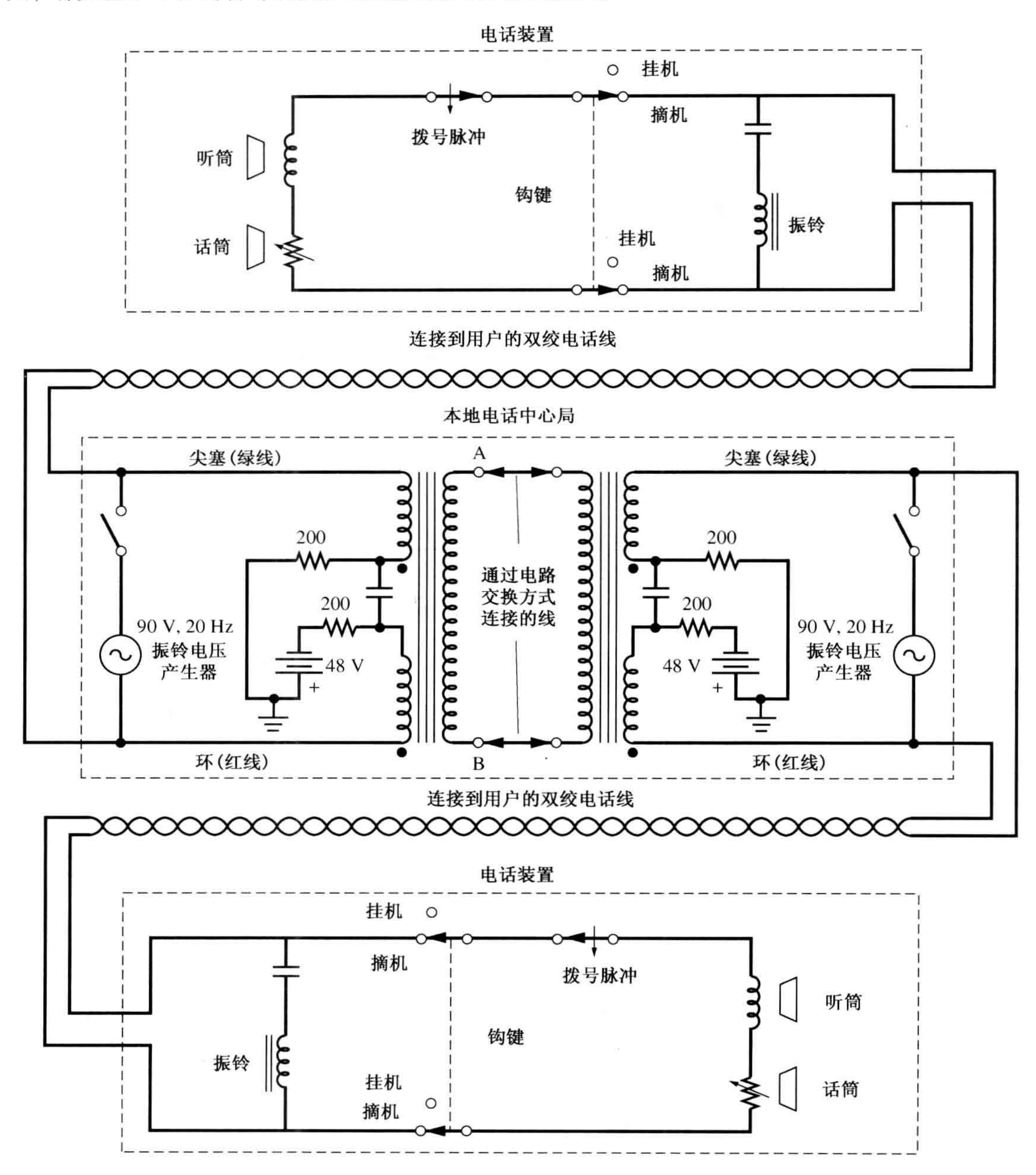


图 8.2 本地模拟电话系统(简化)

发起一个本地呼叫的进程可借助于图 8.2 和表 8.1 进行描述。呼叫方——在图 8.2 中上面的电话装置——摘下电话座机；于是叉簧钩键开关被关闭，因此呼叫方的电话线上有直流电流通过。这个电流大约为 40 mA，CO 检测到电流后在呼叫方的电话线上发出拨号音(大约 400 Hz)。呼叫方使用脉冲或按键音方式拨号。如果使用的是脉冲拨号，直流电的中断次数则等于拨号数字(以 10 脉冲/秒)。例如，拨的数字为 5，则电线上的直流电将中断 5 次。接收到被叫方的完整号码后，CO 对相应号码的电路上发出振铃音(90 V rms，20 Hz，通 2 s，断 4 s)，这使电话振铃。当被叫方应答，其线上的直流电流通知 CO 断开振铃音发生器，并通过 CO 交换电路将呼叫双方连接在一起。呼叫方和被呼叫方的线上这时都有直流电流通过，并通过传输线相互连通。[①] 当任何一方讲话时，声波的振动造成炭精传声器的电阻同步改变，从而双方线路中的直流被话音调制成交流信号。值得注意的是，这是一个全双工系统，双方能同时讲话和接听。

在现代电话机中，炭精传声器已被驻极体或动态麦克风所取代，并且采用了由 CO 供电的集成电路放大器，但是基本工作原理是相同的。

图 8.2 中所描述的电话系统，只有当环路电阻不大于 1300 Ω 时才适用。这就限制了电话机到中心局之间的距离，当采用 26 号线时最远距离约为 15 000 英尺，24 号线时为 24 000 英尺，当采用 22 号双绞线时则为 38 000 英尺(或 7 英里)远。所以历史上在乡村地区多采用 19 号线，这样在无远程端局的情况下，话机可距离中心局 20 英里远。

表 8.1　用户环路的电话标准

项目名称	标　准			
断开钩键(空闲状态)	电路断开，最小 DC 阻抗为 30 kΩ			
闭合钩键(忙状态)	电路闭合，最大 DC 阻抗为 200 Ω			
电池电压	48 V			
电流	20 ~ 80 mA，典型值为 40 mA			
用户环路电阻	0 ~ 1300 Ω，3600 Ω(最大值)			
环路损耗	8 dB(典型值)，17 dB(最大值)			
振铃电压	$90V_{rms}$，20 Hz(典型值)(通 2 s，断 4 s)			
振铃器等效数(REN)[a]	0.2 REN(最小)，5.0 REN(最大)			
脉冲拨号	瞬时开路环			
脉冲速率	10 脉冲/秒 ±10%			
占空因素	58% ~64%(断开)			
数字之间的时间	最小为 600 ms			
脉冲编码	1 脉冲 =1，2 脉冲 =2，…，10 脉冲 =0			
按键[b] 拨号	使用双音，一个低频音和一个高频音来区分 8 个数据			
		高频音		
	低频音(Hz)	1209	1336	1477
	697	1	2	3
	770	4	5	6
	852	7	8	9
	941	*	0	#
每个音的电平	-6 ~ -4 dBm			
最大电平差值	4 dB			
最大电平(对)	+2 dBm			
频率容限	±1.5%			

① 传输线在电话系统中称为感应线圈。

(续表)

项目名称	标　　准
脉宽	50 ms
数字之间的时间	最大值 45 ms
拨号音	350 加 440 Hz
忙音信号	480 加 620 Hz，每分钟 60 次中断
振铃信号音	440 加 480 Hz，通 2 s，断 4 s
呼叫 ID[c]	在第一声和第二声铃声之间为 1.2 kps 的 FSK 信号(Bell202 型调制解调器标准)[d]

a. 意味着由电话振铃器导致的负载阻抗，1.0 REN 等于 8 kΩ,0.2 REN 等于 40 kΩ。

b. 按键音是 AT&T 公司注册的商标，它也称为双音多频信号。

c. 也提出了其他显示设备[Schwartz，1993]。

d. [Lancaster，1991]。

对任何一个用户，提供一条连接到中心局的专用线将是十分昂贵的。如果在邻近的位置上存在着大量的用户需要连接到中心局，显然采用如图 8.3 所示的远程端局的连接方式将明显地降低安装费用。而且远程端局的使用可以使电话机放置在距离中心局任意距离的位置上，相关内容将随后讨论。

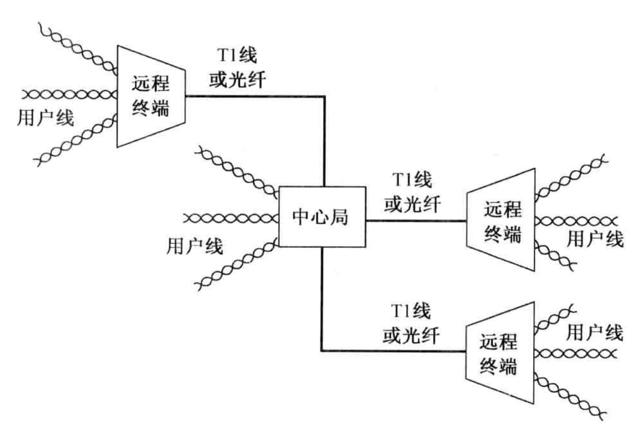
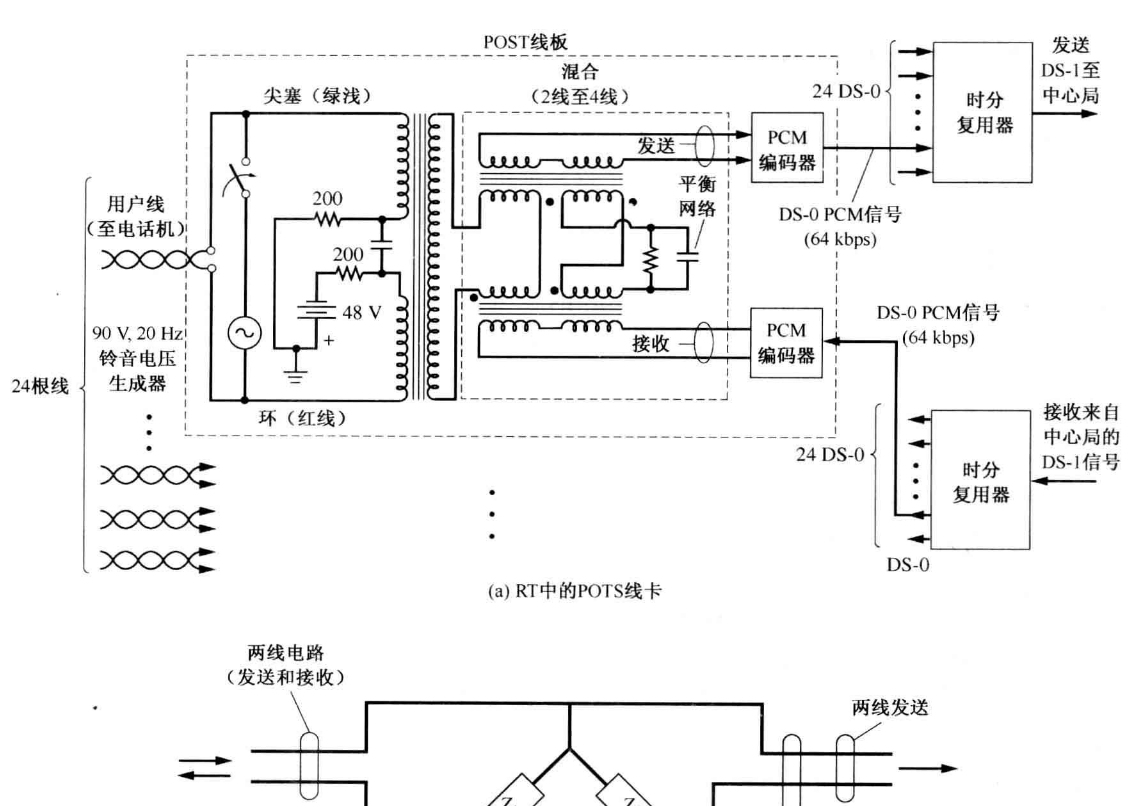


图 8.3　使用远程终端的电话系统

图 8.4 给出了一个典型的远程端局电路。POTS 线板向用户话机提供直流电源和铃流。其中混合电路实现 2/4 转换，即将用户线上的 2 线复合音频信号转换到 4 线电路上去，两对线路分别传输发送和接收两个方向的信号。混合电路采用了平衡传输电路或等效的电子线路来隔离发送和接收信号。图 8.4(b)所示电路中采用的就是平衡惠斯通电桥模型，其中 $Z_1/Z_3 = Z_2/Z_4$。这样右下方的接收信号电压被平衡消除，而不再出现在左上方的发送线路中。所以，即使在 4 线的远端口以及发送线与接收线平行传输路径上，可能存在着放大的发送信号被耦合到接收线上，但不会产生自激现象。由图 8.4(a)可见，发送的音频信号被转换成 DS-0 PCM 信号，从而与连接到远程端局上的其他用户 PCM 信号进行时分复用。TDM 信号被封装成 DS-1 帧格式，传送到中心局。与之类似，从中心局将接收到的 DS-1 信号被解复用及解码成音频信号。在由 AT&T 公司首先制造的 SLC-96 典型通用远程端局系统中，96 个音频用户线被数字复用到 4 根 T1 线上，并有 1 根额外的 T1 线作为故障备用线[Chapman，1984]。在第 3 章中已经介绍过 1 根 T1 线是由两对双绞线构成的，分别用于发送和接收数据。1 根 1.544 Mbps 的 T1 线承载 24 路音频信号。

让我们比较使用和不使用远程端局时，系统对传输线对的需求量。如果没有远程端局，96 个用户需要 96 对线连接到中心局。而如果使用一个 SLC-96 远程端局，就只需要 10 对线构成 5 根 T1

线。因此线对的增益达到了 9.6/1。另外，通过使用 DS-1 信号格式和每英里使用中继再生设备，远程端局不再受 1300 Ω 阻抗的限制，可以距离中心局任意远。当然也可以采用光纤连接远程端局和中心局。例如，如果使用两根 560 Mbps 的光纤作为双线传输(每根用于一个方向的数据发送)，就有 8064 个音频信道可用于传送 DS-5 信号(参见表 3.8 和图 3.40)。因此，一个采用 560 Mbps 光纤连接的中心局与远程端局，能够支持 8064 个用户。在 8.7 节我们将会介绍，在 35 英里的范围内都不需要光中继设备。



(a) RT中的POTS线卡

(b) 混合电路的平衡惠斯通电桥

图 8.4　远程终端(RT)

电话公司已将模拟交换器替换成了数字交换器。早期的中心局，通话双方的连接是由模拟电路交换方式实现的(如图 8.2 所示)。这些交换受硬件继电逻辑控制。而现代电话局则采用数字交换系统(ESS)。此时一台数字计算机通过软件来控制交换操作，因此被称为存储程序控制方式(SPC)。并且 ESS 中使用数字交换电路来代替模拟电路。典型的系统有 AT&T 公司的 No. 5 ESS 和北电公司的 DMS-100 等。在数字交换中心局，用户的音频信号被转换成 PCM 格式，并与其他 PCM 信号复用成高速数字传输格式(当存在远程端局时，则在远程端局中实现这个转换)。

呼叫方的PCM数据被填写到分配给被叫方的TDM时隙中，这种时隙转换(TSI)的机制实现了数字交换。数字交换方式与模拟方式相比，单个用户的建设费用更加低廉，并且能够同时支持PCM音频、数字视频和数据信息的交换。

对于长途电话，本地局通过中继线与远端中心局连接，以TDM或分组的方式承载多路通话。此时，本地中心局类似于一个连接到远端中心局的远程端局。其实，电话系统的总费用只有不到5%用于中继线建设，交换设备占用了大部分费用。

8.3 数字用户线(DSL)

如何利用有线技术经济地传送高速数据和视频业务呢？高速数据很容易在光纤电缆上从CO传送到RT。问题是如何在最后一英里上将数据传送给用户。通常，从RT到用户之间直接用同轴电缆或理想的光纤连接并不很经济。在大多数情况下，通常是双绞线连接，1500英尺的短线的有用带宽为30 MHz。在传统的应用中，RT中的POTS线卡限制了VF带宽为3.3 kHz，从而限制了对于50 kbps的数据速率要求50 dB的SNR(V.90 modem)。但更糟糕的是，线路的SNR可能更低，于是VF modem常常只能以24 kbps的速度传送信号(见助学例题SA1.3的证明)。然而，在RT中使用数字用户线可以使最后一英里变成宽带，最后可达6 Mbps的数据速率。因为有多种DSL技术，所以我们将这一类方法表示为xDSL。所有的xDSL技术都是在用户到RT之间的最后一英里上使用一对或两对双绞线实现的。

1. HDSL(高比特速率数字用户线)使用两对双绞线(一个发送、一个接收)来支持全双工传输，最远距离为12 000英尺，速率为1.544 Mbps。它使用ISDN的2B1Q线码(后面将介绍)或称为无载波幅相调制(CAP)的抑制载波QAM。

2. SDSL(对称数字用户线)是HDSL的一对双绞线版本。它通过使用混合回路或回音消除技术从接收数据中分离出发射数据，提供每方向768 kbps的全双工通信速率。

3. ADSL(非对称数字用户线)应用一对双绞线来支持从RT到用户的6 Mbps和从用户到RT的640 kbps的数据流传送，最大距离为12 000英尺。ADSL频谱高于25 kHz、低于4 kHz的频带用于VF POTS信号的传输。两类ADSL的变型为G.DMT和G.Lite，相关内容将在下一节讨论。

4. VDSL(非常高比特率数字用户线)使用一对双绞线支持最大距离为3000英尺、速率为25 Mbps的下行数据速率的传输，或最大距离为1000英尺、速率为51 Mbps的下行数据速率的传输，而从用户到RT的最大传输速率为3.2 Mbps。

5. ISDN(综合业务数字网)使用一对双绞线以提供在每个方向最高144 kbps、最远18 000英尺的用户数据的传输。这项技术从1990年就已经使用，并在欧洲、日本盛行，但是在美国却不流行。我们将在后面详细介绍。

8.3.1 G.DMT和G.Lite数字用户线

G.DMT和G.Lite在高于4 kHz的语音频带内应用分组ADSL技术，这使得在一根双绞线上可同时支持VF POTS信号和数据信号。

如图8.5(a)所示，G.DMT使用一个分离器，于是电话座机将不会对数据信号短路，反之亦然。G.DMT使用离散的多音调制(DMT)，最多可达256个载波并且每组数据最多为15比特，用32 768 QAM方式调制到每个载波上。[①] 这提供了最远12 000英尺、最大6.1 Mbps的下行数

① DMT采用正交频分复用(OFDM)技术，在5.12节中有介绍。

据速率和640 kbps的上行数据速率。如图8.5(b)所示，DMT载波间隔为4.3125 kHz，上行数据在26～138 kHz频带内的载波上传送，下行数据在138～1100 kHz频带内的载波上传送。在另一类装置中，上行和下行载波均在26～1100 kHz的频带内。一个混合电路(或回声消除器)用于分离上行和下行载波。DMT的优点是可用不同的调制方式以适应特殊线路的传输和噪声特性，也就是说，不采用由于反射造成的频率响应零点和噪声较大的频点上的载波，从而使得线路上的数据误码率可达10^{-7}。

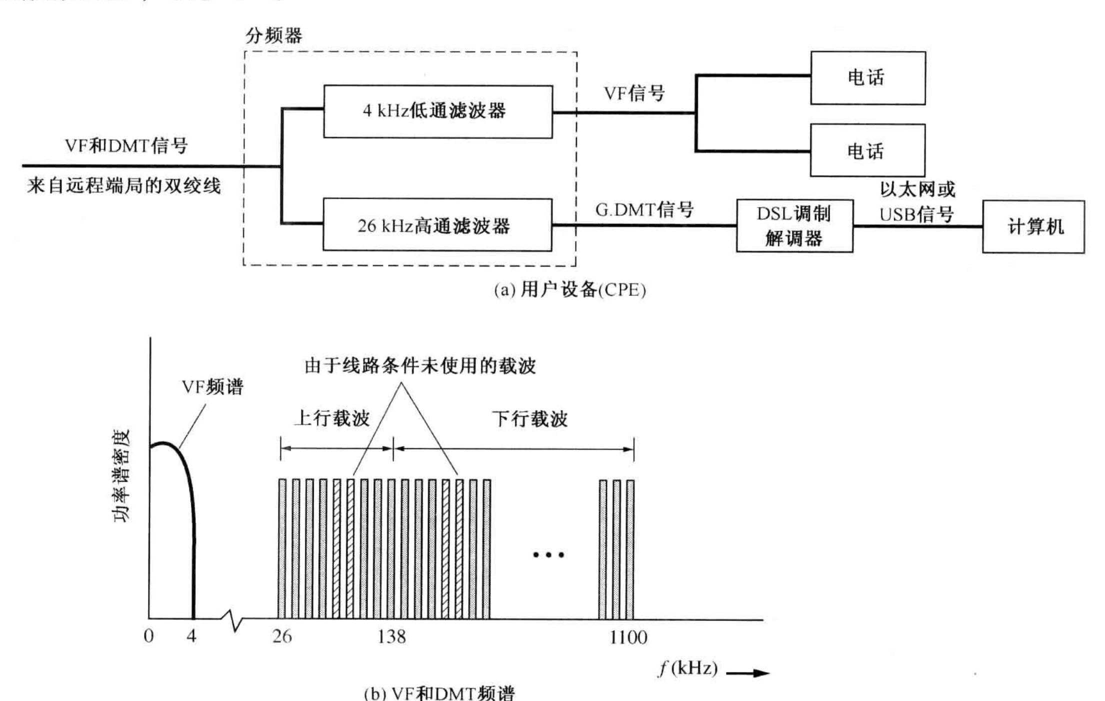


图8.5　G.DMT数字用户线

G.Lite不使用分离器(电话和数据是并行传输的)。它的好处是对TEL CO不安装分离器，但是它的缺点是老式电话装置将对数字信号短路，并且从电话线桥抽头(即扩展话机)的反射将造成频谱上的传输零点。结果G.Lite对一些用户不工作，除非换一个电话或者安装分离器。G.Lite使用比G.DMT更少的载波以避免频谱的高频端性能的恶化。G.Lite在18 000英尺线上的上行速率为1.5 Mbps，下行速率为512 kbps。它使用128个DMT载波，最高8比特的数据，用256 QAM方式调制在每个载波上。

G.DMT和G.Lite可能是解决如何提供经济地高速Internet接入问题的答案。G.DMT在ANSI标准的T.413和ITU文件的G.992.1中进行了描述。G.Lite的描述在ITU的文件G.992.2中。

8.3.2　视频点播(VOD)

VDSL技术允许电话公司(TEL CO)应用双绞线向用户提供有线电视业务。一路HDTV(高清晰电视)信号对压缩的视频业务需要20 Mbps的数据速率，而另一路SDTV(标清电视)信号可以用6 Mbps的速率传送。通过VOD，用户通过使用机顶盒(STB)选择所需的节目。TELCO将所选节目的数据通过VDSL传给用户，STB将数据转换成可在TV上看到的视频信号。首映的电影和其他付费节目也可以提供。VOD用户几乎可以接入无限个TV频道和其他的视频业务。

8.3.3 综合业务数字网(ISDN)

综合业务数字网用 DSL 将数字数据传送给用户(无 VF 信号)。综合业务数字网用户可以对数据解复用,以同时提供如下某种或所有的应用:(1) 解码以产生电话座机的 VF 信号;(2) 为视频显示解码;(3) 为 PC 或遥测处理数据。

有两类 ISDN:(1)窄带或基本速率 ISDN,记为 N-ISDN;(2)宽带 ISDN,记为 B-ISDN。B-ISDN 的数据速率为 1.536 Mbps(与 T_1线的速率大致相等),由 23 个 B 信道(64 kbps)和一个 D 信道组成。B 信道传送用户数据,它可能是视频或音频的 PCM 编码。D 信道用于传送建立呼叫、结束呼叫的信令或是 23 个 B 信道的路由数据。

窄带 ISDN 业务在欧洲使用,但很少在美国使用。宽带 ISDN 业务全世界都在使用,也包括美国,用于将 PBX(用户小交换机)连接到 PSTN 中。

N-ISDN 的标准结构如图 8.6 所示。N-ISDN 用户通过双绞电话线与电话公司的 RT 相连。对于 N-ISDN 业务,若数据速率为 160 kbps 的 N-ISDN,线长不能超过 18 千英尺(3.4 英里)(如果用户位于离 CO 1.8 千英尺范围内,则不需要 RT)。N-ISDN 用户数据速率为 144 kbps,由 2 个 64 kbps 的 B 信道和一个 16 kbps 的 D 信道组成。除了 2B + D 数据以外,电话公司还加上 12 kbps的帧同步和 4 kbps 的字头以支持网络操作。这为 DSL 提供了每个方向 160 kbps 速率的全双工操作。DSL 终止于图 8.6 所示的用户端 U 接口上。

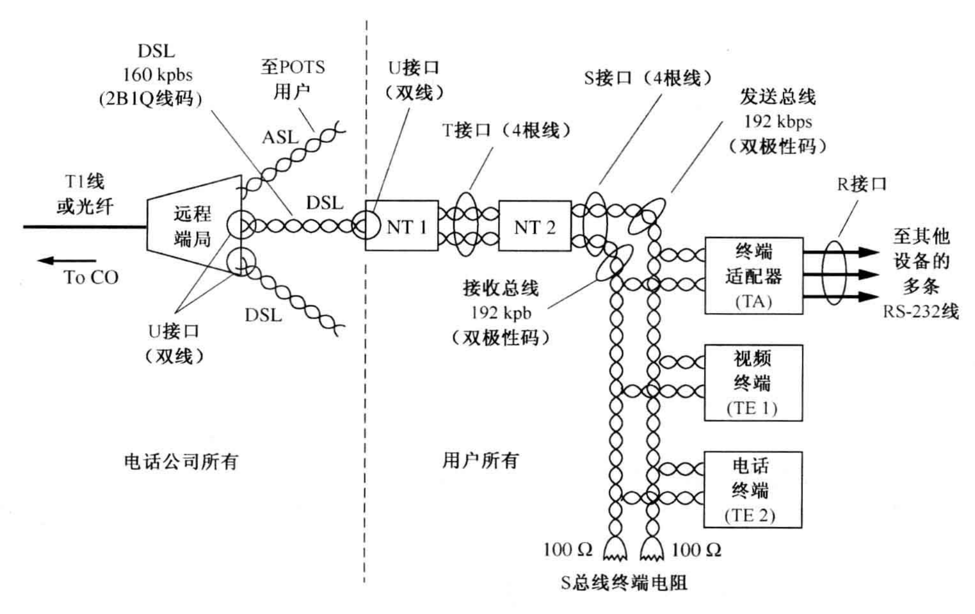


图 8.6 拥有附加用户设备的 N-ISDN 系统

通过 DSL 可为最多距 RT 18 千英尺远的用户提供 N-ISDN 业务,这可以使用多电平信号来实现。参照图 5.33,图中 $R = 160$ kbps 的 4 电平(即 $\ell = 2$ 比特),速率为 80 kbaud 的线路码带宽为 80 kHz,而不是二进制线路码的 160 kHz 带宽。如果长度小于 18 千英尺,80 kHz 带宽就由 26 号双绞线保证。使用的四电平信号为 2B1Q 线路码(两个二进制数字编码成一个如图 8.7 所示的四进制符号)。注意,2B1Q 线路码是差分符号码,于是如果双绞线对发生翻转以至上面的线连接到振铃终端,并且铃流送往上端以至 2B1Q 信号的极性发生翻转,解码后的二进制数据仍会有正确的极性(即符号不发生翻转)。

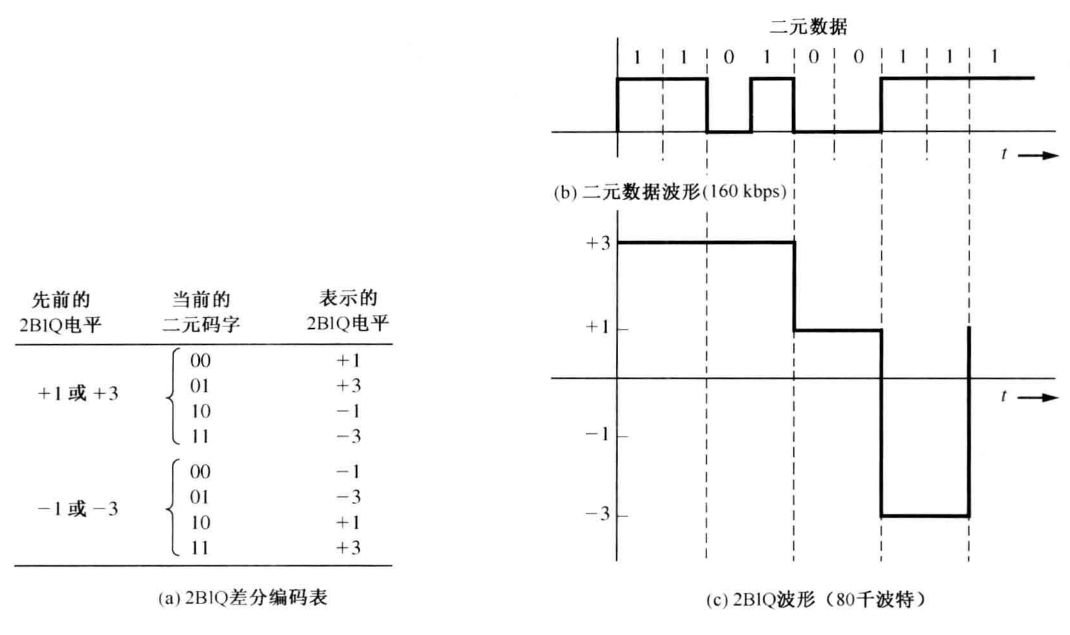


图 8.7　2B1Q 线路码

8.4 公众交换电话网的容量

用于连接长途局的宽带信道主要为一种类型：光纤电缆。表 8.2 列出了一些现在使用或过去使用的宽带系统，并根据这些系统所能处理的 VF 信道数目和传输的比特率，给出了它们各自的容量。

表 8.2　公众电话交换网的容量

传输媒介	名　称	发 明 者	使用时间	音频信道数	比特率 (Mbps)	重构器间隔 (英里)	使用频率(MHz)	调制[a] D/A	调制[a] 方　法
明线传输线	A	Bell	1918	4			0.005 ~ 0.025	A	FDM/SSB
	C	Bell	1924	3		150	0.005 ~ 0.030	A	FDM/SSB
		CCITT		12		50	0.036 ~ 0.140		
	J	Bell	1938	12		50	0.036 ~ 0.143	A	FDM/SSB
		CCITT		28			0.003 ~ 0.300	A	FDM/SSB
双绞线对电缆	K	Bell	1938	12		17	0.012 ~ 0.060	A	FDM/SSB
		CCITT		12		19	0.012 ~ 0.060	A	FDM/SSB
	N1	Bell	1950	12			0.044 ~ 0.260	A	FDM/SSB
	N3	Bell	1964	24			0.172 ~ 0.268	A	FDM/SSB
	T1[b]	Bell	1962	24	1.544(DS-1)	1		D	双极性
	T1G[b]	AT&T	1985	96	6.312(DS-2)			D	四电平
	T2[b]	Bell		96	6.312(DS-2)	2.3		D	B6ZS
同轴电缆	L1	Bell	1941	600		8	0.006 ~ 2.79	A	FDM/SSB
	L3	Bell	1953	1860		4	0.312 ~ 8.28	A	FDM/SSB
	L4	Bell	1967	3600		2	0.564 ~ 17.55	A	FDM/SSB

a. A——模拟，D——数字，DWDM——密集波分复用。

b. 见表 3.9 中关于 T 载波系统的详细情况。

c. 自从 1974 年，除了 VF FDM 容量外，语音下的数据还加到一个 1.544 Mbps(DS-1)的数据信道。

d. 每 10 Gbps 的 40 波长信道。

e. 统计复用的 VF 容量。

(续表)

传输媒介	名　称	发 明 者	使用时间	音频信道数	比特率(Mbps)	重构器间隔(英里)	使用频率(MHz)	调制[a] D/A	方　法
	L5	Bell	1974	10 800		1	3.12 ~ 60.5	A	FDM/SSB
	T4[b]	Bell		4032	274.176(DS-4)	1		D	极性
	T5[b]	Bell		8064	560.16(DS-5)	1		D	极性
光纤电缆	FT3	Bell	1981	672	44.763(DS-3)	4.4	0.82 μm	D	TDM/OOK
		Brit. Telcom	1984		140	6	1.3 μm	D	TDM/OOK
		Sask. Telcom	1985		45	6 ~ 18	0.84 和 1.3 μm	D	TDM/OOK
	F-400M	Nippon	1985		400	12	1.3 μm	D	TDM/OOK
	FT3C-90	AT&T	1985	1344	90.254(DS-3C)	16	1.3 μm	D	TDM/OOK
	FT4E-432	AT&T	1986	6048	432(DS-432)	16	1.3 μm	D	TDM/OOK
	LaserNet	Microtel	1985	6048	417.79(9DS-3)	25	1.3 μm	D	TDM/OOK
	FTG1.7	AT&T	1987	24 192	1668(36DS-3)	29	1.3 μm	D	TDM/OOK
	FT-2000	AT&T	1995	32 256	2488(OC-48)	100	1.5 和 1.3 μm	D	TDM/OOK
	WaveStar	Lucent	1999	6 250 000	400 000	25	40 波长	D	DWDM[d]
	FlashWave	Fujitsu	2002	27 500 000	1 760 000		176 波长	D	DWDM
越洋电缆	TAT-1(SB)	Bell	1956	48		20	0.024 ~ 0.168	A	FDM/SSB
	TAT-3(SD)	Bell	1963	138		11	0.108 ~ 1.05	A	FDM/SSB
	TAT-5(SF)	Bell	1970	845		6	0.564 ~ 5.88	A	FDM/SSB
	TAT-6(SG)	Bell	1976	4200		3	0.5 ~ 30	A	FDM/SSB
	TAT-8(3 fibers)		1988	8000	280		1.3 μm	D	TDM/OOK
	TAT-9(3 fibers)		1991	16 000	565		1.55 μm	D	TDM/OOK
	TAT-10(6 fibers)		1992	80 000[e]	565		1.55 μm	D	TDM/OOK
	TAT-12(6 fibers)	Alcatel	1995	200 000	5000	30	1.48 μm	D	TDM/OOK
	OALW160	Alcatel	2000		160 000	35	1.55 μm	D	DWDM
	TAT-14(4fibers)		2001		640 000		1.55 μm	D	DWDM
微波中继	TD-2	Bell	1948	600(1954)	plus 1.544[c]	30	3700 ~ 4200	A	FDM/FM
	TH-1	Bell	1961	2400(1979)	plus 1.544[c]	30	5925 ~ 6245	A	FDM/FM
	TD-3	Bell	1967	1800(1979)	plus 1.544[c]	30	3700 ~ 4200	A	FDM/FM
	TN-1	Bell	1974	1800	plus 1.544[c]	30	K 波段 18 GHz	A	FDM/FM
	AR6A	Bell	1980	6000		30	5925 ~ 6425	A	FDM/SSB
	18G274	NEC	1974	4032	274.176(DS-4)	7	18 GHz	D	4PSK
	6G90	NEC	1979	1344	90(2 DS-3)	30	6 GHz	D	16QAM
	11G135	NEC	1980	2016	135(3 DS-3)	30	11 GHz	D	16QAM
	6G135	NEC	1983	2016	135(3 DS-3)	30	6 GHz	D	64QAM
	MDR-2306	Gollins	1983	2016	135(3 DS-3)	30	6 GHz	D	64QAM
	RD-6A	Nortel	1984	2016	135(3 DS-3)	30	6 GHz	D	64QAM
	TN-X/40	Nortel	1996	4032	310(2 STS-3)	30	6 GHz	D	512QAM
通信卫星	Intelsat IV	COMSAT	1971	8000		22 300	6 GHz 上行/4 GHz 下行	A/D	FDM/FM QPSK/SCPC
	Intelsat V	COMSAT	1980	25 000		22 300	6/4 和 14/11 GHz	A/D	FDM/FM QPSK/SCPC
	Intelsat VI	Intelsat	1990	120 000		22 300	6/4 和 14/11GHz	A/D	FDM/FM QPSK/SCPC
	IntelsatVIII	Intelsat	1998	112 500		22 300	6/4 和 14/11GHz	A/D	FDM/FM QPSK/SCPC
	IntelsatX	Intelsat	2004	170 000			6/4 和 14/11GHz	A/D	FDM/FM QPSK/SCPC

a. A——模拟，D——数字，DWDM——密集波分复用。

b. 见表 3.9 中关于 T 载波系统的详细情况。

c. 自从 1974 年，除了 VF FDM 容量外，语音下的数据还加到一个 1.544 Mbps(DS-1)的数据信道。

d. 每 10 Gbps 的 40 波长信道。

e. 统计复用的 VF 容量。

过去，挂在电线杆交叉臂上由裸线加玻璃绝缘体组成的明线，通过 FDM/SSB 信号提供宽带业务。

因为巨大的容量和低廉的价格，采用 OOK 信号的光纤电缆很快就替代了双绞线、同轴电缆和微波中继线路。如表 8.2 所示，随着技术的进步，光纤链路上的数据速率不断上升。典型地，如在 FT-2000 系统中，OOK 光载波上的数据速率为 2.5 Gbps，这等价于 32 000 路 VF 信号。每载波上 10 Gbps 的速率也是可能的。对于更高容量的系统，我们可以在同一根光纤上使用不同波长的多载波。密集波分复用系统(DWDM)可以在每根光纤上最多包含 176 个光载波。例如，FlashWave7700 密集波分复用系统使用 176 个光载波，可达到 1.76 Tbps 或 2750 万路 VF 的容量。然而光纤只能对一个固定点到另外一个固定点提供业务。相反，通信卫星可以对地球上任一点提供宽带连接。通过端口地面站，可以给孤立的位置立刻提供服务。下一节将对此进行更详细的描述。

8.5 卫星通信系统

近几年来卫星通信系统的数量增加了很多，卫星通信系统使越洋电视信号的转发成为可能。卫星通信系统提供数据、电话和卫星信号的转发，现在卫星通信系统也提供直接到家的电视传送。

在过去的十五年中，卫星通信技术发生了巨大的变化。主要的变化就是从模拟信号变为数字信号。同时，发射的信息类型也发生了改变。在美国，现在卫星通信系统主要用于电视的转播，以及为孤立的地区提供通信链路。当卫星信号的接收被用于确定用户在地球上的精确地理坐标时(纬度、经度和海拔高度)，卫星系统非常适合于全球定位系统(GPS)的应用[Pratt 等 2003；Kaplan，2005]。

如表 8.2 所示，现代光纤系统比现代卫星系统的容量大得多。WaveStar 光纤系统具有 40 倍于 Intelsat X 系统的等效 VF 信道数。光纤束在增加少许成本的情况下就可以放置，并且最初的光纤电缆的容量可以被扩展到所能想象的任意容量。光纤系统每信道的成本/维护费用比卫星系统要少很多数量级。于是，在美国，几乎所有的电话和互联网数据都由光纤系统来承载。卫星系统被用于将电视节目分发给有线电视公司、为家庭直接提供电视节目(如数字电视)、卫星广播以及为商家提供 VSAT(甚小口径终端)网络服务。同时卫星也应用于 GPS 型服务。在国际上，卫星用于电视的转播、GPS、电话传输以及为孤立地区提供互联网链路。

总之，卫星通信系统对于从一个源广播同一信息至多个接收者的广播型应用而言是非常经济的，而对点对点型的通信应用则不太合算。

大多数通信卫星都被放在同步轨道(GEO)上，这是在地球赤道平面上的环形轨道，它在赤道上空 22 300 英里上，轨道周期与地球相同。很自然地，从地球上看，如图 8.8 所示，这些卫星好像位于空中一个静止的点上，这使地面站的天线得以简化，因为它们不需要对目标进行跟踪，而只是指向固定的方向(对于位于极点地区的通信，在极点轨道上使用了卫星，这要求地面站采用可跟踪的天线)。为防止卫星翻转，就需要使用两种自旋稳定技术——自旋稳定或三轴稳定。在三轴稳定系统中，内部的回转仪用于传感卫星的运动，卫星通过点燃适当的推进器来保持稳定。

卫星通信最理想的频段，对上行链路而言(地球到卫星的传输)是 6 GHz，而下行链路是 4 GHz(卫星到地球的传输)。在这个频段上，设备的价格相对比较便宜，宇宙噪声比较小，同时雨雪对信号的衰减较小。其他损耗，如电离层闪烁和大气的吸收，在这些频率上都很小[Spilker，1977](吸收发生在特殊的频段上，是由于信号激活了大气层和水汽造成的)。然而，地面微波无线转发链路已分配在 6 GHz 和 4 GHz 的频带上(见表 8.2)。所以，FCC 限制了卫星发射机到地球站的功率谱密度。我们不得不小心谨慎地放置地面站的卫星接收天线，以使它们不接收被分配在同

一频段上工作的地面微波无线链路的干扰信号。在 6/4 GHz 频段，同步卫星被分配了一个 2°的轨道间隔(美国标准)。

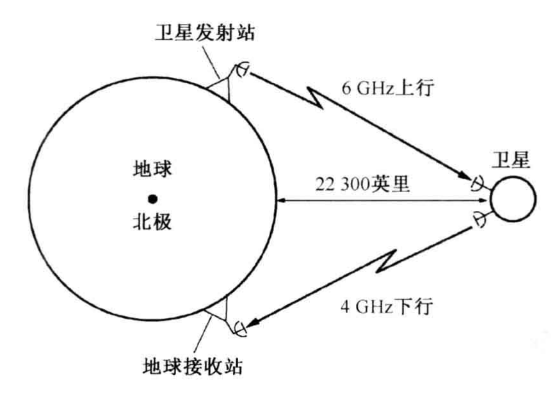


图 8.8 在同步轨道上的通信卫星

新部署的卫星通信系统工作在更高的频段上，因为 6/4 GHz 频段(C 波段)已经很少有可供分配的空闲频谱了。Ku 波段的卫星通信系统中，上行链路采用 14 GHz 的信号，下行链路采用 12 GHz 的信号，轨道间隔为 3°。一些新的 Ku 波段通信卫星采用 120 ~ 240 W 的高功率发射机，而一些低功率及中功率的通信卫星只采用 20 ~ 40 W 的发射机。高功率通信卫星称为直接广播卫星(DBS)，直接向家庭提供电视服务，家庭用户只需安装一副小天线(直径 2 英尺或更小)即可。FCC 称这种卫星广播系统为数字卫星系统(DSS)。

每一个卫星都有一些转发器(接收机到发送机)以放大接收到的上行链路的信号，并将之转化成下行链路的传输信号(见图 8.9)。图 8.9 所示为"曲管转发器"，它不解调接收到的信号和对之进行信号处理，而只是作为高功率增益的下行转换器。大多数转换器的带宽都设计为 36 MHz、54 MHz或 72 MHz，其中 36 MHz 为 C 频带电视转发业务的标准用法。只要技术上允许，处理转发器将被使用，因为它能提高误码性能(对于数字信号)。

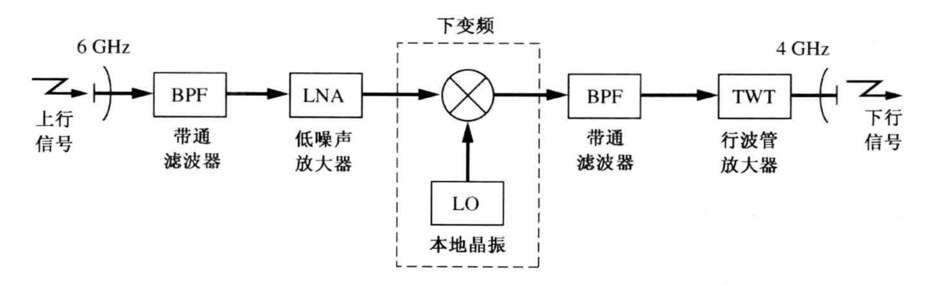


图 8.9 通信卫星转发器的简化框图

每个卫星都被分配了一个同步轨道位置及其工作的频段，在 6/4 GHz 频段上，每个卫星都可以使用分配的 500 MHz 带宽的频带。一个典型的卫星拥有 24 个转发器，每个转发器使用分配的 500 MHz 带宽中的 36 MHz。卫星通过使用 12 个采用水平极化和 12 个垂直极化的信号转发器来实现同一频带的复用。① 一个典型的 6/4 GHz 卫星上的频率分配如图 8.10 所示。信道 1 的转发器记为 C1，信道 2 的记为 C2，等等。这些卫星主要是为 CATV 系统转发信号的。

① 垂直极化的卫星信号在垂直方向上有 E 场(与地球旋转轴平行的方向)，水平极化信号在水平方向上有 E 场。

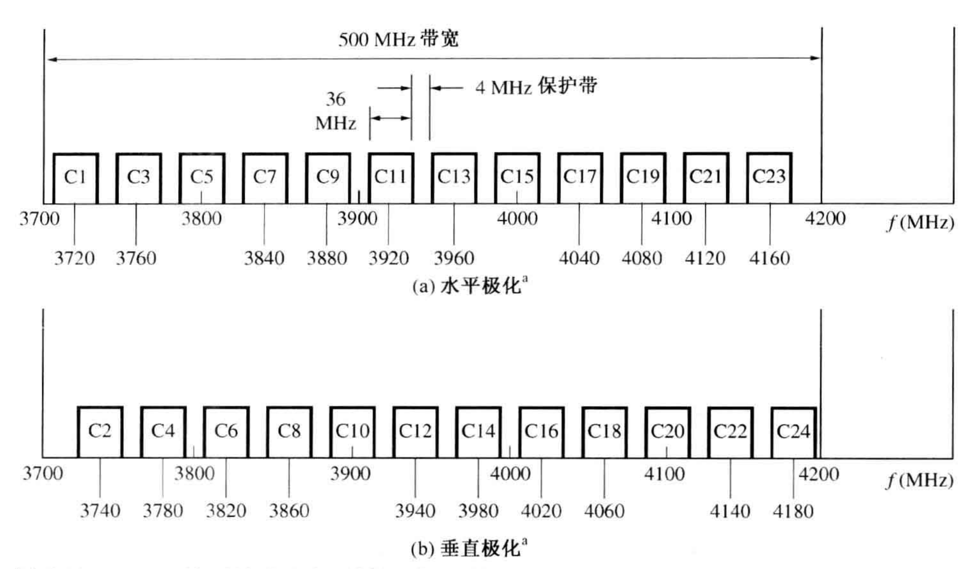


图 8.10 6/4 GHz 卫星转发器对于下行链路的频率规划(对于上行链路的频率规划,加2225 MHz到上面给定的数字上)

8.5.1 数字和模拟电视传输

电视信号可以通过卫星使用模拟或数字技术转发。

对于数字传输，基带视频信号被采样和数字化。数据通常被压缩而保证调制的卫星信号的带宽。通常通过去除每帧图片中冗余的视频样本和去除帧与帧之间冗余的样本来压缩数据。

数字传输的实例之一是 1997 年由通用仪器公司(现为摩托罗拉公司的一个部门)开发的 4DTV 系统。该系统应用到了一颗 6/4 GHz 频段(C 波段)卫星中。关于该系统的详细内容，请参考维基百科中的条目 4DTV。

另外一个实例为数字卫星系统(DSS)，该系统使用 14/12 GHz (Ku 波段)卫星。在美国，DSS 预订的电视业务是由 DirecTV 及 Dish 网络公司提供的。对这些系统，每个基带视频 TV 信道的数字化和压缩使用 MPEG 标准[Pancha 和 Zarki, 1994]。这种压缩使每个信道的平均视频数据速率为 3 ~6 Mbps，其大小主要依赖于图像的运动情况。6 个 TV 信道(视频加多个音频)采用 QPSK 调制以 TDM 的方式在每个卫星转发器上传送[Thomson, 1994]。进一步采用自适应数据压缩方法最小化 TDM 信号的数据速率，因为 TDM 数据流中一些 TV 信道的数据编码后，可能比其他数据速率要低，这主要依赖于每个视频源的运动情况(或其他特性)。更多 DSS 系统的细节在助学例题 SA8-1 和 SA8-2 中进行了描述。数字电视的编码将在 8.9 节讨论。

DVB-S2(卫星视频数字广播，第二代)信号格式在欧洲很流行。在美国，目前 DirecTV 公司正在关注 DVB-S2 信号格式，Dish 网络公司对该信号格式进行测试。DVB-S2 在 MPEG 标准数据流中采用 QPSK 或 8PSK 调制方式。更详细的内容请参考维基百科中的条目 DVB-S2。

对用卫星传输的模拟电视信号来说，一个电视信道的基带视频信号是以调频的方式调制到载波上的。例如，常使用有 24 个转发器的 C 波段卫星，转发 TV 信号到 CATV 系统的前端(如图 8.10所示)。如图 8.11 所示，对每一个转发器，一个 TV 信道上的 4.5 MHz 带宽的基带组合视频信号以调频方式被调制到一个 6 GHz 的载波上。如 8.9 节中所述，组合视频信号由黑白视频信号、彩色子载波信号和同步脉冲信号组成。伴音信号也以调频方式调制到一个与组合视频

信号频分复用的6.8 MHz载波上，在同一转发器上转发。最终的带宽信号以调频方式调制到发射机上。

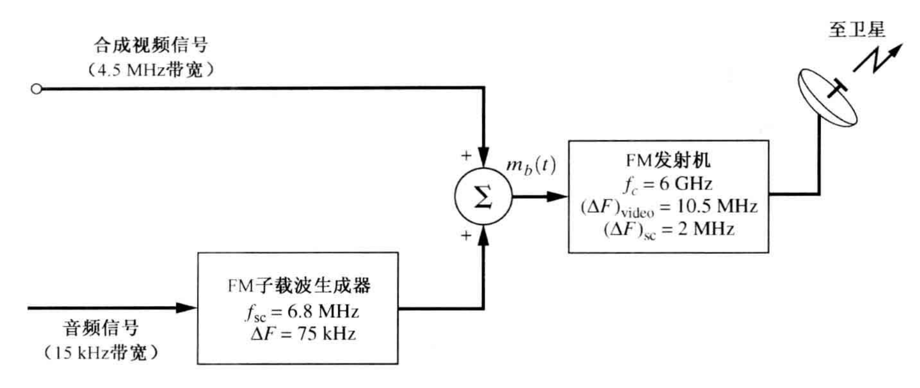


图8.11 来自地面站的广播品质的模拟TV信号的传输

6 GHz的FM信号带宽可以应用卡森(Carson)定律分析。组合视频信号的峰值偏移量为10.5 MHz，子载波的峰值偏移为2 MHz。则总的峰值偏移量为$\Delta F = 12.5$ MHz，基带信号带宽大约为6.8 MHz。传输带宽为

$$B_T = 2(\Delta F + B) = 2(12.5 + 6.8) = 38.6 \text{ MHz} \tag{8.1}$$

这个带宽是可以被36 MHz的转发器接受的。另外，其他带宽伴音信号(0～15 kHz)也可以使用FM子载波转发。一些子载波频率的典型值为5.58 MHz，5.76 MHz，6.2 MHz，6.3 MHz，6.48 MHz，6.8 MHz，7.38 MHz和7.56 MHz。

8.5.2 数据和电话信号的多址方式

卫星转发类似于传统的微波无线链路，为数据和VF(电话)信号提供一个信道，即数据时分复用到DS-1、DS-2等信道上。各类信号调制到一个载波上，通过卫星传送。

卫星通信系统在技术上采用单转发器的多上行和多下行站的多址方式，与地面微波链路是不同的。有四种主要的多址方法：

1. 频分多址(FDMA)，与FDM相似；
2. 时分多址(TDMA)，与TDM相似；①
3. 码分多址(CDMA)或扩频多址(SSMA)。
4. 空分多址(SDMA)，使用窄波束天线来从一个方向切换到另一个方向。

另外，下面两种技术之一也可被使用：

1. 固定分配多址(FAMA)模式，使用FDMA、TDMA或CDMA技术；
2. 按需分配多址(DAMA)模式，使用FDMA、TDMA或CDMA技术。

在固定分配多址模式中，甚至于不同地面站的业务负载发生了改变，其FDMA、TDMA或CDMA格式都不改变。例如，这些地面站之间白天的电话比午夜后的电话业务量要大。在FAMA模式中大多数卫星信道在凌晨的几个钟头内可能就不工作了，因为它们是固定分配

① 也能采用卫星交换TDMA(SS-TDMA)技术。在SS-TDMA卫星系统中，不同的窄波束天线在TDMA帧中适当的时刻进行切换，以使发射和接收的波束指向想要的方向。于是在SS-TDMA系统中，同一发射和接收频率可以被同时使用。故SS-TDMA系统的容量比TDMA卫星系统的容量要大。Intelsat VIII就是一个SS-TDMA卫星。

的。而在 DAMA 模式中，FDMA 和 TDMA 的格式随需求的不同而不同，主要依赖于地球站的业务。于是 DAMA 模式就更有效地利用了卫星容量，但是它通常需要更多的花费来实现和维护。

与 FDMA 或 TDMA 中不同的用户被分配到不同的频率和时隙中正好相反，在 CDMA 系统中，不同用户在同一时间内使用同一频段。在 CDMA 系统中，每个用户被分配了一个与其他用户近似正交的数字编码波形 $\varphi_j(t)$（见 2.4 节和 5.13 节）。数据被调制到这个信号上，在通信系统中传输并恢复。例如，1 比特的数据 m_j 被调制到扩频码上，第 j 个用户的发送信号就是 $m_j\varphi_j(t)$，而所有用户的组合信号为 $w(t) = \sum_j m_j\varphi_j(t)$。第 j 个用户的数据可以通过计算 $\int_0^T w(t)\varphi_j(t)\mathrm{d}t = m_j$，从 CDMA 信号中恢复，其中 T 为扩频码 $\varphi_j(t)$ 的长度。Gold 码通常用做扩频码。

例题 8.1　SPADE 系统

Intelsat 系列卫星也可以按每个电话（VF）信道由一个 QPSK 载波组成的 FDMA 格式以 DAMA 模式运行。这种形式的信号称为每载波单信道（SCPC）格式，如图 8.12（a）所示，36 MHz 带宽的转发器包含 800 路 QPSK 信号。于是 800 路 VF 信息可以同时在卫星转发器传输，每一个 QPSK 信号被一个 64 kbps PCM 语音信号调制（在例题 3.1 中已讨论，且如图 3.40 所示，它被作为北美数据体系的输入）。这种如图 8.12 所示的 SCPC-DAMA 技术称为 SPADE 系统，它是单信道、每载波、脉冲编码调制、多址、按需分配设备等单词的缩写［Edelson 和 Werth，1972］。

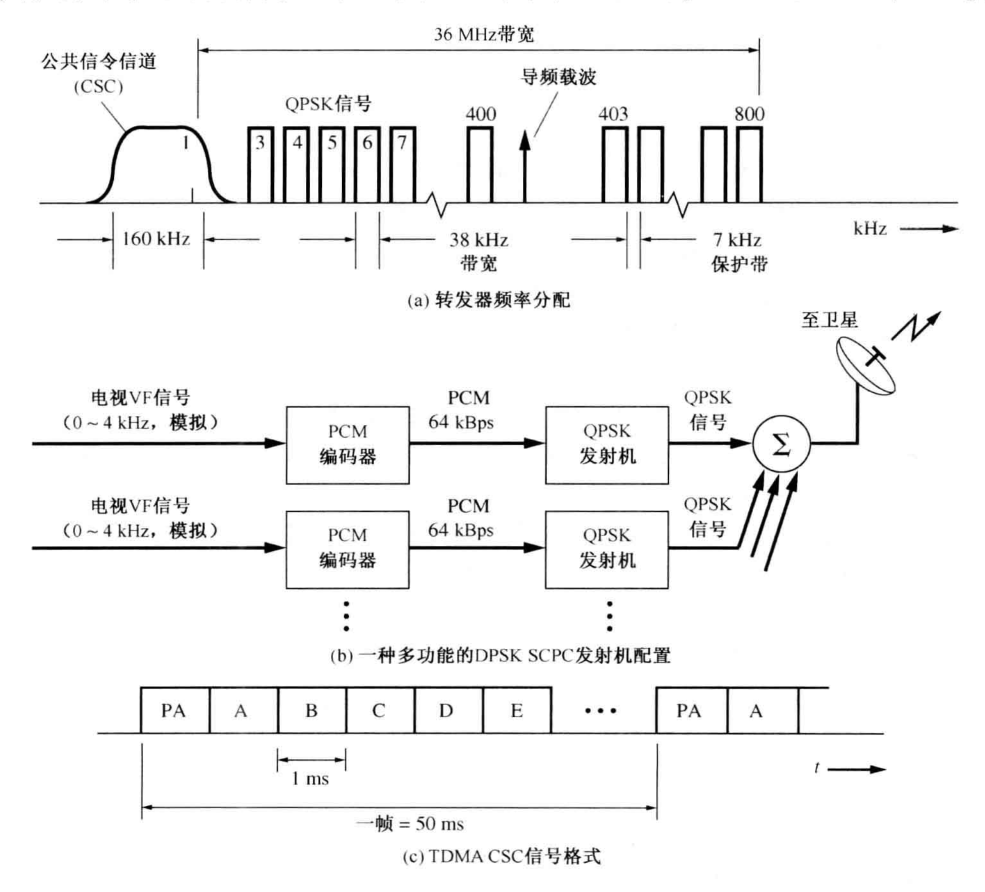


图 8.12　用于电话 VF 消息传输的 SPADE 卫星通信系统

对一个特定的地球站，上行链路的QPSK信号载波频率的分配是通过公众信令信道(CSC)的TDM信号来执行的[见图8.12(a)]。如图8.12(c)所示，CSC由一个地球站中以TDMA格式，在时间上共享的128 kbps PSK信号组成。PA代表每帧开始的同步头，A、B、C等代表地球站A、B、C传输时所用的长度为1 ms的时隙。因此在一个50 ms的帧中可安排49个不同的地球站。例如，如果地球站B希望对地球站D发起一个呼叫，站B从空闲信道中随机选择一个QPSK载波频率，并在站B的TDMA时隙往D站的地址传送频率信息。如果假定这个频率没有被其他站的其他呼叫所占用，站D将在其TDMA时隙确认请求。这个确认信号在TDMA请求信号发出600 ms后被站B听到，因为到卫星的整个回路延时为240 ms，还要加上设备延时和根据B站精确分配给D站的时隙的时延。如果另外一个站C在请求期间已选定了同一频率，那么B站将收到忙信号，并随机地选取另一个空闲的频率再次发送。当呼叫结束时，拆线信号在TDMA时隙中传送，载波频率可以被重新使用。因为CSC信号速率为128 kbps，每个时隙的时间为1 ms，所以每个接入站有128比特来传送地址信息、频率信息和断开信号。

在实际系统中，TDMA模式仅有49个时隙，大量的SCPC频率都是固定分配的。

在FDMA系统中，如SPADE系统，当载波根据需求被使用或空闲时，被转发器TWT放大的组合36 MHz带宽的信号上会有一个幅度调制过程。结果，TWT的驱动电平不得不被补偿，以使放大器不饱和并且保证其足够线性，因此互调产物将足够小。另一方面，如果只使用了一个恒定幅度信号(如电视信号转发中单一的宽带FM信号)，互调产物将不被考虑，放大器将很难被驱动来提供全饱和功率输出电平。

如前所述，TDMA与TDM很相似，不同的地球站发射包含信息包的突发RF能量。在分配给某一特定地球站的时隙中，地球站信号占用整个转发器的带宽(见图8.13)。因为地球站采用恒定包络调制技术，如QPSK，并且因为在任一时刻仅有一路高速率调制信号通过了转发器，所以没有互调干扰产物的产生(与前面所述的FDMA技术相比)。这样，最后的TWT放大器将被驱动至饱和以提供更大的功率输出。TDMA与FDMA相比的优越性可与TDMA技术的缺陷相比较。TDMA的缺陷就是地球站需要严格的定时以避免卫星上的碰撞，换而言之就是某一地球站的信号必须精确的在设计好的时隙中到达卫星，以避免与相邻时隙其他站的信号相互干扰。因为各地球站离卫星的距离不同及配置不同，每个地面站到卫星的时延就不同，这些是在发射时每个地面站必须考虑的。另外，卫星会相对于地球站运动，这意味着时延是时变的。TDMA的另一个缺点就是地球站可能发射来自同步地区线的数据。于是，地面站设备必须包含一个大的存储器，来缓冲以高速率读出并以信息包形式发射给卫星的数据。

卫星转发的一个典型的TDMA数据帧格式如图8.14所示。在这个例子中，站B发送数据到站A、E、G和H，每帧由来自不同地球站的数据组成。在任何时刻都有一个地球站为其他地球站提供时间参考信号，以用于计算它们数据块的发射时间。从不同地球站来的数据块的长度依赖于业务量，图的第二部分为从B站发射的一个典型数据块格式。它由两个主要部分组成——帧头和从B站发送到其他地球站的数据。帧头包括发送开始前的保护时间，紧接着是一串同步字符以给载波同步恢复环路和比特定时恢复环路(在地球站接收机)提供锁定到从B站发送的数据块的时钟。帧头的结束部分通常是表明数据块来自于B站的识别字，也可能是数据将要到达的地址。

另一种类似于TDMA的多址方法是ALOHA技术[Lam, 1979]。多个用户发送突发数据块，称为分组包。当两个或更多数据块在时间上重叠时，就产生碰撞。当发生碰撞时用户就在一个随机时延后重传它们的分组包。于是，第二次碰撞就有希望不发生。如果仍发生碰撞，重传的

过程将一直继续下去，直到所有用户都成功发送。这种技术有实现起来相对便宜的好处，但是如果卫星上有很严重的业务负荷，它将不工作，因为在这种情况下，卫星会由于碰撞的数据块而变得饱和，这种碰撞只能通过停止所有的新的传输和增加重传前的随机时延来克服。一个更复杂的技术称为时隙 ALOHA。用这种方法，分组包只是在某些时隙随机发送。这样由于只有部分包重叠就避免了碰撞。

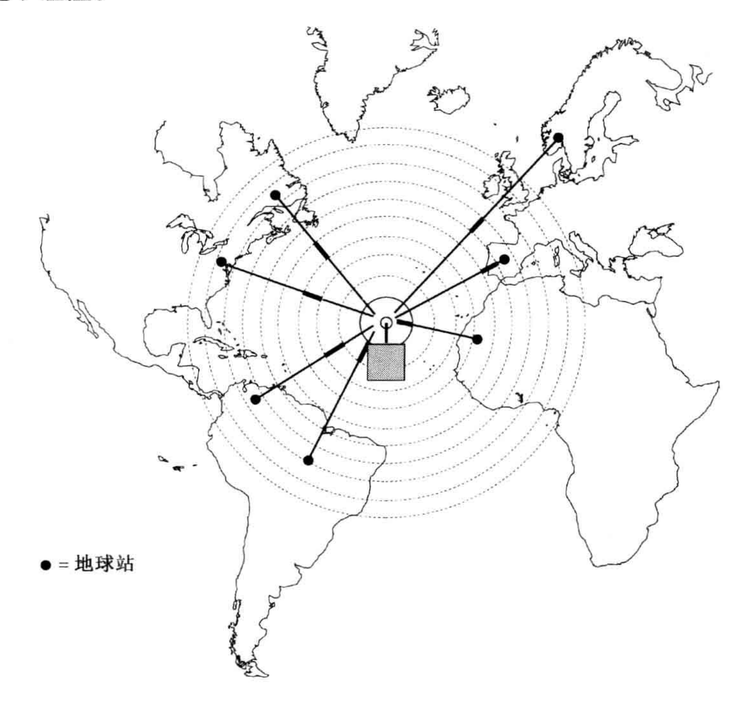


图 8.13　TDMA 卫星系统中的突发性交织

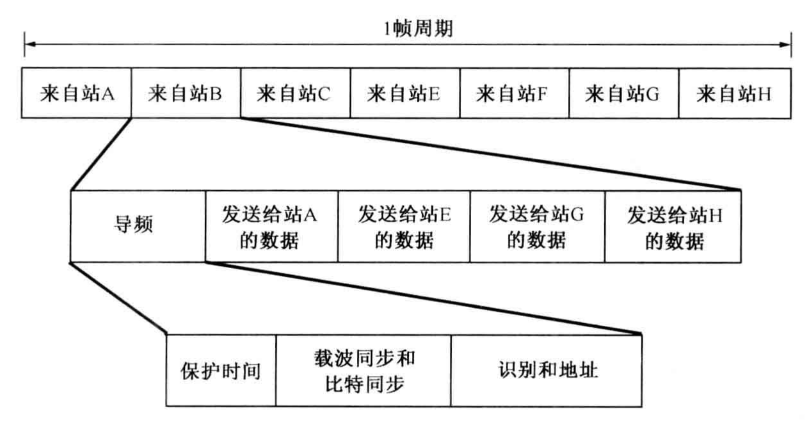


图 8.14　典型的 TDMA 数据帧格式

由于 Ku 波段卫星的应用和近年来技术的发展使低成本终端变为可能，甚小口径终端(VSAT)变得流行起来。小口径意味着这些系统使用相对较小的地球终端天线(直径大约1 m或2 m)。固态功率放大器(1 ~2 W)、低成本频率转换器、数据处理和 VLSI 电路使得 VSAT 变为现实。VSAT 系统的目标就是给用户直接提供低成本的数据和语音传输服务，如自动购物机、银行(自动柜员机)、经纪商、管道公司(监控)、旅馆和航空(预定)、零售店(数字网络)和公司

(点对多点传输)。典型的 VSAT 系统能提供高质量(误码率在 99.5% 的时间内低于 10^{-7})的数据传输，速率达 100 bps 到 64 kbps [Chakraborty, 1988; Maral, 1995]。许多用户通过 SCPC、TDMA 或 CDMA 共享同一卫星转发器，于是用户的成本比由长距离的公共电话网提供的相同业务低得多[Dorf, 1993, p. 2201; Maral, 1995; Rana, McCoskey 和 Check, 1990]。关于 VSAT 系统的更多信息见[Pratt 等, 2003]。

8.5.3 卫星无线广播

数字卫星音频无线业务(SDARS)是 FCC 用卫星将多个数字音频流广播到用户的术语。典型情况下，用户的费用是 100 个信道每月 13 美元。音频内容包含音乐、新闻、运动、天气和其他娱乐信道。在美国，FCC 对两个供应商进行了授权：Sirius Radio 公司和 XM Radio 公司。2008 年 7 月，Sirius Radio 公司收购了 XM Radio 公司，合并后的公司称为 Sirius XM Radio 公司。SDARS 的一些技术参数如表 8.3所示。

表 8.3 美国数字音频卫星系统

卫星参数	Sirius 无线卫星系统	XM 无线卫星系统
卫星个数	3	2
卫星发射功率	3 kW EIRP	228 W(TWT 输出)
卫星轨道	椭圆，16 小时在正上方	同步，卫星位于西经 85°和西经 115°
到卫星的仰角	>60°典型值	>45°典型值
上行链路频率	7060.0 ~ 7072.5 MHz	7050.0 ~ 7075.0 MHz
下行链路频率	2320.0 ~ 2324.0 MHz 以及 2328.5 ~ 2332.5 MHz	2332.5 ~ 2336.5 MHz 以及 2341.0 ~ 2345.0 MHz
下行信号带宽	4.2 MHz	2 × 1.84 MHz
卫星输出调制	TDM/QPSK	TDM/QPSK
TDM 数据率[a]	4.4 Mbps	4.0 Mbps
信源数据编码	Lucent PAC[b]	Lucent PAC[b]
TDM 音乐信道数	大约 50	大约 50
音乐信道数据速率	64 kbps(可变)	64 kbps(可变)
TDM 话路数	大约 50	大约 50
话路数据速率	24 kbps	24 kbps
地面转发器参数		
转发器数	大约 46 个城市 105 个	大约 70 个城市 1500 个
转发器 EIRP	5 kW 每天线扇区	大多为 2 kW，但是≤10 kW
输出频率	2324.0 ~ 2328.5 MHz	2336.5 ~ 2341.0 MHz
转发器调制	TDM/OFDM	TDM/OFDM
调制延时[c]	4 ~ 5 s	4 ~ 5 s

a. 在 FEC 之前。链接码被加至 FEC：RS 码作为外码，码率 1/2；卷积码作为内码；
b. PAC 为知觉音频编解码器；
c. 相对于卫星调制。

Sirius 公司使用三颗置于椭圆形轨道的且周期为 24 小时的卫星，这样单个卫星每一次在一个站点上停留 16 小时。在任意时刻，总可以看到两颗卫星，于是可以同时接收到两者的数据，这提供了冗余(即路径分集接收)。通过在两个下行链路上发射冗余的数据，也提供了频率分集，如图 8.15(a)所示。此外，通过将其中一个卫星发射的数据进行 4 s 的延时，也提供了时间分集。应用这些分集技术，将链路中断的影响以及数据错误的概率减小到了最小。

XM 公司使用了两颗分别位于赤道上方西经 85°和西经 115°的同步(GEO)卫星。在美国，

可以同时接收来自两颗卫星的信号。采用路径、频率以及时间分集技术，将链路中断的影响以及数据错误的概率减小到了最小。

SDARS 系统下行链路的频率在 2.3 GHz 波段(见表 8.3)，并且每一个 SDARS 系统被分配了一个 12.5 MHz 带宽的信道，如图 8.15 所示。多音频信道的比特流以时分复用的方式产生一个 4 Mbps 的组合数据率。此外，该 TDM 数据流中也加入了前向纠错编码(FEC)。在提供给用户的下行链路信号上，该编码的数据流采用的是 QPSK 调制。遗憾的是，这些接收到的 TDM/QPSK 卫星信号将被大的建筑物、隧道和地铁等遮拦掉(即衰减)。由于建筑物和其他物体的反射，也存在着多径效应。多径效应主要发生在城区而非农村地区。为了消除这些影响，在市内和城区的周边放置了一些陆地转发器。这些转发器的参数如表 8.3 所示，它们采用 OFDM 方式，并且频率分配如图 8.15 所示。转发器的数据相对于从卫星接收到的数据有 4 s 的时延。这些转发器提供了额外的空间、时间和频率分集，从而保证了系统的可靠性。

关于卫星通信系统更多内容，读者可阅读一本优秀的参考书[Pratt 等, 2003]。

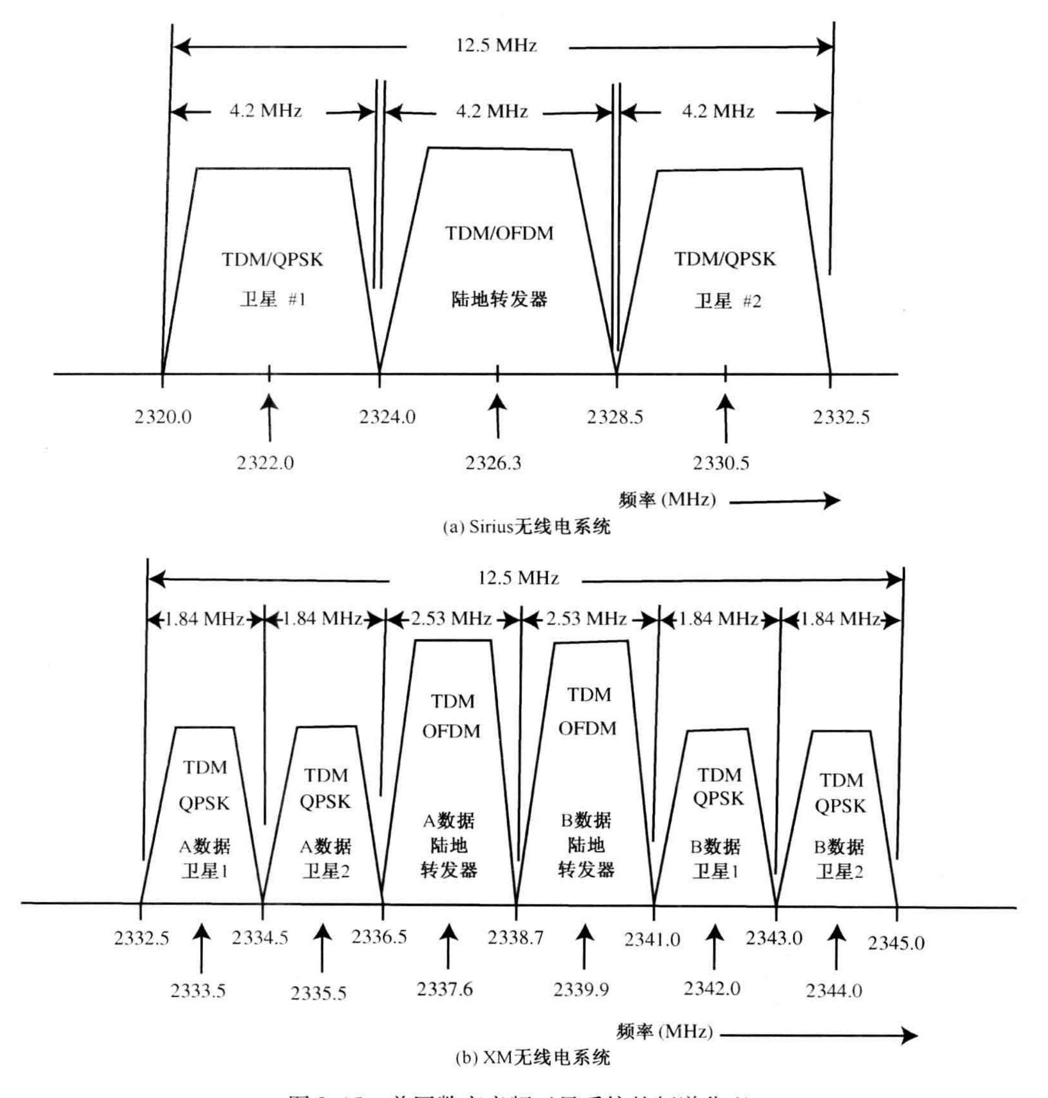


图 8.15　美国数字音频卫星系统的频谱分配

8.6 链路预算分析

在本节中，我们将分析并得到检测器输入端信噪比的公式，该信噪比是发射的有效全向辐射功率(EIRP)、自由路径损耗、接收机天线增益及接收机噪声系数的函数。在已知接收机检测电路噪声特性的前提下，这些分析得到的结果可用于分析接收机输出的性能(如数字系统的误码率和模拟系统的信噪比)。

8.6.1 接收到的信号功率

在通信系统中，接收到的信号功率(相对电压和电流)是一个很重要的量。当我们尽力减弱馈入到系统中并被放大了的噪声对系统的影响时，接收到的信号功率就是一个重要的参量。电压增益、电流增益和阻值电平都必须满足要求以达到所需的功率增益。在 FET 电路中，这是通过使用相对大一点的电压和相对小一点的电流来实现的(高阻抗电路)。通过使用二极管，就可用达到使用相对较小的电压和大电流(低阻抗电路)来实现功率增益。

自由空间传输信道的通信系统方框图如图 8.16 所示，整个信道的功率增益(或功率传输函数)为：

$$\frac{P_{\mathrm{Rx}}}{P_{\mathrm{Tx}}} = G_{\mathrm{AT}} G_{\mathrm{FS}} G_{\mathrm{AR}} \tag{8.2}$$

其中，P_{Tx}是输入发射天线的信号功率，G_{AT}是发射天线的功率增益，G_{FS}是自由空间功率增益①(在典型的通信系统中它小于幅度的一次幂)，G_{AR}是接收天线功率增益，P_{RX}是输入接收机的信号功率。

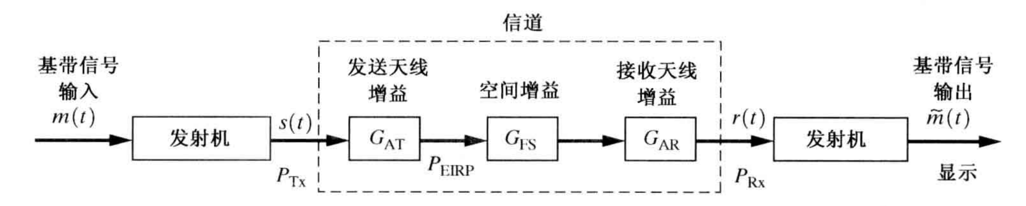


图 8.16 自由空间传输信道的通信系统方框图

为应用以上关系，这些增益应表示成天线和自由空间参数的形式[kraus，1986]，这里 G_{AT} 和 G_{AR}是相对全向天线的功率增益②。EIRP 为

$$P_{\mathrm{EIRP}} = G_{\mathrm{AT}} P_{\mathrm{Tx}} \tag{8.3}$$

天线功率增益定义为

$$G_A = \frac{\text{天线在最大方向上的辐射功率密度}}{\text{具有相同输入功率的全向天线辐射功率密度}}$$

其中，功率密度(以 $\mathrm{W/m^2}$计)是在同一距离 d 上对两个天线的结果。一些典型天线的增益如表 8.4 所示。

距离全向天线 d 处的功率密度为

$$d\text{ 处的功率密度} = \frac{\text{发射功率}}{\text{以 } d \text{ 为半径的球面积}} = \frac{P_{\mathrm{EIRP}}}{4\pi d^2} \tag{8.4}$$

① 增益传输函数为输出与输入之比，而损耗传输函数为输入与输出之比。

② 全方向性天线是不可实现的理论上的天线，其在各方向上的辐射相同，是用于与实际天线比较的一个很好的参考量。

表 8.4　天线增益和有效面积

天线类型	功率增益 G_A（绝对单位）	有效面积，A_e（m^2）
各向同性	1	$\lambda^2/4\pi$
无穷小偶极子或环	1.5	$1.5\lambda^2/4\pi$
半波振子	1.64	$1.64\lambda^2/4\pi$
喇叭形天线（优化），口区域面积，A	$10A/\lambda^2$	$0.81A$
抛物面天线或脸型的盘，A	$7.0A/\lambda^2$	$0.56A$
绕杆式天线（两个交叉振子反馈 90°的相位差）	1.15	$1.15\lambda^2/4\pi$

FCC 和其他组织经常用场强$\mathscr{E}$（V/m）代替功率密度（W/m^2）来描述电场强度。两者的关系为：

$$\text{功率密度} = \frac{\mathscr{E}^2}{377} \tag{8.5}$$

其中，功率密度和场强是在同一点上的测量结果，377 Ω 是自由空间特性阻抗。如果接收天线距发射天线为 d m，它将吸收有效区域$(A_e)_{Rx}$（m^2）内的所有功率，于是接收到的功率为

$$P_{Rx} = G_{AT}\left(\frac{P_{Tx}}{4\pi d^2}\right)(A_e)_{Rx} \tag{8.6}$$

发射天线的增益 G_{AT}已包括在其中。表 8.4 也给出了几种类型天线的有效区域。天线的增益和有效区域的关系为

$$G_A = \frac{4\pi A_e}{\lambda^2} \tag{8.7}$$

其中，$\lambda = c/f$ 是波长，c 是光速（3×10^8 m/s），f 是频率（以 Hz 为单位）。天线是互易元，即它发射和接收时具有相同的增益特性，将式（8.7）代入式（8.6），得到

$$\frac{P_{Rx}}{P_{Tx}} = G_{AT}\left(\frac{\lambda}{4\pi d}\right)^2 G_{AR} \tag{8.8}$$

其中，自由空间增益为

$$G_{FS} = \left(\frac{\lambda}{4\pi d}\right)^2 = \frac{1}{L_{FS}} \tag{8.9}$$

其中，L_{FS}为自由空间路径损耗。对式（8.2）的两边同时进行 10log[·]运算就可以把信道增益表示成 dB 形式：

$$(G_{channel})_{dB} = (G_{AT})_{dB} - (L_{FS})_{dB} + (G_{AR})_{dB} \tag{8.10}$$

在式（8.10）中，自由空间损耗为①

$$(L_{FS})_{dB} = 20\log\left(\frac{4\pi d}{\lambda}\right) \text{dB} \tag{8.11}$$

例如，对同步卫星到地球的最短路径（22 300 英里），在 4 GHz 频段上的自由路径损耗为 195.6 dB。

注意，由式（8.8）可知，接收功率随波长的平方增加（自由空间条件下）。也就是说，如果载波的频率以因子 2 下降的话，则接收功率以因子 4 增加。这等同于损耗降低 6 dB，如式（8.11）所示。

① 在城市建筑物环境下，自由空间路径损耗的表达式可修正为包含城区建筑环境中多路径效应的形式，见式（8.67）。

8.6.2 热噪声源

我们研究热噪声源产生的噪声功率，是因为接收机的噪声来源于热噪声。一个有两个端子的导体元件可以用 R Ω 的电阻来描述。这个阻抗或损耗元件包含了自由电子的随机运动。只要电阻的温度高于热力学零度，就会存在这种运动。电子的随机运动在电阻的两端产生了一个噪声电压，尽管噪声很小，但是当噪声被高增益接收机放大时，就会有问题(如果没有噪声，那么我们可以用极小的功率与无穷远的地方通信，因为信号可以被放大而不引入噪声)。

物理损耗元件或一个物理电阻可以等效成由一个无噪声电阻和一个噪声电压源串联的电路(见图 8.17)。从量子物理可以看到电压源[Van der ziel, 1986]的功率谱为

$$\mathcal{P}_v(f) = 2R\left[\frac{h|f|}{2} + \frac{h|f|}{e^{h|f|/(kT)} - 1}\right] \tag{8.12}$$

其中，R = 电阻值(Ω)；$h = 6.63 \times 10^{-34}$ $\mathrm{J_{-sec}}$是普朗克常数；$k = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K 是玻尔兹曼常数，其中 K 为开尔文；$T = (273 + C)$是电阻的热力学温度(开尔文)



(a) 用电阻特性来描述的损耗电路元件　　(b) 损耗电路元件的戴维南等效电路模型

图 8.17　热噪声源

在室温及频率低于 1000 GHz 时，$[h|f|/(kT)] < 1/5$，可以用 $e^x = 1 + x$ 近似。于是式(8.12)变为

$$\mathcal{P}_v(f) = 2RkT \tag{8.13}$$

因为射频频率常常低于 1000 GHz，且温度不在热力学零度附近，所以该式将用于分析得到其他公式。

如果用带宽为 B Hz 的 rms 电压表测量通过电阻的开环电路的噪声电压值的话，应用式(2.67)，就可以求得电压表的读数为

$$V_{rms} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{2\int_0^B \mathcal{P}_v(f)\,\mathrm{d}f} = \sqrt{4kTBR} \tag{8.14}$$

8.6.3 噪声源的特性

噪声源的特性可以通过其加到负载上的最大噪声功率或 PSD 来描述。

定义　可用噪声功率是从噪声源得到的最大[①]实际(即无归一化)功率。可用 PSD 是从噪声源得到的最大实际 PSD。

① 当 $Z_L(f) = Z_s^*(f)$时，可达到最大功率或最大 PSD。其中，$Z_L(f)$是负载阻抗，而 $Z_s^*(f)$是源阻抗的共轭。

例如，应用式(2.142)和图 8.18 很容易得到热噪声源的 PSD：

$$\mathcal{P}_a(f) = \frac{\mathcal{P}_v(f)|H(f)|^2}{R} = \frac{1}{2}kT \quad \text{W/Hz} \tag{8.15}$$

其中，对于分压阻抗网络，$H(f) = 1/2$，在带宽为 B Hz 的频带上从噪声源得到功率为

$$P_a = \int_{-B}^{B} \mathcal{P}_a(f)\,\mathrm{d}f = \int_{-B}^{B} \frac{1}{2}kT\,\mathrm{d}f$$

或

$$P_a = kTB \tag{8.16}$$

该公式意味着从噪声源得到的噪声功率不像开环电路的 rms 电压一样依赖于其电阻 R。

从源(不一定非得是热源)得到的噪声功率可以用噪声温度来描述。

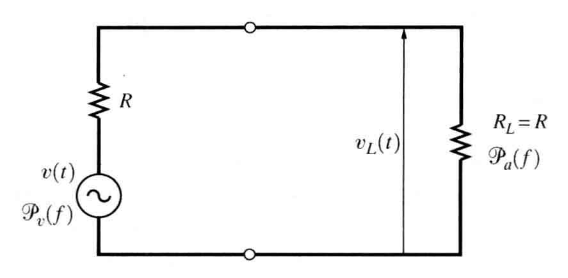


图 8.18　具有匹配负载的热源

定义　一个源的噪声温度为

$$T = \frac{P_a}{kB} \tag{8.17}$$

其中，P_a是在 B Hz 的带宽内源的可用功率。

应用这个定义，当源为热源时，T 则为设备的温度(开尔文形式)。但当源不是热源时，T 的数值与设备的物理温度无关系。

8.6.4　线性设备的噪声特性

一个有内部噪声源的线性设备的等效模型如图 8.19 所示。任何设备都有一些内部噪声源。如图中所示，一个设备可等效为由一个功率增益为 $G_a(f)$ 的无噪声设备和描述设备内部噪声的等效噪声源组成。一些接收机中线性设备的实例有：损耗传输线、RF 放大器、下变频器和中放等。

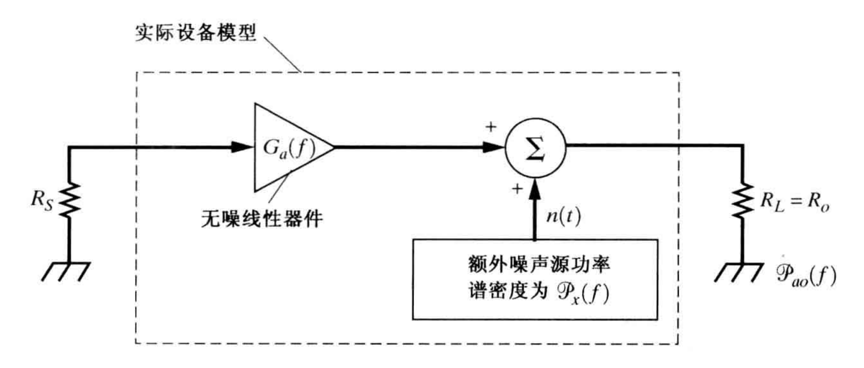


图 8.19　实际设备的噪声等效模型

设备的功率增益就是可用的功率增益。

定义　一个线性设备的可用功率增益为

$$G_a(f) = \frac{\text{设备输出的可用PSD}}{\text{源输出的可用PSD}} = \frac{\mathcal{P}_{ao}(f)}{\mathcal{P}_{as}(f)} \tag{8.18}$$

当为得到 $G_a(f)$ 去测量 $P_{ao}(f)$ 时，源的噪声功率必须足够大，以至于与其他输出噪声相比，放大的源的噪声占主要地位。另外，注意 $G_a(f)$ 是以实际(即非归一化)PSD 形式定义的。在通常状况下，$G_a(f)$ 将依赖于驱动源阻抗，而不依赖于负载电导。如果源的电导与负载电导相等，那么 $G_a(f)=|H(f)|^2$，其中 $H(f)$ 是线性设备的电压或电流传输函数。

为评估设备特性的好坏，需要用数字来比较实际的设备与理想设备(无内部噪声源)的性能。我们常用两个参数来描述同一件事，即实际设备的噪声性能如何差。这两个参数是噪声系数和有效输入噪声温度。

定义 线性设备的点噪声系数是通过在图 8.19 所示的输入端连接一个温度为 T_0 的热噪声源而在输出端连接一个匹配的负载得到的，点噪声系数为

$$F_s(f)=\frac{\text{测量到的实际设备的输出可用 PSD}}{\text{具有相同可用增益的理想设备的可用 PSD}}$$

或

$$F_s(f)=\frac{\mathcal{P}_{ao}(f)}{(kT_0/2)G_a(f)}=\frac{(kT_0/2)G_a(f)+P_x(f)}{(kT_0/2)G_a(f)}>1 \tag{8.19}$$

当分析 $G_a(f)$ 时，R_s 的值与所使用的源的阻抗相同。使用的标准温度为 $T_0=290$ K，这是 IEEE 采用的值[Haus，1963]。

$F_s(f)$ 被称为点噪声系数是因为它是频谱中某一特殊点或频率上的噪声特性。注意，一个实际设备的 $F_s(f)$ 通常大于 1，但是如果一个设备近似为理想设备的话，那么它就接近于 1。$F_s(f)$ 是噪声源温度 T_0 的函数。于是，当分析噪声系数时，就使用标准温度 $T_0=290$ K。其相对值为华氏 62.3°。

通常我们需要用平均噪声系数取代点噪声系数。平均是指在一定带宽 B 上去平均。

定义 平均噪声系数为

$$F=\frac{P_{ao}}{kT_0\int_{f_0-B/2}^{f_0+B/2}G_a(f)\,df} \tag{8.20}$$

其中，

$$P_{ao}=2\int_{f_0-B/2}^{f_0+B/2}\mathcal{P}_{ao}(f)\,df$$

是测量到的以 f_0 为中心频率，B Hz 为带宽，$T_0=290$ K 时的可用输出。

如果可获得的增益在整个频带上为常数，于是在频率间隔 $(f_0-B/2)\leqslant f\leqslant(f_0+B/2)$ 上有 $G_a(f)=G_a$，那么噪声系数就变为

$$F=\frac{P_{ao}}{kT_0BG_a} \tag{8.21a}$$

噪声系数经常用 Y 因子方法测量，这项技术在习题 8.19 中有说明。Agilent（安捷伦）公司的 N8973A 噪声系数仪就是用 Y 因子方法测量设备的噪声系数的。

噪声系数也能够以分贝为单位来描述①：

① 一些作者称 F 为噪声因子，F_{dB} 为噪声系数。

$$F_{\mathrm{dB}} = 10\log(F) = 10\log\left(\frac{P_{ao}}{kT_0BG_a}\right) \tag{8.21b}$$

例如，假定一个 RF 前置放大器的生产商标明一个 RF 前置放大器有 2 dB 噪声系数，这意味着实际输出噪声为 1.58 乘以输入端放大的热噪声功率。另一个分析线性设备噪声特性的特征系数是有效输入噪声温度，如图 8.20 所示。

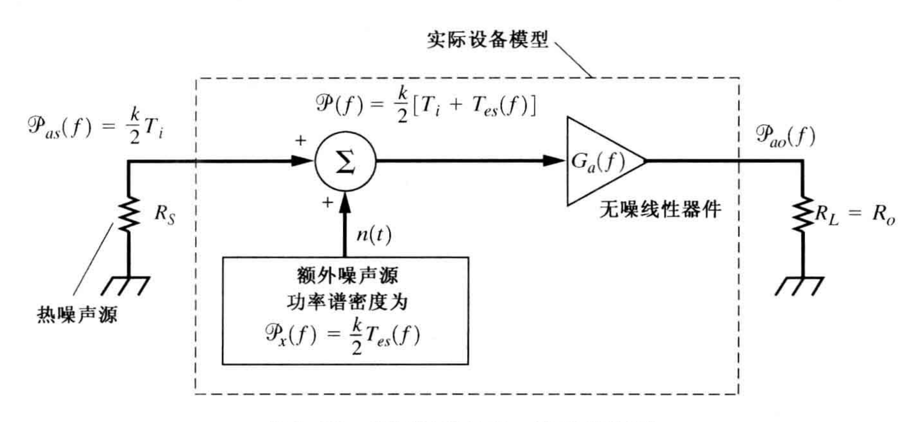


图 8.20　实际设备的另一种噪声模型

定义　线性设备的"点有效输入噪声温度"$T_{es}(f)$ 为一个输入源所需的附加温度。该温度用以驱动理想设备以使理想设备的输出端与实际设备在被热力学温度为 T_i 的输入源驱动时产生同样的 PSD，即 $T_{es}(f)$ 定义为

$$\mathcal{P}_{ao}(f) = G_a(f)\frac{k}{2}[T_i + T_{es}(f)] \tag{8.22}$$

其中，$\mathcal{P}_{ao}(f)$ 为被热力学温度为 T_i 的输入源驱动的实际设备所产生的可用 PSD，$T_{es}(f)$ 为点有效输入噪声温度。

平均有效输入噪声温度 T_e 定义为

$$P_{ao} = k(T_i + T_e)\int_{f_0-B/2}^{f_0+B/2} G_a(f)\,\mathrm{d}f \tag{8.23}$$

其中，在带宽为 B 的频带内测量到的设备的可用噪声功率为

$$P_{ao} = 2\int_{f_0-B/2}^{f_0+B/2} \mathcal{P}_{ao}(f)\,\mathrm{d}f \tag{8.24}$$

因为 $G_a(f)$ 既依赖于设备的参数也依赖于源的阻抗，所以 $T_e(f)$ 将依赖于使用的源的阻抗。但是其独立于使用的温度 T_i。在 T_e 的定义中，IEEE 标准未注明 $T_i = T_0$，因为 T_e 不依赖于使用的 T_i。然而使用 $T_i = T_0 = 290$ 可以带来一些方便，如习题 8.19 所述，有效输入噪声温度可以用 Y 因子法分析。

当在整个频段上增益为常数，即 $G_a(f) = G_a$ 时，有效输入噪声温度为

$$T_e = \frac{P_{ao} - kT_iG_aB}{kG_aB} \tag{8.25}$$

注意，对于一个实际系统，$T_{es}(f)$ 和 T_e 大于零。但是如果一个设备近似为理想设备，则它们接近于 0。

当 T_e 的值用式(8.23)分析时，输入源通常选用比较常见的温度 T_i。然而，当设备用于系统

中，如果 T_i 不同，则可用噪声功率也不同。例如，假定设备为 RF 前置放大器，源为天线，当放大器连接到天线时，其有效功率为①

$$P_{ao} = 2\int_{f_0-B/2}^{f_0+B/2} \mathcal{P}_{as}(f)G_a(f)\,\mathrm{d}f + kT_e\int_{f_0-B/2}^{f_0+B/2} G_a(f)\,\mathrm{d}f \tag{8.26}$$

其中，$\mathcal{P}_{as}(f)$ 为源(天线)的可用 PSD，T_e 为通过计算输入源的 T_i 得到的放大器的平均有效输入温度。如果放大器的增益在整个频带上为常数，上式就可以简化为

$$P_{ao} = G_aP_{as} + kT_eB\,G_a \tag{8.27}$$

其中，源(天线)的可用功率为

$$P_{as} = 2\int_{f_0-B/2}^{f_0+B/2} \mathcal{P}_{as}(f)\,\mathrm{d}f \tag{8.28}$$

进一步，源的可用功率可用噪声温度 T_s 来描述。于是应用式(8.17)，我们得到：

$$P_{as} = kT_sB \tag{8.29}$$

在卫星地面站接收机中，抛物面天线在 4 GHz 的噪声温度可能为 $T_s = 32$ K，其中天线上的噪声来源于宇宙辐射和天线各旁瓣接收到的能量(地球像一个温度为 $T = 280$ K 的黑体噪声源)。注意，由于辐射电阻而使天线满足 $T_s = 32$ K，辐射电阻与热源有关的损耗阻抗不同，T_s 与天线的物理温度无关。

总之，我们定义了两种系数指标——噪声系数和有效输入噪声温度。结合式(8.19)和式(8.22)，其中 $T_i = T_0$，我们得到两种系数指标对于点测量的关系为

$$T_{es}(f) = T_0[F_s(f) - 1] \tag{8.30a}$$

这里要求 $T_i = T_0$，因为 $T_i = T_0$ 用于定义式(8.19)前面的噪声系数。

应用式(8.21a)和式(8.25)，其中 $T_i = T_0$，我们得到对于平均测量相同的关系式：

$$T_e = T_0(F - 1) \tag{8.30b}$$

例题 8.2 传输线的 T_e 和 F

我们将计算损耗传输线的有效输入噪声温度 T_e 和噪声系数 F②。这可以通过给传输线加一个与传输线具有相同特性阻抗的源和负载阻抗来实现(两者具有相同的物理温度)，如图 8.21 所示。传输线的增益为 $G_a = 1/L$，其中 L 为传输线的损耗(输入功率除以输出功率)。从输出端看传输线，可将其等效成一阻抗为 R_0 的电阻。因为其输入端接的是一个值为 R_0 的阻抗。假定传输线的物理温度为 T_L 开尔文。因为传输线就好比一个热源，所以其输出的可用噪声功率为 $P_{ao} = kT_LB$。应用式(8.25)，其中源的物理温度为 $T_e = T_L$，我们得到：

$$T_e = \frac{kT_LB - kT_LG_aB}{kG_aB} = T_L\left(\frac{1}{G_a} - 1\right)$$

于是传输线的有效输入噪声温度为

$$T_e = T_L(L - 1) \tag{8.31a}$$

其中，T_L 是以开尔文为单位的传输线的物理温度，L 是传输线的损耗。

如果传输线的物理温度为 T_0，上式就变为

$$T_e = T_0(L - 1) \tag{8.31b}$$

---

① 式(8.26)和式(8.27)中的 P_{ao} 与式(8.23)、式(8.24)和式(8.25)中的不同。

② 这些结论同样也适用于匹配衰减器的 T_e 和 F。

应用式(8.30b)就可以将 T_e 转化为传输线的噪声系数 F。于是将式(8.31a)代入式(8.31b)，我们得到：

$$T_L(L-1)=T_0(F-1)$$

求解 F，得到传输线的噪声系数为

$$F=1+\frac{T_L}{T_0}(L-1) \tag{8.32a}$$

其中，T_L 是传输线的物理温度，$T_0=290\ \text{K}$，L 是传输线的损耗。如果传输线的物理温度是 290 K (63℉)，式(8.32a)就化简为

$$F=\frac{1}{G_a}=L \tag{8.32b}$$

以 dB 为单位，就是 $F_{\text{dB}}=L_{\text{dB}}$。换言之，如果传输线有 3 dB 的损耗，在物理温度为 63℉时噪声系数为 3 dB。如果温度为 32℉(273 K)，应用式(8.32a)，其噪声系数为 2.87 dB。于是，在人居住的环境温度下，传输线的 F_{dB} 近似与 L_{dB} 相等。

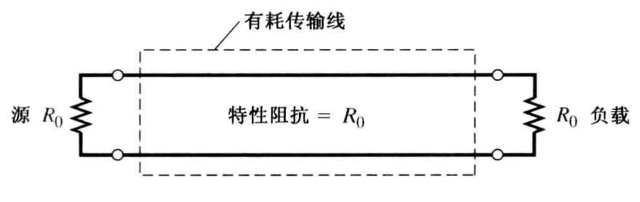


图 8.21　损耗传输线的噪声系数测量

8.6.5　级联的线性设备的噪声特性

在通信系统中，常常是几个线性设备(由不同厂家提供)级联形成整个系统，如图 8.22 所示。在接收机中，这些设备可能是一个 RF 前置放大器连接到一个传输线并紧跟一个下变频器和 IF 放大器(如 4.11 节的分析，下变频器是一个线性设备，其特性可由变频功率增益和噪声系数来描述)。在进行系统性能分析时，我们需要由厂家提供的单个设备的参数来分析其总功率增益 G_a 和噪声特性(由总的噪声系数和有效输入噪声温度给定)。

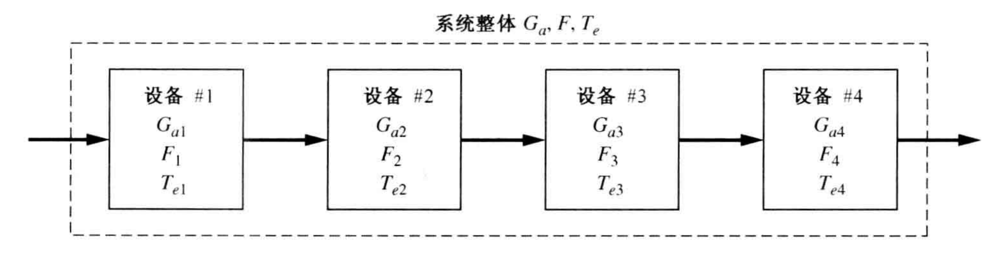


图 8.22　四个设备的级联

整个系统的可用功率增益为

$$G_a(f)=G_{a1}(f)G_{a2}(f)G_{a3}(f)G_{a4}(f)\cdots \tag{8.33}$$

因此，对于一个四级的系统有：

$$G_a(f)=\frac{\mathcal{P}_{ao4}}{\mathcal{P}_{as}}=\left(\frac{\mathcal{P}_{ao1}}{\mathcal{P}_{as}}\right)\left(\frac{\mathcal{P}_{ao2}}{\mathcal{P}_{ao1}}\right)\left(\frac{\mathcal{P}_{ao3}}{\mathcal{P}_{ao2}}\right)\left(\frac{\mathcal{P}_{ao4}}{\mathcal{P}_{ao3}}\right)$$

定理　如图 8.22 所示(一个四级系统)，几个级联的线性设备的噪声系数为①

$$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_{a1}} + \frac{F_3 - 1}{G_{a1}G_{a2}} + \frac{F_4 - 1}{G_{a1}G_{a2}G_{a3}} + \cdots \tag{8.34}$$

证明　这个结果可以通过对每一级采用图 8.19 所示的附加噪声模型分析来得到。我们将证明一个如图 8.23 所示两级系统的结论。其噪声系数为

$$F = \frac{P_{ao2}}{(P_{ao2})_{\text{ideal}}} = \frac{P_{x2} + P_{ao1}G_{a2}}{G_{a1}G_{a2}P_{as}}$$

整理得到：

$$F = \frac{P_{x2} + G_{a2}(P_{x1} + G_{a1}P_{as})}{G_{a1}G_{a2}P_{as}} \tag{8.35}$$

其中，$P_{as} = kT_0B$ 是热噪声源的可用功率，而 P_{x1} 和 P_{x2} 可通过应用图 8.19，由每个设备的噪声系数得到。于是对于第 i 个设备有：

$$F_i = \frac{P_{aoi}}{G_{ai}P_{as}} = \frac{P_{xi} + G_{ai}P_{as}}{G_{ai}P_{as}}$$

或

$$P_{xi} = G_{ai}P_{as}(F_i - 1) \tag{8.36}$$

将式(8.36)代入式(8.35)，得到：

$$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_{a1}}$$

这与式(8.34)中当级数为 2 时的结果一致。用同样的方法可以证明式(8.34)的结论适用于任意级的系统。

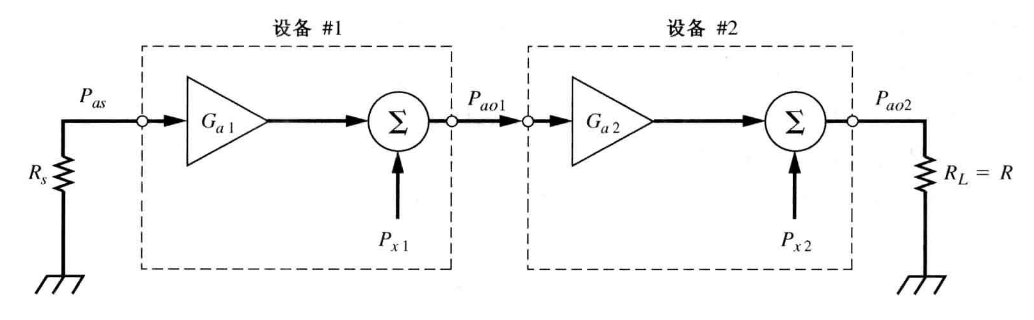


图 8.23　两个级联设备的噪声模型

回到式(8.34)，我们看到如果 G_{a1}，$G_{a1}G_{a2}$，$G_{a1}G_{a2}G_{a3}$ 等相对较大，那么 F_1 将在整个系统的噪声系数中占主导地位。于是，在接收机的设计中，第一级具有低噪声和高增益对保证整个系统的噪声尽可能小就显得非常重要了。

对多级系统的有效输入噪声温度也能这样分析。

定理　由几个线性设备级联构成的系统的有效输入噪声温度为

$$T_e = T_{e1} + \frac{T_{e2}}{G_{a1}} + \frac{T_{e3}}{G_{a1}G_{a2}} + \frac{T_{e4}}{G_{a1}G_{a2}G_{a3}} + \cdots \tag{8.37}$$

如图 8.22 所示。

① 该式称为 Friis 噪声公式。

其证明留给读者作为练习。

对有效输入噪声温度和噪声系数的进一步研究，读者可参考权威性文章[Mumford 和 Scheibe，1968]。

8.6.6 链路预算分析

通信系统的性能依赖于接收机中检测器的输入 SNR，在工程上习惯于把检测前的信噪比称为载噪比(CNR)。于是本节中我们用 CNR 来表示检测前(带通)的信噪比，而用 SNR 来表示检测后的信噪比(基带)。这里我们感兴趣的是分析检测器输入端的 CNR，它是通信链路参数，如 EIRP、空间损耗、接收天线增益、接收机的有效输入噪声温度等指标的函数。这些联系检测器输入端的 CNR 及链路参数关系的公式称为链路预算。

一个通信系统可以表示成如图 8.24 所示的方框图的形式。在这个模型中，从接收天线输出到检测器的输入，这部分接收系统被建模成线性模块，用以表示接收机中级联的各级，如传输线、低噪声放大器(LNA)、下变频器和中放等。如前面的章节及图 8.20 中的模型那样，这个线性模型描述了整个系统的可用噪声功率增益和有效输入噪声温度。

如图 8.24 所示，理想放大器(增益为 G_a)输入端的 CNR 与检测器的输入端的值是相同的，因为理想放大器不引入噪声，并且其在 B Hz 的带宽内对信号和噪声具有同样程度的放大。于是，我们得到：

$$\left(\frac{C}{N}\right) \triangleq \left(\frac{C}{N}\right)_{Rx} = \left(\frac{C}{N}\right)_{\text{Det}} \tag{8.38}$$

其中，载噪声功率比如图中所示。

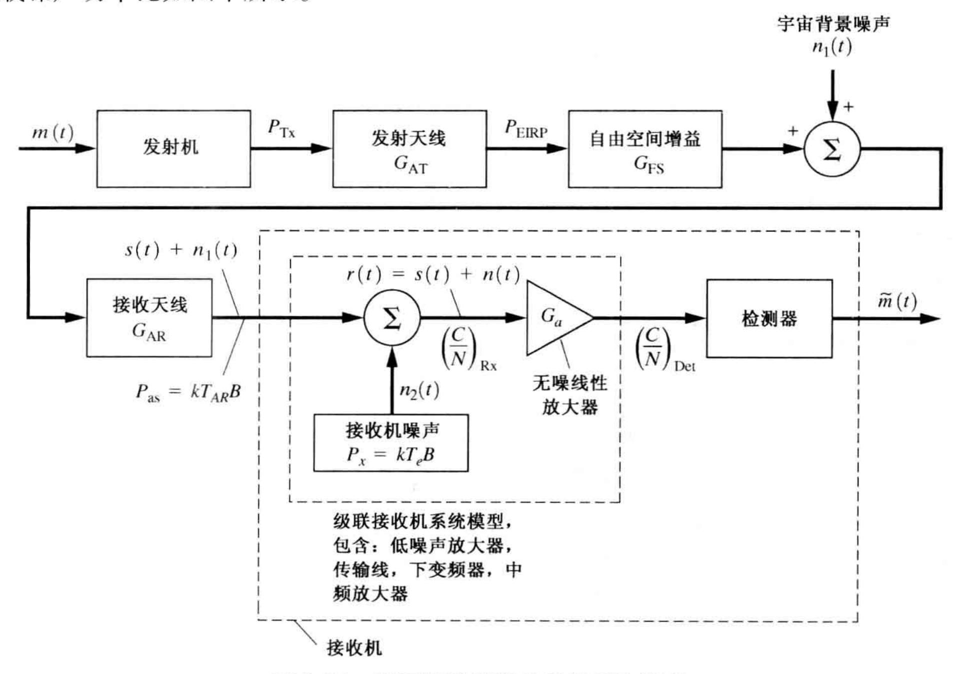


图 8.24 用于链路预算的通信系统模型

应用式(8.2)和式(8.3)，我们得到接收信号功率为

$$C_{Rx} = (P_{EIRP})\,G_{FS}\,G_{AR} \tag{8.39}$$

其中，P_{EIRP}是发射机的 EIRP，G_{FS}是自由空间增益，G_{AR}是接收天线功率增益。

当我们应用式(8.17)时，图8.24所示模型中的理想放大器输入端的噪声功率为

$$N = kT_{\text{syst}}B \tag{8.40}$$

其中，B 为 IF 等效带宽。接收系统噪声温度为

$$T_{\text{syst}} = T_{\text{AR}} + T_e \tag{8.41}$$

其中，T_{AR}是天线的噪声温度(由于接收到的宇宙噪声和地球黑体辐射)，T_e 是整个接收系统的有效输入噪声温度。

结合式(8.39)和式(8.40)，则检测器输入的 CNR 为

$$\frac{C}{N} = \frac{P_{\text{EIRP}}G_{\text{FS}}G_{\text{AR}}}{kT_{\text{syst}}B} \tag{8.42}$$

在工程应用中，公式将以 dB(分贝)为单位。应用式(8.9)并且对式(8.42)两边取 10log[·]，我们得到以分贝为单位的检测器输入 CNR 为

$$\left(\frac{C}{N}\right)_{\text{dB}} = (P_{\text{EIRP}})_{\text{dBw}} - (L_{\text{FS}})_{\text{dB}} + \left(\frac{G_{\text{AR}}}{T_{\text{syst}}}\right)_{\text{dB}} - k_{\text{dB}} - B_{\text{dB}} \tag{8.43}$$

其中，$(P_{\text{EIRP}})_{\text{dBw}} = 10\log(P_{\text{EIRP}})$为发射机的 EIRP 高于 1 W 的分贝数。$(L_{\text{FS}})_{\text{dB}} = 20\log[(4\pi d)/\lambda]$为路径损耗①，$k_{\text{dB}} = 10\log(1.38\times10^{-23}) = -228.6$，$B_{\text{dB}} = 10\log(B)$($B$ 是中频带宽)。

对于模拟通信系统，检测器输出的 SNR 与检测器输入的 CNR 有关。具体关系由检测器的类型及调制方式所确定。这些关系在第 7 章中已有讨论，应用式(7.85)所得到的结果总结在表 7.2和图 7.27 中，其中$(C/N) = (S/N)_{\text{in}}$。例题 8.6 中应用式(8.43)分析了 CATV 卫星接收系统的性能。

例题 8.3 视距传播条件下接收到的$(C/N)_{\text{dB}}$

应用式(8.43)，计算接收机检测器输入端的 CNR 值。令$(P_{\text{EIRP}})_{\text{dB}} = 36$，$f = 4$ GHz，$B = 30$ MHz，$T_{\text{syst}} = 154.5$ K 及 $d = 24\ 787$ 英里，接收天线为直径 5 米的抛物面天线。解题过程及结果参见 M 文件 Example8_03. m。

对于数字通信系统，数字接收机输出的 BER 是衡量性能的标准，BER 通过 CNR 与 E_b/N_0相关。在下一节中将研究 E_b/N_0与 CNR 的关系，助学例题 SA8.1 和 SA8.2 中研究了 DSS 电视接收系统的 BER。

8.6.7 数字系统的 E_b/N_0链路预算

在数字通信系统中，检测器输出端数字信号的误比特率 P_e描述了恢复数据的质量。P_e亦被称为误码率，是在检测器输入端测量到的每比特能量与噪声功率密度 PSD 之比 E_b/N_0的函数。P_e与 E_b/N_0的关系依赖于所用的数字信号的模型。如表 7.1 和图 7.14 所示。在本节中，我们分析作为通信链路参数的检测器输入端的 E_b/N_0表达式。

每比特的能量为 $E_b = CT_b$，其中 C 是信号功率，T_b为发送 1 比特数据所需时间。应用式(8.40)，我们得到噪声的 PSD(单边谱)为 $N_0 = kT_{\text{syst}}$，于是，

$$\frac{C}{N} = \frac{E_b/T_b}{N_0B} = \frac{E_bR}{N_0B} \tag{8.44}$$

其中，$R = 1/T_b$是数据速率(bps)，在式(8.42)中应用式(8.44)，我们得到：

---

① 自由空间路径损耗表达式可修正为包含城区建筑环境中多径信道的影响的形式[见式(8.47)和式(8.67)]。

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{P_{\text{EIRP}} G_{\text{FS}} G_{\text{AR}}}{k T_{\text{syst}} R} \tag{8.45}$$

以 dB 为单位。接收机检测器输入端的 E_b/N_0 与链路参数的关系为

$$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{\text{dB}} = (P_{\text{EIRP}})_{\text{dBw}} - (L_{\text{FS}})_{\text{dB}} + \left(\frac{G_{\text{AR}}}{T_{\text{syst}}}\right)_{\text{dB}} - k_{\text{dB}} - R_{\text{dB}} \tag{8.46}$$

其中，$(R)_{\text{dB}} = 10\log(R)$，$R$ 为数据速率(bps)。

例如，假定我们采用的信号为 BPSK 信号，接收机采用最优检测器，于是，误码率 $P_e = 10^{-4}$ 所需 $(E_b/N_0)_{\text{dB}} = 8.4$ dB(见图 7.14)[①]。应用式(8.46)通信链路参数应满足 $(E_b/N_0)_{\text{dB}}$ 为 8.4 dB 的要求。注意，当比特速率增加时，发射功率必须增加或接收机性能——用 $(G_{\text{AR}}/T_{\text{syst}})_{\text{dB}}$ 表示——必须提高，以满足所需的 $(E_b/N_0)_{\text{dB}} = 8.4$ dB 的要求。助学例题 SA8.1 和助学例题 SA8.2 为分析 E_b/N_0 链路预算以达到 DSS 电视接收系统误码率的例子。

例题 8.4　视距传播条件下接收到的 $(E_b/N_0)_{\text{dB}}$

应用式(8.46)，计算接收机检测器输入端的 E_b/N_0 值。令 $(P_{\text{EIR}})_{\text{dB}} = 30.5$，$f = 4$ GHz，$T_{\text{syst}} = 154.5$ K，$R = 1.54$ Mbps 及 $d = 24\ 784$ 英里，接收天线为直径 1 米的抛物面天线。解题过程及结果参见 M 文件 Example8_04.m。

8.6.8　城区无线环境的路径损耗

非自由空间无线环境下的路径损耗，如有由建筑物和树木等组成的障碍的路径，非常难以建模。这是一种地面蜂窝无线系统的情况，多径信号由反射路径信号加直达路径信号组成，就像信号穿过建筑物受到衰减一样。在通常情况下，沿着路径的接收信号测量强度可用于证实预测结果。对于自由空间路径，路径损耗的指数为 $n = 2$，即路径损耗如式(8.9)所示随距离的平方而变化。当有障碍物时，n 比 2 大。N 一般在 2 ~ 6 的范围内变化，其典型值为 $n = 3$。当收发天线之间的路径损耗以 dB 的形式表示时，就得到对数距离的路径损耗模型。于是障碍物路径损耗为[Rappaport, 2002, p. 138]

$$L_{\text{dB}}(d) = L_{\text{FSdB}}(d_0) + 10n\log\left(\frac{d}{d_0}\right) + X_{\text{dB}} \tag{8.47a}$$

其中，

$$L_{\text{FSdB}}(d_0) = 20\log[(4\pi d_0)/\lambda] \tag{8.47b}$$

$L_{\text{dB}}(d)$ 是当天线间距离为 d 时，以 dB 表示的路径损耗。$L_{\text{LFSdB}}(d_0)$ 是在非常靠近发射机的距离 d_0 处的自由空间损耗，但是在较远的距离上，$d > d_0$。n 是路径损耗指数，X_{dB} 是一个零均值的高斯随机变量，代表由于多径反射造成的路径损耗的变化。典型的对于大的城区移动通信系统，d_0 是 1 km，对于微蜂窝系统为 100 m，对于室内无线环境为 1 m。助学例题 SA8.3 所示就是应用式(8.47)分析无线个人通信设备(PCD)的链路预算和 BER 的例子。

例题 8.5　卫星信号电视接收终端的链路预算分析

这里将分析卫星信号电视接收(TVRO)终端的链路预算。假定接收终端位于华盛顿 D.C.，接收的信号来自位于西经 134°赤道上空的静止卫星。表 8.5 中列出了建议的接收设备及接收站和卫星的参数。TVRO 终端是典型的置于 CATV 系统前端的用于接收卫星转发的电视信号的设

---

① 如果采用了具有 3 dB 增益(见 1.11 节)的编码达到 10^{-4} 误码率，那么所需的 E_b/N_0 为 5.4 dB。

备。如8.5节中所讨论的那样，组合的NTSC基带视频信号以调频的方式加载到6 GHz载波上由卫星转发。卫星下变频FM信号到4 GHz并重发FM信号到TVRO终端。

表8.5 典型的C波段TVRO卫星及接收系统*

项目名称	参　数　值
卫星	
轨道	静止
位置(赤道上空)	西经134°
上行频率波段	6 GHz
下行频率波段	4 GHz
$(P_{\mathrm{EIRP}})_{\mathrm{dBW}}$	36 dBW
TVRO终端站位置	位于北纬38.8°，西经77°的华盛顿
天线	
天线类型	直径10 ft的抛物面天线
噪声温度	对16.8°计算为32 K(输出)
馈线增益	0.98
低噪声放大器	
噪声温度	40 K
增益	50 dB
噪声温度	2610 K
中频带宽	30 MHz
FM门限	8 dB CNR

*用谷歌搜索现有卫星的覆盖区及参数。

卫星发射天线的EIRP地面覆盖区如图8.25所示。从这幅图中，我们看到华盛顿D.C.地区的EIRP大约为36 dBw，与表8.5中的数值一样。

可以证明，TVRO天线的仰角可由如下公式计算[Davidoff, 1990]。TVRO天线的仰角是

$$E = \arctan\left[\frac{1}{\tan\beta} - \frac{R}{(R+h)\sin\beta}\right] \tag{8.48a}$$

其中，

$$\beta = \arccos[\cos\varphi\cos\lambda] \tag{8.48b}$$

其中，λ为TVRO站与子站点(即赤道上同步卫星的正下方的点)之间的经度差，φ是TVRO站的纬度，$R=3963$英里为地球的半径，$h=22\ 242$英里是同步卫星的高度，TVRO与卫星间的距离称为斜距，可由余弦定理得到：

$$d = \sqrt{(R+h)^2 + R^2 - 2R(R+h)\cos\beta} \tag{8.49}$$

TVRO天线的方位角为

$$A = \arccos\left(-\frac{\tan\varphi}{\tan\beta}\right) \tag{8.50}$$

其中，真正的方位角从北极顺时针测量是A或$360°-A$，因为计算器给出的$\arccos(x)$的值在0°~180°之间。对华盛顿D.C.,TVRO站[①]应用这些公式，得到$\lambda=134-77=57°$及

$$\beta = \arccos[\cos(38.8)\cos(57)] = 64.9° \tag{8.51}$$

① 为了解释方便和简化，计算器被设置为可以计算所有度数(不是弧度)的三角函数。

斜距为

$$d = \sqrt{(26\ 205)^2 + (3963)^2 - 2(3963)(26\ 205)\cos 64.9} = 24\ 784 \text{ 英里} \tag{8.52}$$

TVRO 天线的仰角为

$$E = \arctan\left[\frac{1}{\tan(64.9)} - \frac{3963}{(26\ 205)\sin(64.9)}\right] = 16.88 \tag{8.53}$$

TVRO 天线的方位角为

$$A = \arccos\left[\frac{-\tan(38.8)}{\tan(64.9)}\right] = 247.9° \tag{8.54}$$

于是，从华盛顿 D. C.，TVRO 的天线到卫星的视角为 $E = 16.8°$ 和 $A = 247.9°$。

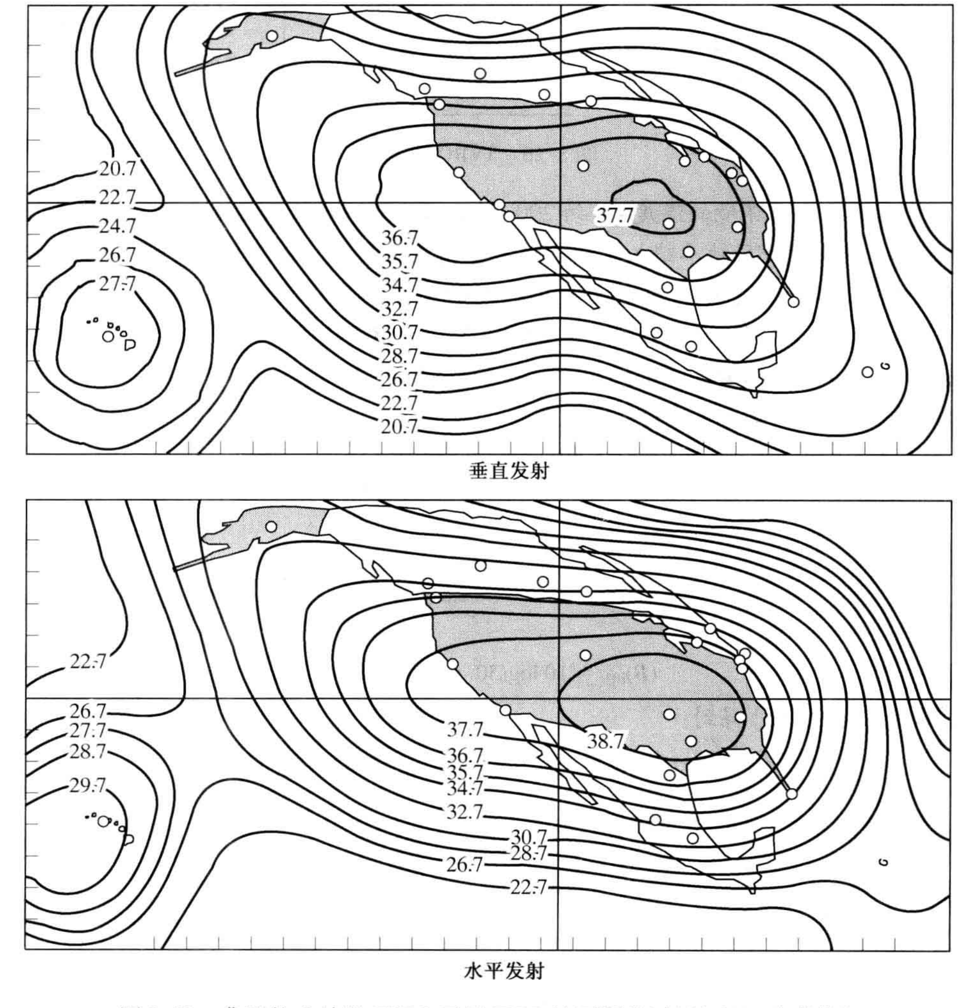


图 8.25　典型的 C 波段 TVRO 卫星 EIRP 地面覆盖区（以 dBW 为单位）

接收系统的框图如图 8.26 所示，应用式(8.43)，接收机检测器输出的 CNR 为

$$\left(\frac{C}{N}\right)_{\text{dB}} = (P_{\text{EIRP}})_{\text{dBw}} - (L_{\text{FS}})_{\text{dB}} + \left(\frac{G_{\text{AR}}}{T_{\text{syst}}}\right)_{\text{dB}} - k_{\text{dB}} - B_{\text{dB}} \tag{8.55}$$

对 $d = 24\ 784$ 英里，4 GHz 频率的路径损耗为

$$(L_{FS})_{dB} = 20\log\left(\frac{4\pi d}{\lambda}\right) = 196.5\ \text{dB}$$

对于一个 10 ft(3.05 m)的抛物面天线，应用表 8.4，得到接收天线的增益为

$$(G_{AR})_{dB} = 10\log\left[\frac{7\pi(3.05/2)^2}{\lambda^2}\right] = 10\log(9085) = 39.6\ \text{dB}$$

应用式(8.41)和式(8.37)，我们得到系统噪声温度为

$$T_{syst} = T_{AR} + T_{feed} + \frac{T_{LNA}}{G_{feed}} + \frac{T_{receiver}}{G_{feed}G_{LNA}} \tag{8.56}$$

其中，包括馈线在内的标识的天线噪声温度为 $T_A = (T_{AR} + T_{feed}) = 32$ K。

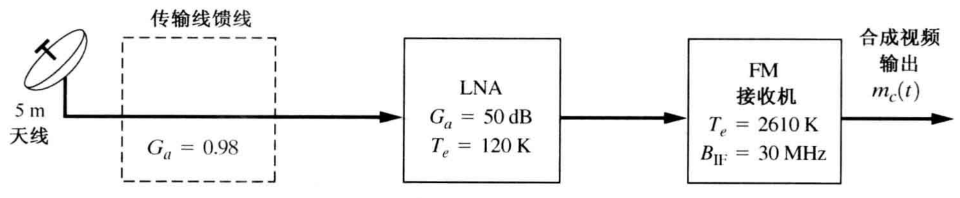


图 8.26 TVRO 终端

T_{AR}不是天线的周围环境的温度(大约 290 K)，因为天线的有效阻抗不是由热阻抗而是由发射阻抗组成的。即如果 RF 功率馈入天线，它不会损耗在天线内而是将辐射到空中。于是，T_{AR}被称为空中噪声温度，它是对从外界空间接收到的噪声功率和由于大气衰减的噪声功率的度量，该噪声功率为 $P_{AR} = kT_{AR}B$。已有一些图给出了作为 RF 频率和天线仰角的函数的空中噪声温度的测量结果[Jordan, 1985, Chap. 27; Pratt 和 Bostian, 1986]。

将接收系统参数代入式(8.56)，我们得到：

$$T_{syst} = 32 + \frac{40}{0.98} + \frac{2610}{(0.98)(100\,000)} = 72.8\,\text{K}$$

于是，①

$$\left(\frac{G_{AR}}{T_{syst}}\right)_{dB} = 10\log\left(\frac{9085}{72.8}\right) = 21.0\ \text{dB/K}$$

另外，

$$(B)_{dB} = 10\log(30\times10^6) = 74.8$$

将这些结果代入式(8.55)得到：

$$\left(\frac{C}{N}\right)_{dB} = 36 - 196.5 + 21.0 - (-228.6) - 74.8$$

于是，检测器输入端的 CNR(在 FM 接收机里)为

$$\left(\frac{C}{N}\right)_{dB} = 14.3\ \text{dB} \tag{8.57}$$

CNR 为 14.3 dB 看起来并不是很好，对不对？事实上，问题是：检测器输入端 14.3 dB 的 CNR 值能否保证检测器输出高质量的视频信号？如果我们的检测器具有如图 8.27 所示的那些性能曲线的话，这个问题很容易回答。图中画了两条曲线，一条是应用 FM 鉴频器的 FM 检测器的接收机输出，另一条是使用 PLL FM 检测器以提供门限扩展的接收机输出②。对于输入端的

① 虽然这是有点反常，工程师们仍把 dB/K 作为$(G/T)_{dB}$的单位。

② 门限点就是$(S/N)_{out} \sim (C/N)_{in}$图中的拐点。在门限扩展接收机中，与使用鉴频器作为检测器的接收机相比，这个拐点左

14.3 dB CNR 值，两个接收机都将输出 51 dB 的 SNR，即对应于高质量的图像。然而接收到的卫星信号，由于大气条件有 6 dB 的衰减，所以应用 FM 鉴频器的接收机输出 SNR 仅大约为 36 dB，而使用门限扩展设备的接收机将有约 45 dB 的输出 SNR。

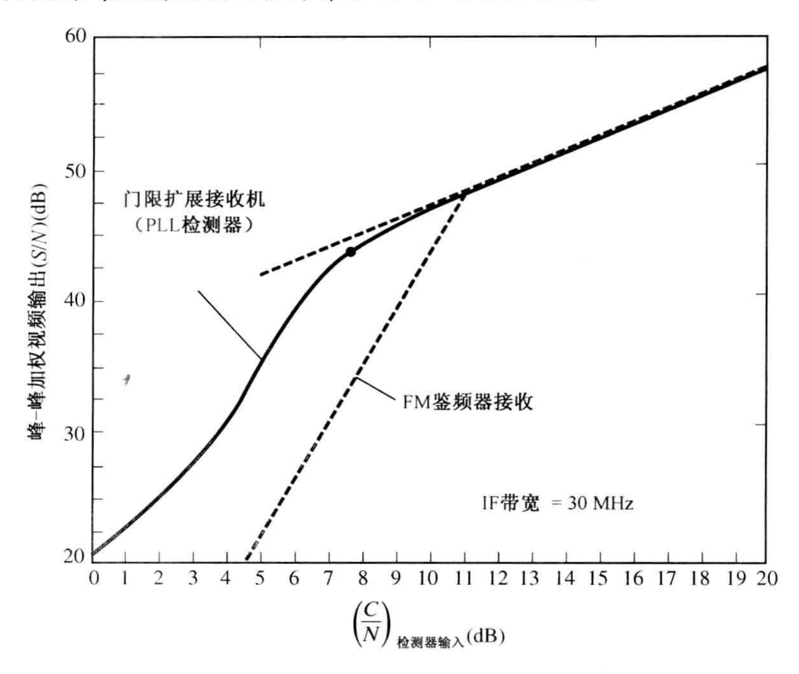


图 8.27　FM 检测器输入 CNR 的对应输出 SNR 曲线

8.7　光纤系统

自从 1980 年以来，光纤传输系统就开始商用。如表 8.2 所示，公用事业公司已在美国、日本和加拿大安装了光纤系统。光纤是首选的地下传输媒介。另外，如表 8.2 所示，越洋光纤传输系统现在也已流行起来了。数字光纤系统对光源使用 OOK 调制以产生调制的光束。光源的波长为 0.85 ~ 1.65 μm，大约为 190 ~ 350 THz①（也可建立模拟 AM 光纤系统）。

光源可以分为两类：(1) LED 可产生不相干光；(2) 固态激光，可产生相干(单载波频率)光。LED 源价格便宜，它具有相对较低的输出功率(约 -15 dBm，包括耦合损耗)和大约 50 MHz 的较小的调制带宽。固态激光具有相对较高的输出功率(约 +5 dBm，包括耦合损耗)及约 1 GHz 的较大的调制带宽。固态激光比 LED 更受欢迎，因为它产生相干光和高输出功率。

光源耦合到光纤上，光纤是传输媒体。光纤电缆可分为两类：(1) 多模光纤；(2) 单模光纤。多模光纤内环的直径是 50 μm，而其外环的直径为 125 μm。光沿着光纤传播时，在其内外环边界上反射，从而产生了不同长度的路径。这导致了在接收端 OOK 信号能量的弥散。因为性能上的优越性，单模光纤更受欢迎。

在光纤的接收端，接收机由 PIN 二极管、雪崩光电二极管(APD)或一个用做光检测器的砷化镓 MESFES 晶体管组成。在 0.85 μm 的系统中，上述设备中的任何一个都可用做检测器。在 1.3 μm或 1.55 μm 的系统中，常采用雪崩光电二极管。这些检测器像包络检测器一样工作。如图 7.14所示，通过使用有乘法器的相干检测系统，可以获得较好(低误比特率)的性能。这就要求

① 1 THz 相当于 10^{12} Hz。

接收机上相干光源通过非线性方式与接收到的 OOK 信号混合，可以选用相干 PSK 和 FSK 系统[Basch 和 Brown，1985]。密集波分复用(DWDM)系统的容量为 1800 Gbps 左右，如表 8.2 所示。

例题 8.6　光纤系统的链路预算

图 8.28 所示为典型的光纤系统，它由终端位于指定地理区域的服务点(如城镇)上的两个双向环组成。环是用于提供冗余的数据路径。如果在环上某处电缆中断了，通过其余的正在使用的光纤仍可以将业务发送到终端。终端被称为装/卸终端，因为终端为这些用户从光纤环路上装/卸数据。如图 8.28 所示，环路需要两路光纤以提供全双工服务，即一根光纤提供发送服务，而另一根提供接收数据服务。

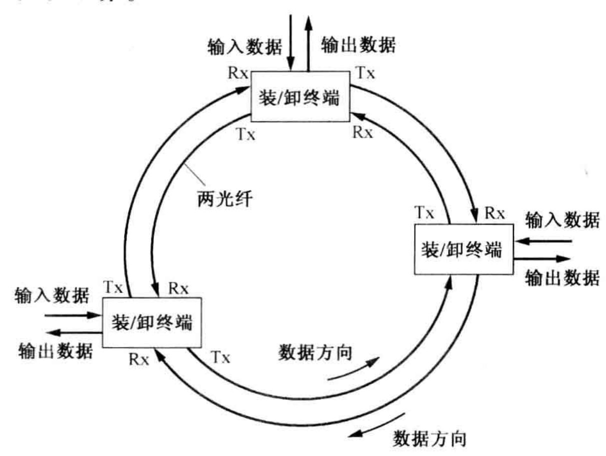


图 8.28　光纤环路系统

表 8.6 中给出了典型的光纤系统参数，该系统的容量为 OC-48，等于 48 DS-3 电路或 3.9 节中描述的 32 256 全双工 VF 电路(见表 3.10)。

表 8.6　光纤系统的典型参数指标*

两光纤双向环的最大容量	每跨距 24DS-3(每对光纤 16 128 路全双工 VF 电路)
	每终端 48DS-3(32 256 路全双工 VF 电路)
线速率	2.488 Gbps
线码	加扰无极性 NRZ
波长	1310 nm 或 1550 nm
光源	分布反馈(DFB)激光
光检测器	雪崩光电二极管
光纤	单模
发射功率	
1.31 μm	+5.5 dBm
1.55 μm	+4.0 dBm
接收机灵敏度	-27.0 dBm
最大接收机功率(无过载)	对于 1.31 μm 为 -10 dBm，对于 1.55 μm 为 -9.0 dBm
误比特率(BER)	对于 -27 dBm 的接收机输入 $<10^{-10}$
	最大 400 km 的系统(250 英里)，累积误码率小于 10^{-9}
最大的重复器间隔	
1.31 μm	60 km(0.45 dB/km 损耗光纤)
1.55 μm	92 km(0.25 dB/km 损耗光纤)，色散限制

* 用谷歌搜索现有光纤系统的参数指标。

表 8.7 为 1.55 μm 波长的典型光纤系统的链路预算分析。它表明了两个光纤中继器(或装/卸数据终端)之间最大的线距为 92 km(57.5 英里)。另外，在发射端使用光放大器以提高光波的发射功率，从而提高传播距离。

表 8.7　1.55 μm 光纤跨距的链路预算分析

最大发射功率	+4.0 dBm
接收机灵敏度	-27.0 dBm
可用储备	31.0 dBm
57 英里光纤链路的损耗	
光纤路径补偿	2.0 dB
发射机/接收机连接器损耗(0.7 dB)	1.4dB
光纤衰减(92km × 0.25dB/km)[a]	23.0 dB
系统储备	4.6 dB
全部损耗	31.0 dB

a. 0.25 dB/km 的损耗包括连接损耗。

8.8　蜂窝电话系统

本节介绍蜂窝电话，并且包括了许多模拟和数字系统的标准。

自从发明了无线系统以来，电话工程师的目标就是如何利用无线系统向在汽车上或行走时的人们提供电话业务。这里没有足够的频谱以在较大的地理范围内向每个电话用户提供一个永久的电话信道。然而，如果每个无线信道只覆盖一小片地理区域并且每个信道都是共享的(以 FDMA、TDMA 或 CDMA 的方式)，那么就有可能容纳更多用户。

蜂窝无线系统的概念如图 8.29 所示(实际中，发射塔通常位于三个蜂窝小区相交点处，塔上配置有三个 120°波束宽度的有向天线。一个有向天线覆盖一个小区，这样就可以用一个发射塔代替三个发射塔覆盖这些小区)。每个用户以无线方式完成蜂窝电话与蜂窝基站间的通信。基站通过电话线或微波链路与移动交换中心(MSC)相连。MSC 将用户连接到被叫方。如果被叫方是固定台，那么呼叫通过中心局(CO)连接到地面电话网。如果被叫方是移动台，那么呼叫连接到覆盖被叫方所在位置的基站上，并且通过一个空闲信道与被叫方建立连接。理论上，蜂窝的概念允许一定的信道容纳任意数量的移动用户，即如果需要更多的信道，则小区的半径要减小，就要增加一些小蜂窝，于是，现在的信道得到了更充分的利用。根据可接收的同道干扰来严格地设计小区[Lee, 1986]。当移动用户从一个小区移动到另一个小区时，MSC 自动地将用户切换到新小区中一个空闲信道上，以保持通话不被中断。

蜂窝的概念具有如下优点:

- 用户容量大
- 有效的无线频谱利用
- 业务到手持设备及车辆
- 用相对较低的价格，给移动用户提供高质量的电话和数据业务

自从 1983 年引入美国之后，蜂窝移动电话技术得到了飞速的发展。今天，我们使用的有计算能力的智能手机，不仅可以打电话，而且可以拍照，运行应用程序，例如地图、日历、E-mail 和网页浏览等。这些功能在 Palm 手机、黑莓、iPhone 等手机中很普遍。有报道称，2010 年，22% 的移动电话用户(4540 万美国人口)使用的是智能手机。用户数目的增多和成指数增长的数据传输要求需要为移动电话系统分配更多有用的频谱空间。

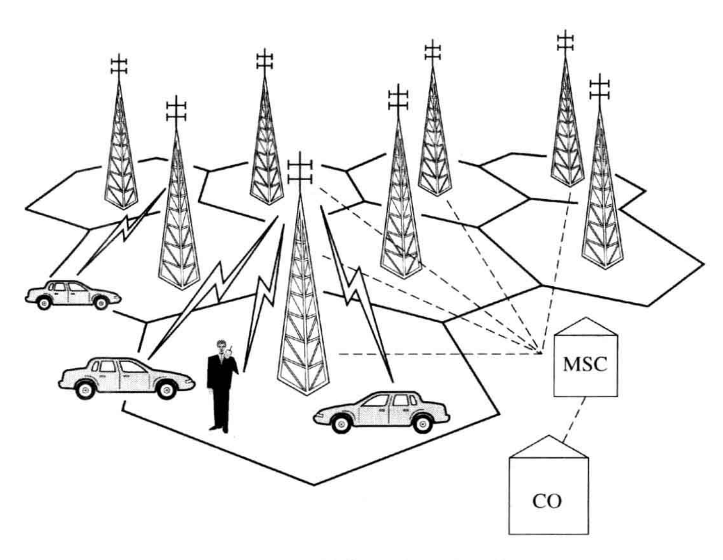


图 8.29 蜂窝无线电话系统

表 8.8 给出了在美国分配给移动电话系统使用的频段。需要注意的是低频段比高频段好，这是因为低频段信号通过树木和建筑物时受到的衰减更小。同时，自由空间的损耗值随工作频率的平方增长，如式(8.9)所示。例如，1.4 GHz 频段的自由空间损耗是 700 MHz 频段的 4 倍（大于 6 dB）。

表 8.8 美国蜂窝移动通信系统工作频段

分配的频段	频率(MHz)	使用(将来可能改变)
800	806 ~ 824 和 851 ~ 869 来自 1974 年不连续 TV 信道 70 ~ 83	SMR，iDEN
蜂窝	824 ~ 849 和 869 ~ 894 来自 1974 年的不连续 TV 信道 70 ~ 83	AMPS、GSM、IS-95(CDMA)、IS-136(D-AMPS)，3G
PCS	1850 ~ 1910 和 1930 ~ 1990	GSM、IS-95(CDMA)、IS-136、(D-AMPS)、3G
700 MHz	698 ~ 806 来自 2009 年不连续 TV 信道 52 ~ 69	3G，4G，DVB-H
1.4 GHz	1392 ~ 1395 和 1432 ~ 1435	未分配
AWS	1710 ~ 1755 和 2110 ~ 2155	3G，4G
BRS/EBS	2496 ~ 2690	4G

PCS = 个人通信业务　　BRS = 宽带无线业务
AWS = 先进的无线业务　　EBS = 教育宽带业务

自从 1983 年第一代蜂窝移动系统产生之后，大量不同标准的移动系统相继产生并且投入使用，如表 8.9 所示。表中给出了这些不同系统的首字母缩略词。移动通信公司正在部署，或者说已经部署了第四代系统。第四代系统可以提供更大的数据传输容量和更高的频谱利用率。在本书中没有足够的篇幅讲述表 8.9 中列出的所有系统的细节。但是部分系统的相关内容将在后面的章节讲到。通信标准每天也在不断演进着，所以在本书中无法涵盖当前的新发展。希望读者可以从相关网站，例如维基百科中的系统描述中了解当前通信系统的发展状况。

下面来介绍第一代系统的相关知识。第一代系统是模拟电路交换系统。

表8.9　蜂窝标准

代	使用的蜂窝标准	交换类型
1G	AMPS、ETACS、JTACS、NMT	电路交换
2G	GSM、IS-95(CdmaOne)、IS-136(D-AMPS)、iDEN、CDPD、EDGE/EGPRS、CDMA2000 1xRTT (IS-2000), iDEN	电路交换
3G	UMTS、WCDMA、CDMA2000 1xEV-DO (IS-856)、EV-DO Rev. A and Rev. B、HSDPA、HSUPA	VF使用电路交换 数据使用包交换
4G	LTE、WiMAX(IEEE 802.16m)	包交换

8.8.1　第一代(1G)——AMPS模拟电路交换系统

如表8.10所示，在美国使用的第一代蜂窝电话系统是由AT&T公司和摩托罗拉公司研制的先进移动电话系统(AMPS)。它是一个模拟系统，因为它是将VF音频信号调制到一个FM载波上。为在美国实现AMPS，FCC不得不为其分配一段频率空间。它将曾分给TV的70~83信道(见表8.13)，但1974年后又中止服务的806~890 MHz频段分给了AMPS。这个频段的一部分分配给蜂窝业务，如表8.10所示。进一步，FCC决定分别在每个地理区域授权两个竞争的系统，一个受权给传统的电话公司，另一个授权给非电话公司的公用事业部门。非电话系统被称作A业务或非有线业务，而电话公司被称作B业务或有线业务。于是，1G蜂窝系统的用户可选择和使用有线公司或非有线公司的业务。另外，如表8.10所示，标准提供了全双工业务，即一个载波频率用于从移动台到蜂窝基站的传输，而另一个载波频率用于从基站到移动台的传输。由FSK信号提供控制信令。在蜂窝业务可使用的416个信道中，21个信道使用FSK信号用于寻呼(即控制)。在VF信道上的FSK信号用于呼叫开始或呼叫结束。当打开蜂窝电话时，它的接收机扫描所有的寻呼信道，以寻找最强的一个基站信号并锁定之。基站不停地在寻呼信道上发送FSK数据，并且当有呼叫到达时，它就发送控制信息到蜂窝电话上，即FSK控制信号告诉电话使用哪个信道来通话。

表8.10　主要的第一代模拟FDMA蜂窝电话系统

	系统名称[a]和使用地区			
	AMPS北美			
项目名称	A业务(非金属线路)	B业务(金属线路)	ETACS(英国)	JTACS(日本)
引入的时间	1983	1983	1985	1988
小区基站 发射频段(MHz)	869~880, 890~891.5	880~890, 891.5~894	917~933, 935~960	860~870
移动站 发射频段(MHz)	824~835, 845~846.5	835~845, 846.5~849	872~888, 890~915	915~925
最大功率(W)	3	3	3	2.8
小区大小，半径(km)	2~20	2~20	2~20	2~20
双工信道数	416[b]	416[b]	1000	400
信道带宽(kHz)	30	30	25	25
语音调制	FM 12 kHz的峰值偏移量	FM 12 kHz的峰值偏移量	FM 9.5 kHz的峰值偏移量	FM 9.5 kHz的峰值偏移量
控制信号(语音和寻呼信道)	FSK 8 kHz的峰值偏移量 10 kbps 曼彻斯特线码	FSK 8 kHz的峰值偏移量 10 kbps 曼彻斯特线码	FSK 6.4 kHz的峰值偏移量 8 kbps 曼彻斯特线码	FSK 6.4 kHz的峰值偏移量 8 kbps 曼彻斯特线码

a. AMPS，先进移动电话系统，ETACS，扩展全接入通信系统，JTACS，日本全接入通信系统。

b. 416个信道中的21个被用于寻呼(即控制信道)。

每台蜂窝电话包含一个 PROM(只读存储器)或一个 EPROM(可擦除只读存储器)——称为号码分配模块(NAM)。NAM 编程后包含有电话机号码，也称为手机识别号码 MIN。手机还包含电子业务号码(ESN)，它是由厂商嵌入到手机中的唯一识别号码。

当电话处于开机状态时，它自动地将其序列号发送到 MSC，序列号被 MSC 用于锁定任何被偷盗的电话，这个特性当然令窃贼比较失望。MSC 用电话号码来提供付费信息。当电话在一个远方的城市中使用时，它可处于漫游的模式。于是呼叫可以建立和接收，然而仍允许其"家乡"的公司管理其计费。

当一个呼叫在进行时，蜂窝移动用户可能从一个小区移动到另一个小区，于是 MSC 做如下的处理：

- 基站监测接收到的蜂窝电话信号强度，当信号低于某一值时，MSC 启动"切换"程序。
- 为进行切换，MSC 监测相邻小区基站接收到的信号强度。
- 若相邻小区基站接收到的信号电平变得足够大，MSC 指示用户切换到新的小区中一个合适的信道上。这个切换的过程需要 250 ms，并且常常不被用户注意到。

表 8.10 所示为全球使用过的三类主要模拟蜂窝标准。另外，因为蜂窝电话如此流行，故这些宽带 FM 模拟系统没有容量以容纳所期望的新用户。于是，为得到更大的容量，应用了新的数字蜂窝系统，如表 8.11 所列。GSM 系统在欧洲使用，以提供一个统一的标准来逐渐取代过去使用的许多模拟系统。2011 年，大多数的第一代系统已经被更高水平的系统所取代。

表 8.11　主要的第二代数字蜂窝电话系统

项目名称	系统名称[a]和使用地区			
	GSM 欧洲、亚洲	IS-136 北美	IS-95 北美、亚洲	iDEN 北美
引入时间	1990	1991	1993	1994
基站[h]				
发射频段(MHz)	935 ~ 960	869 ~ 894	869 ~ 894	851 ~ 866
移动台[h]				
发射频段(MHz)	890 ~ 915	824 ~ 849	824 ~ 849	806 ~ 821
最大功率(W)	20	3	0.2	3
双工信道数	125	832	20	600
信道带宽(kHz)	200	30	1250	25
信道接入方法	TDMA	TDMA	CDMA[f]	TDMA
每信道用户数	8	3	35[g]	3
调制[b]				
类型	GMSK	π/4 DQPSK	QPSK	4 相 - 16QAM
数据速率	270.833 kbps	48.6 kbps	9.6 kbps[f]	64 kbps
滤波器	0.3R 高斯[c]	$r=0.35$ 升余弦[d]		$r=0.2$ 升余弦[d]
语音编码[e]	RPE-LTP 13 kbps	VSELP 8 kbps	QCELP 8 kbps(可变)	VSELP 8 kbps

a. GSM，特别移动小组；NADC，北美数字蜂窝；iDEN，综合数字增强网络。

b. GMSK，高斯 MSK(即 $h=0.5$FSK，也称为 FFSK，采用高斯预调制滤波器，见 5.11 节和脚注；π/4 DQPSK 是每发射符号的参考相位有 π/4 旋转的差分 QPSK，4 相 16QAM 为每信号 4 个 16QAM 载波。

c. 3 dB 带宽等于 0.3 倍比特速率的基带高斯滤波器。

d. 发射机和接收机端为升余弦特性。

e. RPE-LTP，正规脉冲激励——长期预测；VSELD，矢量和激励线性预测滤波器；QCELP，高通码书激励线性预测。

f. 扩频因子为 128 或处理增益为 21 dB 时，其扩频码片速率为 1.2288 Mchip/s。

g. 对于 CDMA，信道频道可以在邻近小区中使用，其他方法(TDMA 和 FDMA)需要一个 7 小区的重用模式。

h. 对于 1900 MHz 频段 PCS 系统，基站发射波段为 1930 ~ 1990 MHz，而移动台发射波段为 1850 ~ 1910 MHz。

8.8.2　第二代移动通信系统(2G)——数字电路交换系统

表8.11 所示为应用广泛的第二代蜂窝电话系统。它们全都是数字系统，模拟 VF 信号变成了压缩的数据比特流调制到载波上。压缩的数据比特流被设计成相对速率较低，以使系统容纳更多的用户。

数字系统有很多好处。它具有保密性、抗蜂窝欺骗性，并允许特殊的特征，如以呼叫方 ID 的方式呼叫对方就很容易实现。因为数字系统具有尖锐的门限效应，所以数字处理对处于小区边缘以外的地区可产生无噪的通话效果，即接收到的数据要么是无噪声的语音，要么接收机由于错误太多而关掉。当接收到边缘地区的信号时，可将这些无噪声的语音信号质量与 FM 系统相比较。

GSM 移动通信体制是欧洲取代1G 模拟系统的2G 系统，如表8.11 所示。现在，当一个人在欧洲旅行时，用 GSM 电话就可以保持通信，而不需要用 15 种不同的 1G 电话。GSM 使用 TDMA 方式，它在每200 kHz 带宽的信道上提供最多8 个用户的容量。GSM 通过使用附加的智能卡为用户提供服务，智能卡包含有用户的电话号码和其他信息。智能卡允许用户通过任何 GSM 电话终端进行通信，无论终端是手机还是固定的移动电话。如果用户到了一个使用不同频段的地区，通过智能卡可以很快地将租用的 GSM 电话机编程为用户付费的终端。GSM 已被全球很多国家所采用。在 Garg 和 Wilkes 编写的书中有关于 GSM 系统设计的细节[Garg 和 Wilks，1999]。

北美的 IS-54 及 IS-136 数字蜂窝系统(NADC)，也称为 TDMA 和 D-AMPS，是美国采用的第一个2G 标准。它使用TDMA 方式在每个30 kHz 带宽的信道上容纳3 个用户。它以信道换信道的方式设计用来取代 AMPS 系统，于是一个 AMPS 业务提供者可根据需要将一些信道转化成 IS-54 数据业务。

IS-95 标准是由 Qualcomm 公司制定并在 1993 年被美国在 900 MHz 频段上采用的标准。它使用 CDMA 方式，在 1.2 MHz 带宽的信道上容纳 35 个用户。一个 IS-95 信道可用于代替 41 个30 kHz 带宽的 AMPS 信道。CDMA 的优点是同频信道可以在相邻的小区中使用，因为它们是靠不同的扩频码来区分的(相邻的小区中使用不同的扩频码)。CDMA 有许多优点，例如每个信道带宽上容纳的用户不是一个固定值(如在 TDMA 系统中，其时隙数为固定值)，因为用新的扩频码的用户可以加入。附加的用户导致噪声强度的增加，用户可一直增加直到误码率不可忍受(由于噪声电平的增加)。可以预见，CDMA 将会越来越受欢迎，并且变为主流的系统。CDMA 的详细情况见 Rhee[Rhee，1998]和 Garg[Garg，2000]书中的介绍。

综合数字增强网络(iDEN)是摩托罗拉公司研制的系统，它在 Nextel，即现在的 Sprint Nextel 公司的系统中被采用，其使用的特殊移动无线(SMR)频段为800 MHz。iDEN 系统使用 TDMA 模式，在每25 kHz 的频带上容纳3 个用户。每个信道使用4 个16QAM 的载波，于是在每个符号间隔的时间内，可并行发送 $4\times4=16$ 比特的数据。这类似于 5.12 节中讨论的 OFDM 信号，于是符号间隔相对较长，故发射的信号可以抗多径衰落。除了常规的蜂窝电话特点以外，iDEN 协议允许商业用户建立 VPN 虚拟私人网。于是每个商务协作者可以通过 VPN 直接向其他商务协作者建立私人呼叫或群体呼叫。由于处理数据的能力较弱，iDEN 在 2013 年将会被逐渐淘汰。

如表 8.11 所示，所有的2G 系统均对 VF 信号采用低比特率语音编码，以便在有限的 RF 频段上容纳较大容量的用户。3.8 节中讨论了语音编码技术。例如，用于 NADC 及 iDEN 系统中的矢量总和激活线性预测滤波编码(VSELP)是由贝尔实验室 B. Atal 发明的码书激活线性预测(CELP)技术的修正版本[Gerson 和 Jasiuk，1990]。这项技术模仿人体发声系统的两个主要部分：清音和浊音。清音用线性预测滤波器来模拟，而用于激活滤波器的浊音则是通过可能激活的数据库来模拟(例如码本)的。VSELP 编码器(在发射端)将说话者的 VF 信号分成 20 ms 的片段。编码序列通过可能的码本激活模式和可能的滤波器参数来寻找同步的语音片段，以对语音

片段进行最佳匹配。与语音片段最匹配的参数以数字信号的形式发送给接收机，其中接收到的数据用于建立语音合成器的参数，于是就可以恢复语音信号。

2G 系统与 1G AMPS 系统相比，在系统容量、业务质量、信息安全以及诸如文字信息和视频电话方面进行了重大的改进。2G 系统主要承载语音的传输，而不是数据的传输。大多数 2G 系统以相对较低的数据速率 8 kbps 和 13 kbps 运行。于是，计算机系统数据的传输在这些系统中受到了严重的限制。更高的数据速率是 2.5G 和 3G 系统研发的主要驱动力。一些这样的系统对于 120 km/hr 的移动用户可获得 384 kbps 的数据率，而对于静止的用户其数据率最高可达 2 Mbps。

一个有趣的无线系统应用就是由 General Mortors(GM)提供的 OnStar 订阅业务。该业务为 GM 车辆司机和他们的乘客提供了紧急情况下与 OnStar 代表的联系的通道，系统的通信链路是由蜂窝电话网络提供的，车辆位置信息是由 GPS(全球定位系统)接收机提供的。一些提供的业务为：被偷窃的车辆辅助定位、应急供电、车辆故障远程诊断、路旁援助、事故援助、门的远程开锁、驾驶员的引导以及通过自动公告进行事故检测等。

8.8.3 第三代系统(3G)——电路交换和分组交换的数字系统

正如前面所说，用户需要除语音电话之外的数据服务，如网页浏览和 E-mail。采用对数据传输使用分组交换，语音电话使用电路交换的方法，2G 网络演变成了 3G 网络。大多 3G 网络使用了 2G 技术的扩展协议。2007 年底，全世界 9% 的用户(29 500 万)使用了 3G 技术。不同 3G 系统的数据速率大不相同。对于 3G 蜂窝网络中 HSDPA(High Speed Downlink Packet Access)类型的系统，典型的下行数据速率为 2 Mbps，典型的上行数据速率为 200 kbps。

8.8.4 第四代系统(4G)——数字分组交换系统

4G 网络与 3G 网络的不同在于它不再使用电路交换而使用 IP 分组交换技术。因此，网络可以更好地发送和接收高速率数据。数据网络使用 VoIP(Voice over Internet Protocol)处理语音电话。主要使用两个有竞争力的技术：LTE(Long Term Evolution)和 WiMax。

LTE 下行使用 OFDM，上行使用 FDMA，信道带宽高达 20 MHz。OFDM 和 FDMA 载波的调制方式采用 QPSK、16QAM 或者 64QAM。在美国，Verizon、AT&T 和 Metro PCS 在 2011 年展开了 LTE 系统的研究。在 Verizon 的 4G 网络中，华盛顿地区运行的系统的测试速率为下行 16 Mbps，上行为 6.6 Mbps[Mossberg, 2011]。

美国 Sprint 和 Clearwire 公司使用 WiMax 技术，技术的具体细节见 8.11 节。

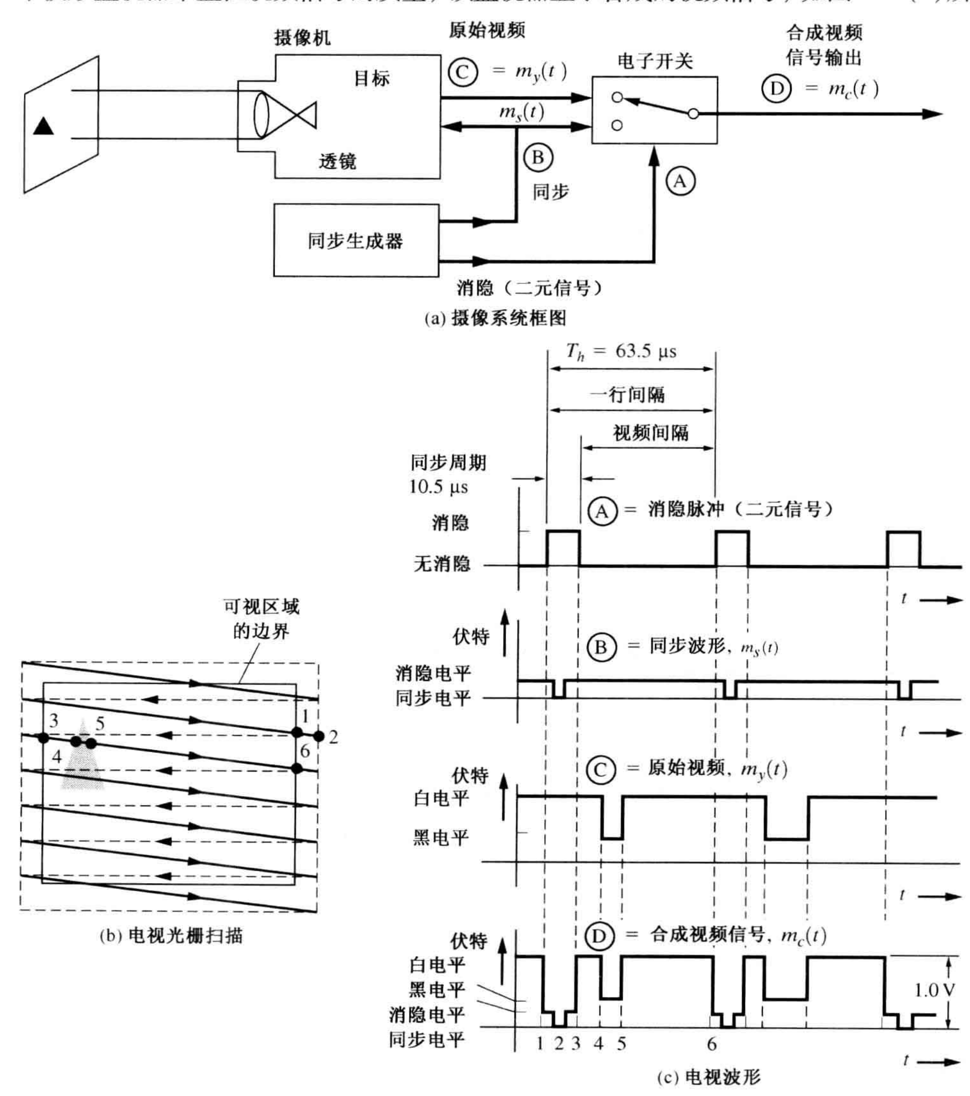
8.9 电视

电视是利用电信号再生固定或移动图像的一种手段。世界上有各种各样的电视系统，不同的标准已被广泛采用。而且，如随后的讨论中所述，由于全世界对数字电视(DTV)的推动，电视正处于一种变革状态之中。尽管仍有一些模拟的低功率电视台，但是美国的广播运营商已经于 2009 年 6 月开始使用数字电视了。美国有线电视系统仍然在低段信道中采用模拟电视来容纳模拟电视设备用户，但是对于数字信道则使用 QAM DTV 技术。正如我们将会看到的，模拟电视使用含有数字脉冲(用于行和帧同步)的模拟视频信号来构成合成的模拟电视信号。数字电视使用对模拟电视视频信号的采样样本，并将这些样本通过模数转换器(ADC)，在 ADC 的输出端加入同步数据来产生合成的数字电视信号。

下面几节描述历史上在美国已经使用的电视技术，我们首先介绍模拟黑白电视，随后介绍模拟彩色电视，最后介绍数字电视。

8.9.1 模拟黑白电视

一副场景的黑白图像本质上是光强度与场景(x 轴和 y 轴)和时间的函数。然而，电波形只是时间的函数，因此必须采用某种与来自场景中的单个点的光强相结合的对 x 轴和 y 轴进行编码的方法。在广播电视中，这是由光栅扫描完成的，参见图 8.30。假定在场景中的任何物体略作移动之前，整个场景就已被扫描。这样，运动图像就能由传送一串静止图像来发送，就像电影一样。在场景被扫描时，它的强度由视频信号的幅度来表示。利用电子开关，在每条扫描线的结束都插入一同步脉冲，以告知电视接收机另一行扫描线开始，如图 8.30 所示。为便于说明起见，假定一个黑色三角位于某一场景的左上部。在图 8.30(b)和图 8.30(c)中，我们用数字来标明当前场景中被扫描的若干点的位置，以及视频波形上相应的时间点。合成的视频信号实际上是由同步间隔期间的数字波形信号以及视频间隔期间的模拟波形信号所组成的混合信号。操作人员靠观察一个波形监视器来监控视频信号的质量，该监视器显示合成的视频信号，如图 8.30(c)所示。



(a) 摄像系统框图

(b) 电视光栅扫描

(c) 电视波形

图 8.30　复合模拟黑白电视信号的产生

从左到右扫描以形成一行，行从屏幕的顶部移至底端，从而产生了我们所看到的图片。在回扫期间，用从右到左的虚线表示，利用在同步脉冲间隔期间的“比黑更黑”的视频电平来关闭电视屏幕。实际上，从顶部到底部依次一行行扫描（一场）以及从顶部开始重新扫描那些遗漏的行（下一场）覆盖了一个场景。这种技术称为隔行扫描，它给每帧两场（遍历屏幕）以减少运动画面的闪烁效应。在美国，1 秒钟大约传输 30 帧，等于 60 场（采用 2:1 的隔行扫描）。当扫描到一场的底部时，同步脉冲加宽直至占满整个视频间隔以及同步间隔。这种脉冲 21 行发生一次，因而如果画面在向上翻滚，我们会发现一黑色长条横穿屏幕。在接收端，垂直同步信号（宽脉冲）和水平同步信号（窄脉冲）可被区分开来，区分的方法是采用一个微分器电路来恢复水平同步信号以及一个积分器电路来恢复垂直同步信号。垂直同步间隔也被用来发送一些特殊信号。例如，电视工程师用于测试频率响应以及在线设备的线性特性时的一些测试信号[Solomon，1979]。另外，一些电视节目提供闭路字幕信息，这些信息在聋哑观众使用的特殊的电视机上可被解码出来。这种电视机在屏幕的底部插入说明对白的字幕。如表 8.12 所示，闭路字幕信息通过在 21 行的垂直同步脉冲间隔内插入一个 16 位码字来发送。FCC 严格规定了精确的同步信号结构的细节（见图 8.37）。

由亮度（强度）视频信号 $m_y(t)$ 以及同步信号 $m_s(t)$ 合成的基带信号可描述为

$$m_C(t)=\begin{cases}m_C(t), & \text{在同步间隔中}\\ m_y(t), & \text{在图像间隔中}\end{cases} \tag{8.58}$$

由于 $m_c(t)$ 包含矩形同步脉冲，故 $m_c(t)$ 的频谱很宽。事实上，如果脉冲是完美的矩形，该频谱带宽则为无穷。为减小带宽，根据 FCC 标准的规定，同步脉冲是平滑的（见图 8.37）。这使得 $m_c(t)$ 被滤波至带宽为 $B=4.2$ MHz（美国标准）。对于静止图片，准确的频谱能利用傅里叶级数分析（如 2.5 节所示）计算出来。对于典型的静止画面，所有的扫描场都很相似，因而 $m_c(t)$ 具有周期性，其周期约为 $T_0=1/60$ s，与场速率 60 场/秒一致（精确值见表 8.12）。因此，静止画面的频谱包括间隔为 60 Hz 的谱线。然而，由图 8.30，我们可以观察到有一个相应于扫描线的主间隔 T_h。而且，邻近的扫描线通常有相似的波形。因此，$m_c(t)$ 是周期为 T_h 的准周期信号，频谱由中心位于扫描频率的谐频 $nf_h=n/T_h$ 的一簇簇频率谱线组成。在这些频谱线簇的内部，一根根谱线之间的间隔为 60 Hz。对于运动画面，频谱的线结构“模糊”到内含中心约在 nf_h 的频率簇的连续频谱。另外，频率簇与频率簇之间，频谱基本为空。我们将会看到，对于彩色电视信号，这些频谱中的“空白”间隔被用来发送颜色信息。当然，这是一种频分复用的形式。

表 8.12　美国模拟电视广播标准

条目	FCC 标准
信道带宽	6 MHz
图像载波频率	高于信道边界 1.25 MHz ± 1000 Hz
声音载波频率	高于图像载波频率 4.5 MHz ± 1000 Hz
色度子载波频率	3.579 545 MHz ± 10 Hz
纵横比（宽度比高度）	4 单位水平对一个 3 单位垂直
调制类型	
图像载波	具有负极性的幅度调制（也就是减小亮度会增加包络电平）
声音载波	$\Delta F=25$ kHz 的 100% 的频率调制，频率响应为 50 ~ 15 000 Hz，使用 75 μs 的预加重
图像调制电平	
消隐电平	峰值实包络电平（同步尖顶电平）的 75% ±2.5%
参考黑电平	低于黑电平（位于黑电平和参考白电平之间的视频范围）7.5% ±2.5%。这被电视工程师称为设置水平[a]

（续表）

条目	FCC 标准
参考白电平	同步尖顶电平[a] 的 12.5% ±2.5%
扫描	
行数	525 行/帧，2∶1 隔行扫描
扫描序列	水平：从左至右；垂直：由顶至底
水平扫描频率 f_h	15 734.264 Hz ±0.044 Hz（色度频率的 2/455）；在黑白画面传输期间可以使用 15 750 Hz
垂直扫描频率 f_v	59.94 Hz（水平扫描频率的 2/525）；在黑白画面传输期间可以使用 60 Hz；在每一场的垂直同步间隔中出现 21 个等效水平行
垂直间隔信令	13、14、15、16 行，文字电视广播
	17、18 行，垂直间隔测试信号（VITS）
	19 行，垂直间隔参考（VIR）
	20 行，扫描场 1，站点确认
	21 行，扫描场 1，文字数据
	21 行，扫描场 2，文字帧编码（$\frac{1}{2}$行）

a. 见图 8.31（b）。

电视画面的分辨率通常以行分辨率来表示。在水平行测试模式用的电视屏幕上，从上到下能被区分的水平行的数目称为垂直行分辨率（vertical-line resolution）。可分辨的水平行数的最大值（垂直行分辨率）为光栅中扫描行的数量减去那些未用于图像的扫描行。这就是说，垂直行分辨率为

$$n_v = (N_f - N_v) \text{ 行} \tag{8.59a}$$

其中，N_f 是每一帧总的扫描行数，N_v 是每一帧垂直间隔中（无图像行）的行数。在美国标准（见表 8.12）中，最大的垂直分辨率为

$$n_v = 525 - 42 = 483 \text{ 行} \tag{8.59b}$$

水平方向的分辨率受到 $m_c(t)$ 所允许的频率响应的限制。例如，在视频信号间隔期间采用正弦波测试信号，则系统能传输的最高正弦波频率将是 $B = 4.2$ MHz（美国标准），其中 B 是系统视频带宽。随着 CRT 波束从左向右扫描，对正弦波的每个峰值，沿水平方向将有一个点出现。这样，对 2∶1 的隔行扫描，水平分辨率为

$$n_h - 2B(T_h - T_b) \text{ 像素} \tag{8.60a}$$

其中，B 是视频带宽，T_h 是水平间隔，T_b 是空白间隔（见图 8.30）。对美国标准，$B = 4.2$ MHz，$T_h = 63.5\ \mu\text{s}$，$T_b = 10.5\ \mu\text{s}$，因而水平分辨率为

$$n_h = 445 \text{ 像素} \tag{8.60b}$$

另外，由于用户电视机欠佳的视频带宽和欠佳的隔行扫描特性，在实际中通常得不到 445 的水平分辨率①。美国标准中 445 × 483 的最高分辨率效果并不高，这点在大屏幕电视机上表现得尤为显著[作为对比，计算机监视器的超级 VGA（SVGA）标准提供的分辨率高达 1024 × 768]。

对于广播电视传输（美国标准），式（8.58）的合成视频信号被反转并被调幅到一个射频载波上，生成的调幅波信号为

$$s_v(t) = A_c[1 - 0.875 m_c(t)] \cos \omega_c t \tag{8.61}$$

见图 8.31。信号的下边带被衰减，这样频谱就适合于 6 MHz 的电视信道带宽。这种削弱可由残留边带滤波器来实现。残留边带滤波器是一种带通滤波器，它将大部分下边带信号削弱掉，滤

① 典型情况下，可得到约 300 行的水平分辨率。

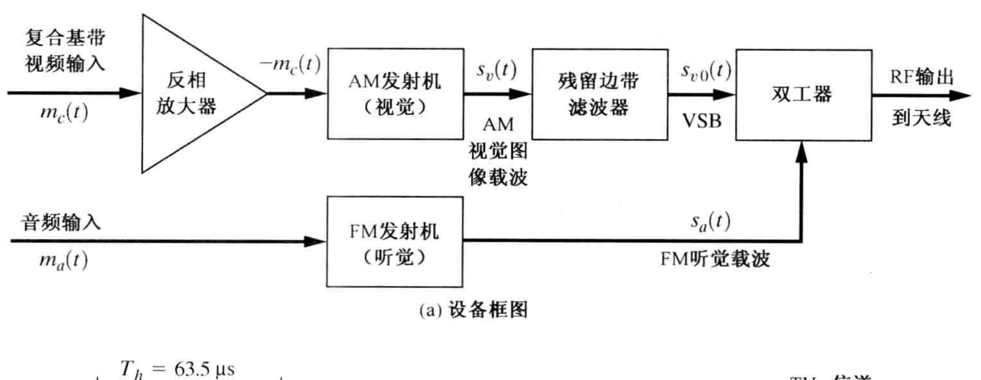
波后的信号称为残留边带(VSB)信号 $s_{v_0}(t)$，如5.5节所述。当画面从一幕切换到另一幕时，VSB信号中的离散载波项将会有变化，这是因为合成基带信号具有一个非零直流电平，该电平的高低取决于正在播放中的这一幕画面。电视节目的音频信号通过一个分开的调频FM载波来传输，该载波比视频载波频率精确地高4.5 MHz。

电视视频信号的额定功率是有效各向同性传播的峰值包络功率(EIRP，即有效同步尖顶平均功率)，通常被简单地称为有效辐射功率(ERP)。EIRP是为得到与实际中采用的天线在最大传播方向上测得的场强相同所要求的进入各向同性天线的功率。全方向电视台的天线形状像一个油炸圈饼，电视塔从孔里穿过(天线结构位于塔的顶部，以得到最大的视线覆盖范围)。电视台(视频或音频)信号的ERP为

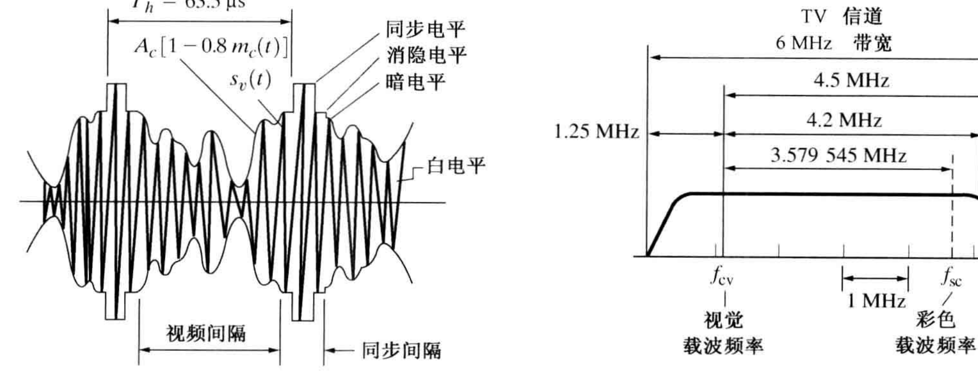
$$P_{\text{ERP}} = P_{\text{PEP}} G_A G_L \tag{8.62}$$

其中，P_{PEP}为发射机发出的峰值包络功率；G_A为相对于各向同性天线的天线功率增益(绝对单位，与分贝单位相对)；G_L为从发射机输出到天线的传输线路系统的总增益(包括双工器增益)。

对于工作于频道5的VHF电视台，一些典型值为$G_A=5.7$，$G_L=0.873$(850英尺的传输线路加上双工器)，视频PEP 20.1 kW。这使得整个ERP为100 kW，这是FCC给频道2~6(低VHF频段)授予的最高功率。对于工作于频道20的UHF电视台，一些典型的值为$P_{\text{PEP}}=21.7$ kW，$G_A=27$，$G_L=0.854$(850英尺的传输线路)，从而ERP为500 kW。



(a) 设备框图



(b) AM视频载波波形，$s_v(t)$(典型的视频调制)

(c) RF输出幅度谱(频率响应特性)

图8.31 TV传输系统

黑白电视接收机的简化方框图如图8.32所示。如前所述的合成视频信号$m_c(t)$，加上包含音频调制的4.5 MHz的FM载波信号，出现在包络检测器的输出端。出现4.5 MHz的FM载波信号是由于包络检测器的非线性特性，而且检测器的输入(IF信号)的若干项中含有FM音频载

波以及一个离散项(即正弦曲线)，该离散项是视频载波，位于离 FM 载波 4.5 MHz 处。这两个信号的互调产生了 4.5 MHz 的 FM 信号，该信号称为中频伴音信号，内含音频调制。当然，如果这两种输入信号中的任意一个消失，4.5 MHz 的输出信号也将消失。若允许画面的白电平降低，比如降低至 AM 视频信号峰值包络电平(同步尖顶电平)的 10%，这种情况将会发生。这就是 FCC 规定白电平不能低于峰值包络电平的(12.5 ±2.5)% 的原因[见表 8.12 及图 8.31(b)]。当这种情况发生时，由于在电视画面的白色部分，4.5 MHz 的 FM 载波正在以 60 Hz 的速度消失，因而在声音信号中会有嗡嗡声。同步分离电路包括有损积分器，用于恢复垂直同步脉冲(宽脉冲)，以及有损微分器，用于恢复水平脉冲(窄脉冲)。方框图的剩余部分是不言自明的，图中还画出了用户对黑白电视机可进行的调节部分。

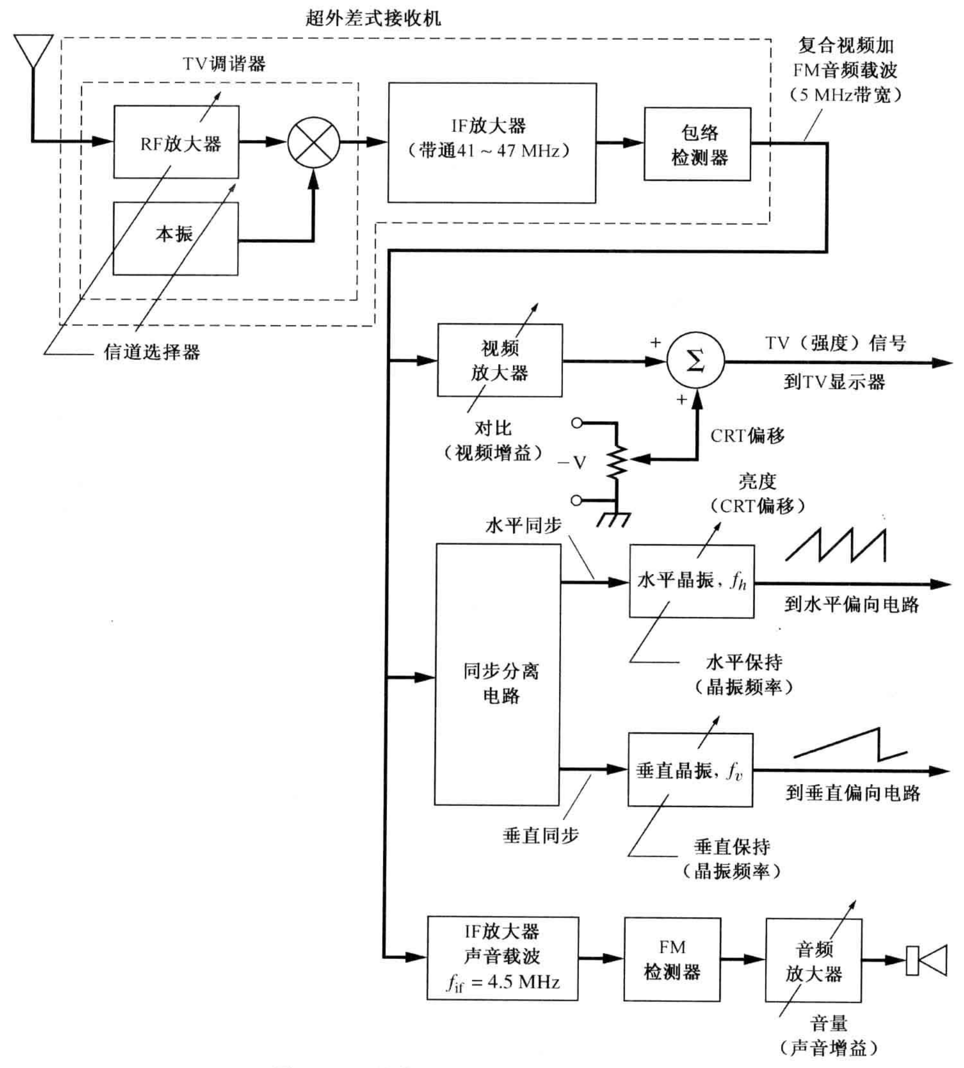


图 8.32　黑白电视接收机的简化方框图

8.9.2　MTS 立体声

立体声[也称多信道电视声(Multichannel Television Sound, MTS)]是可获得的，它采用如图 8.33 所示的 FDM 技术来完成。这种 FDM 技术与标准 FM 广播(5.7 节，图 5.18)所用的技术

相似。为了与单声道电视接收机兼容，左音频信号加上右音频信号，$m_L(t)+m_R(t)$，被直接调频到电视台的声音载波上。立体声的获得是利用 DSB-SC 子载波及 $m_L(t)-m_R(t)$调制来实现的。子载波的频率是 $2f_h$，其中 $f_h=15.734$ kHz，是视频信号的水平同步频率(见表8.12)。也可提供第二音频节目(Second Audio Program，SAP)，例如第二种语言的音频。这是通过采用频率为 $5f_h$ 的 FM 子载波来实现的。另外，还允许采用一个位于 $6.5f_h$ 的专业信道(professional channel)的子载波来给付费用户传输基于用户订购业务的话音或数据。有关已在电视广播中被采用的 FDM 声频标准以及其他可能的 FDM 格式，参见 Eilers 的论文[1985]。

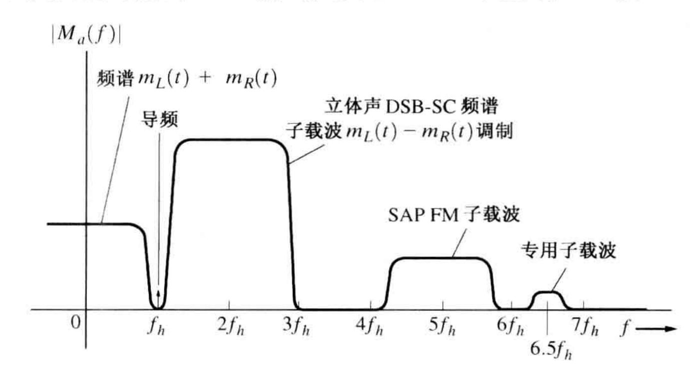


图 8.33 美国电视台的 FM 伴音信号载波上的组合 FDM 基带调制的频谱

8.9.3 模拟彩色电视

彩色电视画面是靠以适当的比例合并红、绿、蓝光产生所需颜色来合成的。这由彩色 CRT 来完成，彩色 CRT 具有三种荧光剂，一种发红光，另一种发绿光，第三种发蓝光。因此，需要用三种电子视频信号 $m_R(t)$、$m_G(t)$、$m_B(t)$来驱动生成红光、绿光和蓝光的电路。另外，需要一种可兼容的彩色电视传输系统，这样黑白电视机可接收到亮度视频信号 $m_y(t)$，该信号与画面的灰度值相对应。这种彩色和黑白传播的兼容性是采用一种类似于 FM 立体声所采用的多路技术来完成的，所不同的是这里涉及到三路信号，而 FM 立体声只有两路信号。

我们将讨论国家电视系统委员会(National Television System Committee，NTSC)兼容性彩色电视系统，这种系统在美国得到充分发展，并在 1954 年被采纳为美国的传输系统。该技术如图 8.34 所示。为实现兼容性传输，相应于画面的红、绿、蓝光亮度的波形信号——分别为 $m_R(t)$、$m_G(t)$、$m_B(t)$——被线性合并，合成了一个均衡黑白信号 $m_y(t)$以及另外两个独立视频信号，同相分量 $m_i(t)$和正交分量 $m_q(t)$(这些分量名字来源于将它们调制到一个子载波的正交调制技术)。这些信号之间的精确的方程关系可由矩阵形式表示：

$$\begin{bmatrix} m_y(t) \\ m_i(t) \\ m_q(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.3 & 0.59 & 0.11 \\ 0.6 & -0.28 & -0.32 \\ 0.21 & -0.52 & 0.31 \end{bmatrix}}_{M} \begin{bmatrix} m_R(t) \\ m_G(t) \\ m_B(t) \end{bmatrix} \tag{8.63}$$

其中，M 是一个 3×3 的矩阵，它把红、绿、蓝信号转化成亮度信号、同相和正交视频(基带)信号。例如，由式(8.63)，亮度(黑白)信号的可表示为

$$m_y(t) = 0.3m_R(t) + 0.59m_G(t) + 0.11m_B(t) \tag{8.64}$$

类似地，易得到 $m_i(t)$和 $m_q(t)$的表达式，$m_i(t)$和 $m_q(t)$被称为色度信号。另外要注意，若 $m_R(t)=m_G(t)=m_B(t)=1$，即最大程度的红、绿、蓝，则 $m_y(t)=1$，即黑白电视中的白电平。

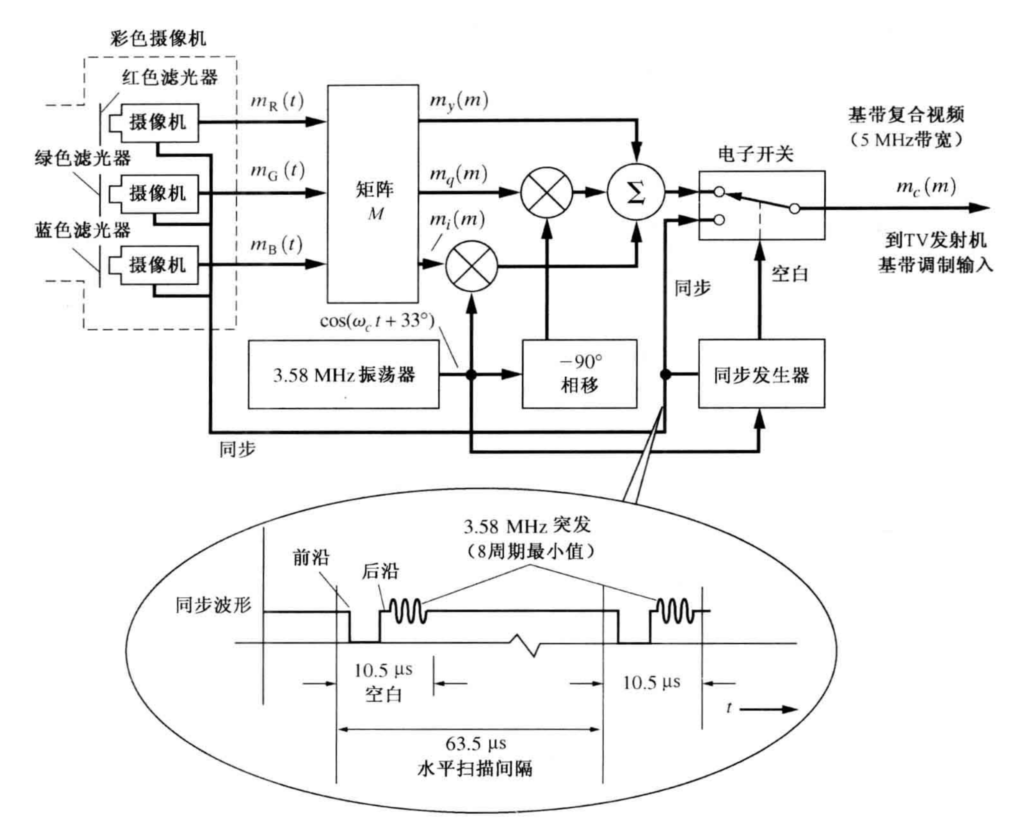


图 8.34　组合 NTSC 基带视频信号的产生[$m_q(t)$是 0.5 MHz 带宽的低通滤波器，而$m_i(t)$是1.5 MHz带宽的低通滤波器]

色度分量是另外的两个线性独立分量，如果它们与亮度信号一起传送至彩色电视接收机，利用逆矩阵运算，可以恢复出红、绿、蓝信号。亮度信号的带宽需要保持在 4.2 MHz，以保护沿画面内物体边界发生的光亮度的急剧变化(高频)。然而，色度信号的带宽不必这么大，因为人眼对颜色的变化不如对黑白亮度的变化来得敏感。根据 NTSC 标准，$m_i(t)$信号的带宽为 1.5 MHz，$m_q(t)$的带宽为 0.5 MHz。当它们被调制到一个子载波时，生成的合成基带信号将具有 4.2 MHz 的带宽(同相子载波信号的上边带被削弱，以保持 4.2 MHz 的带宽)。

合成的 NTSC 基带视频信号为

$$m_c(t) = \begin{cases} m_s(t), & \text{同步间隔中} \\ m_y(t), + \mathrm{Re}\{g_{sc}(t)e^{j\omega_{sc}t}\} & \text{视频间隔中} \end{cases} \tag{8.65}$$

其中，

$$g_{sc}(t) = [m_i(t) - jm_q(t)]e^{j33°} \tag{8.66}$$

式(8.66)表明色度信息被正交调制到一子载波(如表 4.1 所述)。$m_s(t)$是同步信号，$m_y(t)$是亮度信号，$g_{sc}(t)$是子载波信号的复包络。子载波频率为$f_{sc}=3.579\ 545$ MHz ± 10 Hz，我们将在以后看到，选择这个频率的好处是即使子载波信号和亮度信号都落在 4.2 MHz 通带内，它们之间也不会互相干扰。

在模拟广播电视中，这种合成的 NTSC 基带彩色信号被调幅到可视载波上，如式(8.61)及图 8.31 所示。在微波中继系统以及卫星中继系统中，这种 NTSC 基带信号被调频到一个载波

上，如8.5节所述。这些彩色基带信号能在为黑白电视所用的通信系统中传输，尽管对彩色电视传输来说，这些系统的频率响应和线性容限被规定得比较紧致。

如前所述，子载波的复包络信号，见式(8.66)，包含了颜色信息。复包络的幅度$|g_{sc}(t)|$是随时间扫描画面时，画面的色饱和度，即颜色的数量。复包络的相角$\underline{/g_{sc}(t)}$表示色调或色彩，它是时间的函数。这样，在画面被一行行扫描时，$g_{sc}(t)$是随时间的变化在复平面上移动的向量。此向量可被看做位于一色度矢量显示器上，该显示器有一个能显示向量$g_{sc}(t)$的CRT，如图8.35所示。矢量显示器是一种普遍的测试仪器，它被用来校准彩色电视装置，并提供对正在传输的彩色信号质量的在线测量。通常的矢量显示器上，在垂直方向有一x轴，如图中所示。利用式(8.66)，我们可以看到$m_i(t)$和$m_q(t)$信号的正轴方向，与饱和红色、绿色和蓝色向量一起，也能在显示器上被显示出来。例如，如果出现饱和红色，则$m_R=1$，$m_G=m_B=0$。由式(8.63)，我们得到$m_i=0.6$，$m_q=0.21$，这样，由式(8.66)，饱和红色向量是

$$(g_{sc})_{red} = (0.60 - j0.21)e^{j33^\circ} = 0.64 \underline{/13.7^\circ}$$

类似地，饱和绿色向量是$(g_{sc})_{green}=0.59\underline{/151^\circ}$，饱和蓝色向量为$(g_{sc})_{blue}=0.45\underline{/257^\circ}$。这些向量在图8.35中被显示出来。有趣的是，互补色在矢量显示器上具有恰好相反的极性：青色与红色互补，品红与绿色互补，黄色与蓝色互补。

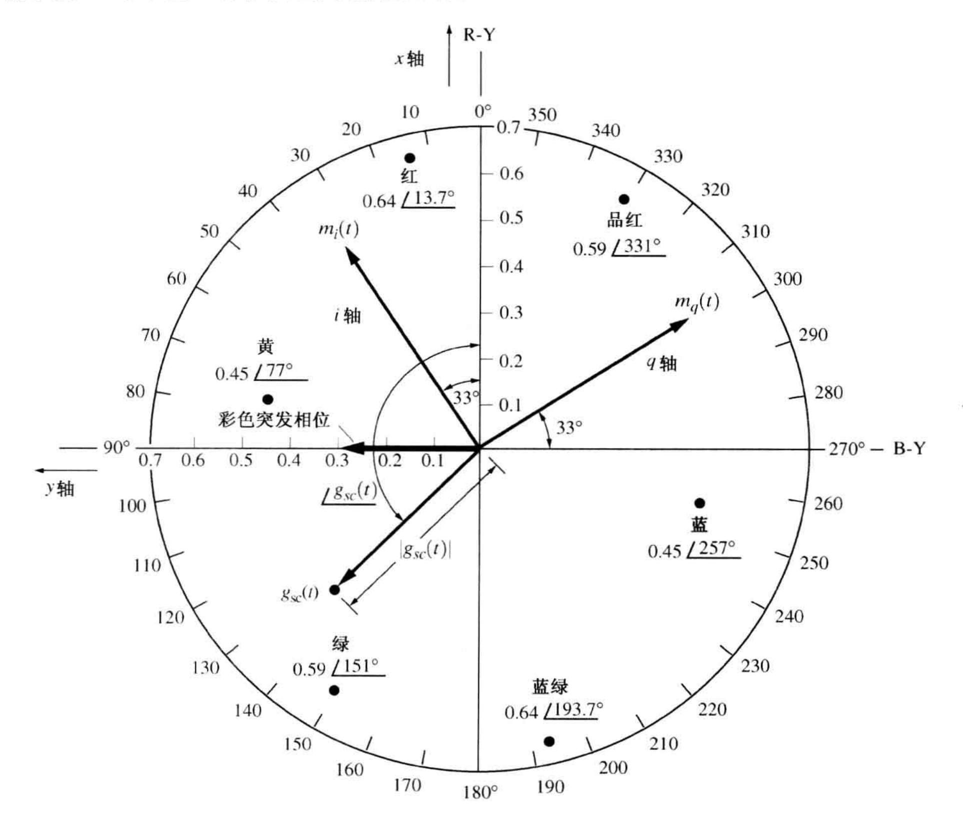


图8.35 3.58 MHz 彩色子载波的复包络的矢量显示器显示

对于在接收机处的彩色子载波解调，需要一个相位参考信息。此相位参考是靠在水平同步脉冲的“后沿”区，键控输入一个8周期(或更多)的3.58 MHz正弦子载波脉冲实现的，如图8.34所示。该参考正弦脉冲的相位是$+90^\circ$，相应于矢量显示器上的x轴(见图8.35)。

模拟彩色电视接收机与模拟黑白电视接收机相似，所不同的是彩色电视机有一个彩色解调电路和一个彩色显示器。这些差异如图 8.36 所示，图中标明了彩色解调器电路。同相信号和正交信号利用乘积检波器来恢复(解调)，在乘积检波器中，从一个锁相 PLL 电路可以得到相位参考信号，该锁相环锁定于在同步脉冲的后沿所发送的彩色脉冲上。M^{-1} 是式(8.63)中给定矩阵的逆矩阵，利用 M^{-1}，相应于红、绿、蓝亮度信号的三个视频波形就可以被恢复出来。注意，电视机上的色调控制器调整用于设定电视机画面色调的参考信号的相位。彩色控制器设定色度子载波信号的增益。如果增益降到零，在乘积检波器的输入端就没有子载波出现。造成的结果是在彩色电视的显示器上，黑白画面将被再生出来。

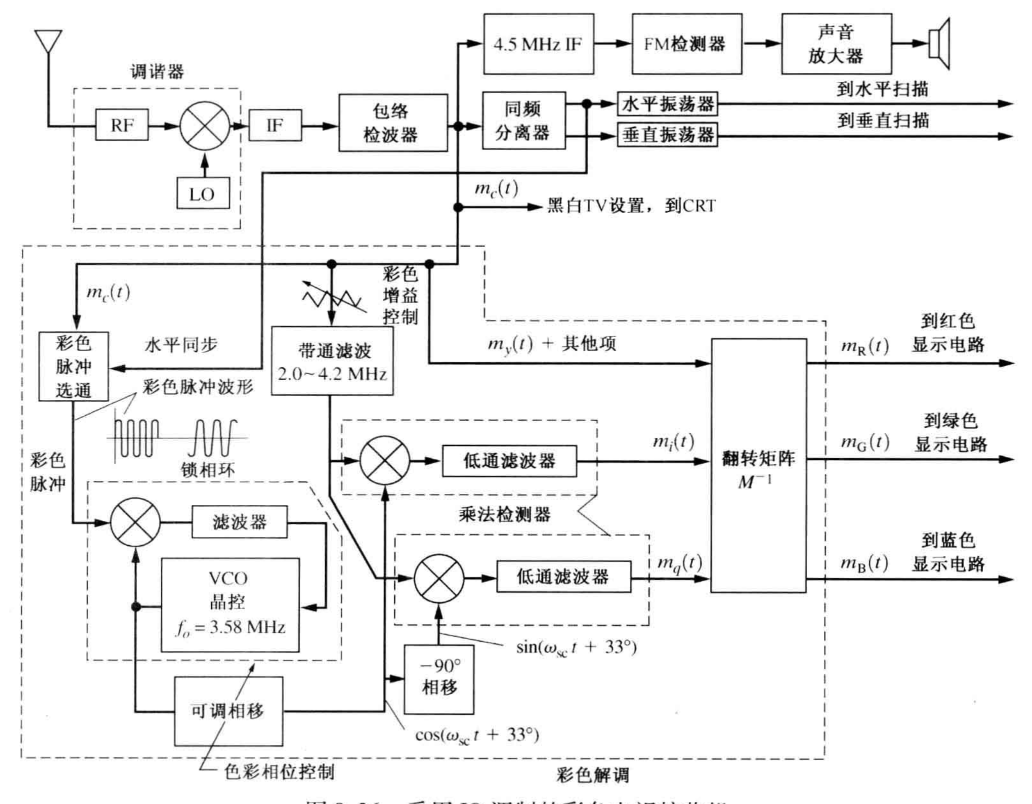


图 8.36　采用 IQ 调制的彩色电视接收机

如前所述，亮度和色度子载波信号两者都包含于 4.2 MHz 合成的 NTSC 基带信号内，从而导致了接收机视频电路中产生干扰信号。例如，在图 8.36 中，有一个干扰信号(即其他项)位于逆矩阵电路的输入端。如果色度子载波频率是水平扫描频率 1/2 的奇数倍，则在观众眼里，该干扰信号在一行行扫描的基础上被匀和。例如，从表 8.12 可以得到，f_{sc} = 3 579 545 Hz，f_h = 15 734 Hz，因而，画面的一扫描行上，有 227.5 个周期的 3.58 MHz 色度干扰信号。因为有半个周期被留下，下一扫描行上的干扰信号恰与当前行的干扰信号存在 180°相位差，所以当观众看电视画面时，此干扰会被人眼清除。

如我们所见，NTSC 彩色电视系统是一种对基本工程原理的巧妙应用。

8.9.4　TV 和 CATV 系统的标准

表 8.12 中总结了美国采用的模拟电视传输标准，其同步信号波形如图 8.37 所示。表 8.13 给出了模拟和数字广播电视信道的频率列表。

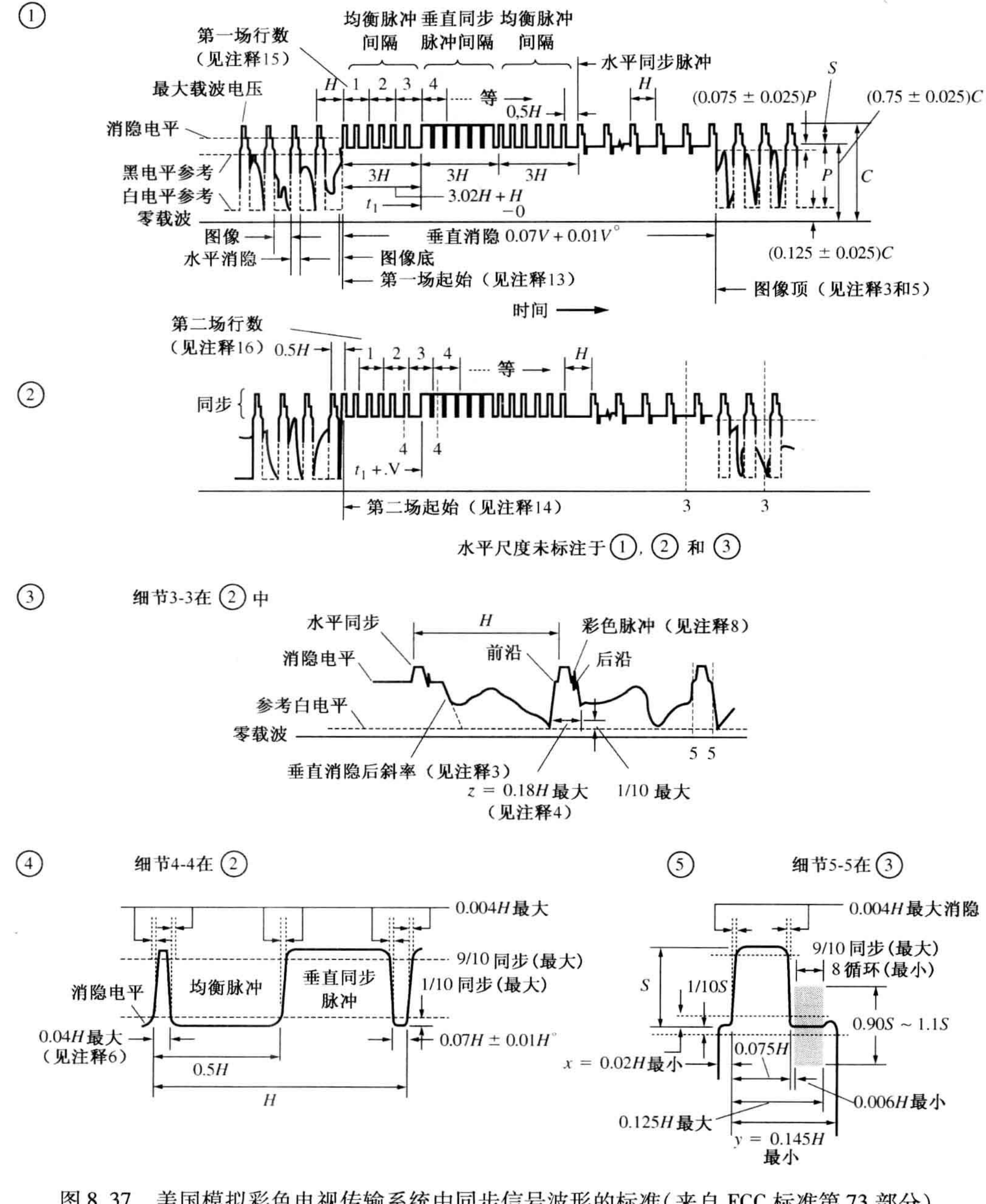


图 8.37 美国模拟彩色电视传输系统中同步信号波形的标准(来自 FCC 标准第 73 部分)

图 8.37 的说明:

1. H = 从当前行的开始时间至下一行的开始时间 $= 1/f_h$(见表 8.12)。
2. V = 从当前场的开始时间至下一场的开始时间 $= 1/f_v$(见表 8.12)。
3. 垂直消隐脉冲的前沿和后沿边缘应少于 0.1H。
4. 水平消隐脉冲的前沿和后沿斜率必须足够大,以保证任何图像内容条件下$(x + y)$和(z)的最小值和最大值。
5. 标注有星号的范围表示给定的公差只允许用于长期变化而不是连续周期。
6. 均衡脉冲的面积应该处于水平同步脉冲面积的 0.45 ~ 0.5 之间。
7. 彩色脉冲(色同步)串后跟随一个水平脉冲,但在均衡脉冲以及较宽的垂直脉冲之间就消失了。

8. 在单色传输期间彩色脉冲(色同步)消失。

9. 脉冲频率应该是 3.579 545 MHz。频率公差为 ±10 Hz，频率改变的最大速率不超过 1/10 Hz/s。

10. 水平扫描频率应该是 2/455 倍的脉冲频率。

11. 用于规定脉冲的范围决定了脉冲的开始和停止时间，但不是相位。彩色脉冲(色同步)串由一个幅度调制的连续正弦波形组成。

12. 范围 P 代表亮度信号距离消隐电平的最大振幅，但是不包含色度信号。范围 S 是高于消隐电平的同步幅度。范围 C 是峰值载波幅度。

13. 场 1 的开始由位于第一个均衡脉冲和先前的 H 同步脉冲之间的整行来定义。

14. 场 2 的开始由位于第一个均衡脉冲和先前的 H 同步脉冲之间的半行来定义。

15. 场 1 的行号从场 1 中第一个均衡脉冲开始。

16. 场 2 的行号从场 2 中第二个均衡脉冲开始。

17. 更多的解释和公差见表 8.12。

表 8.13 中还列出了美国 CATV 信道标准(模拟和数字)。CATV 系统采用同轴电缆和放大器将电视信号与其他信号从“前端”传输给用户。由于缆线信号并不对空中辐射，所以通常被分配给双向无线传输和其他空中业务的频率能被用来作为缆线中的增补电视信道。于是，如表中所示，CATV 的信道分配已被标准化。

表 8.13　美国电视和电缆信道频率分配

信道		空中广播信道		电缆系统					
				标准电缆		HRC 电缆系统		IRC 电缆系统	
信道数	电缆指示机	下限 (MHz)	上限 (MHz)	下限 (MHz)	上限 (MHz)	下限 (MHz)	上限 (MHz)	下限 (MHz)	上限 (MHz)
	T-7			5.75	11.75				
	T-8			11.75	17.75				
	T-9			17.75	23.75				
	T-10			23.75	29.75				
	T-11			29.75	35.75				
	T-12			35.75	41.75				
	T-13			41.75	47.75				
	T-14			47.75	53.75				
低波段 VHF									
2		54.00	60.00	54.00	60.00	52.75	58.75	54.00	60.00
3		60.00	66.00	60.00	66.00	58.75	64.75	60.00	66.00
4		66.00	72.00	66.00	72.00	64.75	70.75	66.00	72.00
		双向无线电、航空学 72 ~ 76 MHz							
1	A-8			No Ch 1	No Ch 1	70.75	76.75	72.00	78.00
5	A-7	76.00	82.00	76.00	82.00	76.75	82.75	78.00	84.00
6	A-6	82.00	88.00	82.00	88.00	82.75	88.75	84.00	90.00
		FM 广播、航空学、双向电 88 ~ 174 MHz							
高波段 VHF									
7		174.00	180.00	174.00	180.00	172.75	178.75	174.00	180.00
8		180.00	186.00	180.00	186.00	178.75	184.75	180.00	186.00
9		186.00	192.00	186.00	192.00	184.75	190.75	186.00	192.00
10		192.00	198.00	192.00	198.00	190.75	196.75	192.00	198.00
11		198.00	204.00	198.00	204.00	196.75	202.75	198.00	204.00
12		204.00	210.00	204.00	210.00	202.75	208.75	204.00	210.00
13		210.00	216.00	210.00	216.00	208.75	214.75	210.00	216.00

(续表)

信道		空中广播信道		电缆系统					
				标准电缆		HRC 电缆系统		IRC 电缆系统	
信道数	电缆指示机	下限 (MHz)	上限 (MHz)	下限 (MHz)	上限 (MHz)	下限 (MHz)	上限 (MHz)	下限 (MHz)	上限 (MHz)
UHF		军事、航空学 216~470 MHz							
14	A	470.00	476.00	120.00	126.00	118.75	124.75	120.00	126.00
15	B	476.00	482.00	126.00	132.00	124.75	130.75	126.00	132.00
16	C	482.00	488.00	132.00	138.00	130.75	136.75	132.00	138.00
17	D	488.00	494.00	138.00	144.00	136.75	142.75	138.00	144.00
18	E	494.00	500.00	144.00	150.00	142.75	148.75	144.00	150.00
19	F	500.00	506.00	150.00	156.00	148.75	154.75	150.00	156.00
20	G	506.00	512.00	156.00	162.00	154.75	160.75	156.00	162.00
21	H	512.00	518.00	162.00	168.00	160.75	166.75	162.00	168.00
22	I	518.00	524.00	168.00	216.00	166.75	214.75	168.00	216.00
23	J	524.00	530.00	216.00	222.00	214.75	220.75	216.00	222.00
24	K	530.00	536.00	222.00	228.00	220.75	226.75	222.00	228.00
25	L	536.00	542.00	228.00	234.00	226.75	232.75	228.00	234.00
26	M	542.00	548.00	234.00	240.00	232.75	238.75	234.00	240.00
27	N	548.00	554.00	240.00	246.00	238.75	244.75	240.00	246.00
28	O	554.00	560.00	246.00	252.00	244.75	250.75	246.00	252.00
29	P	560.00	566.00	252.00	258.00	250.75	256.75	252.00	258.00
30	Q	566.00	572.00	258.00	264.00	256.75	262.75	258.00	264.00
31	R	572.00	578.00	264.00	270.00	262.75	268.75	264.00	270.00
32	S	578.00	584.00	270.00	276.00	268.75	274.75	270.00	276.00
33	T	584.00	590.00	276.00	282.00	274.75	280.75	276.00	282.00
34	U	590.00	596.00	282.00	288.00	280.75	286.75	282.00	288.00
35	V	596.00	602.00	288.00	294.00	286.75	292.75	288.00	294.00
36	W	602.00	608.00	294.00	300.00	292.75	298.75	294.00	300.00
37	AA	608.00	614.00	300.00	306.00	298.75	304.75	300.00	306.00
38	BB	614.00	620.00	306.00	312.00	304.75	310.75	306.00	312.00
39	CC	620.00	626.00	312.00	318.00	310.75	316.75	312.00	318.00
40	DD	626.00	632.00	318.00	324.00	316.75	322.75	318.00	324.00
41	EE	632.00	638.00	324.00	330.00	322.75	328.75	324.00	330.00
42	FF	638.00	644.00	330.00	336.00	328.75	334.75	330.00	336.00
43	GG	644.00	650.00	336.00	342.00	334.75	340.75	336.00	342.00
44	HH	650.00	656.00	342.00	348.00	340.75	346.75	342.00	348.00
45	II	656.00	662.00	348.00	354.00	346.75	352.75	348.00	354.00
46	JJ	662.00	668.00	354.00	360.00	352.75	358.75	354.00	360.00
47	KK	668.00	674.00	360.00	366.00	358.75	364.75	360.00	366.00
48	LL	674.00	680.00	366.00	372.00	364.75	370.75	366.00	372.00
49	MM	680.00	686.00	372.00	378.00	370.75	376.75	372.00	378.00
50	NN	686.00	692.00	378.00	384.00	376.75	382.75	378.00	384.00
51	OO	692.00	698.00	384.00	390.00	382.75	388.75	384.00	390.00
52	PP	698.00	704.00	390.00	396.00	388.75	394.75	390.00	396.00
53	QQ	704.00	710.00	396.00	402.00	394.75	400.75	396.00	402.00
54	RR	710.00	716.00	402.00	408.00	400.75	406.75	402.00	408.00
55	SS	716.00	722.00	408.00	404.00	406.75	412.75	408.00	404.00
56	TT	722.00	728.00	404.00	420.00	412.75	418.75	404.00	420.00
57	UU	728.00	734.00	420.00	426.00	418.75	424.75	420.00	426.00
58	VV	734.00	740.00	426.00	432.00	424.75	430.75	426.00	432.00
59	WW	740.00	746.00	432.00	438.00	430.75	436.75	432.00	438.00
60	XX	746.00	752.00	438.00	444.00	436.75	442.75	438.00	444.00
61	YY	752.00	758.00	444.00	450.00	442.75	448.75	444.00	450.00
62	ZZ	758.00	764.00	450.00	456.00	448.75	454.75	450.00	456.00
63		764.00	770.00	456.00	462.00	454.75	460.75	456.00	462.00
64		770.00	776.00	462.00	468.00	460.75	466.75	462.00	468.00
65		776.00	782.00	468.00	474.00	466.75	472.75	468.00	474.00
66		782.00	788.00	474.00	480.00	472.75	478.75	474.00	480.00
67		788.00	794.00	480.00	486.00	478.75	484.75	480.00	486.00
68		794.00	800.00	486.00	492.00	484.75	490.75	486.00	492.00
69		800.00	806.00	492.00	498.00	490.75	496.75	492.00	498.00

2009年，空中电视广播信道停止服务

（续表）

信道		空中广播信道		电缆系统					
				标准电缆		HRC 电缆系统		IRC 电缆系统	
信道数	电缆指示机	下限（MHz）	上限（MHz）	下限（MHz）	上限（MHz）	下限（MHz）	上限（MHz）	下限（MHz）	上限（MHz）
70		806.00	812.00	498.00	504.00	496.75	502.75	498.00	504.00
71		812.00	818.00	504.00	510.00	502.75	508.75	504.00	510.00
72		818.00	824.00	510.00	516.00	508.75	514.75	510.00	516.00
73		824.00	830.00	516.00	522.00	514.75	520.75	516.00	522.00
74		830.00	836.00	522.00	528.00	520.75	526.75	522.00	528.00
75		836.00	842.00	528.00	534.00	526.75	532.75	528.00	534.00
76		842.00	848.00	534.00	540.00	532.75	538.75	534.00	540.00
77		848.00	854.00	540.00	546.00	538.75	544.75	540.00	546.00
78		854.00	860.00	546.00	552.00	544.75	550.75	546.00	552.00
79		860.00	866.00	552.00	558.00	550.75	556.75	552.00	558.00
80		866.00	872.00	558.00	564.00	556.75	562.75	558.00	564.00
81		872.00	878.00	564.00	570.00	562.75	568.75	564.00	570.00
82		878.00	884.00	570.00	576.00	568.75	574.75	570.00	576.00
83		884.00	890.00	576.00	582.00	574.75	580.75	576.00	582.00
84				582.00	588.00	580.75	586.75	582.00	588.00
85				588.00	594.00	586.75	592.75	588.00	594.00
86				594.00	600.00	592.75	598.75	594.00	600.00
87				600.00	606.00	598.75	604.75	600.00	606.00
88				606.00	612.00	604.75	610.75	606.00	612.00
89				612.00	618.00	610.75	616.75	612.00	618.00
90				618.00	624.00	616.75	622.75	618.00	624.00
91				624.00	630.00	622.75	628.75	624.00	630.00
92				630.00	636.00	628.75	634.75	630.00	636.00
93				636.00	642.00	634.75	640.75	636.00	642.00
94				642.00	90.00	640.75	88.75	642.00	90.00
95	A-5			90.00	96.00	88.75	94.75	90.00	96.00
96	A-4			96.00	102.00	94.75	100.75	96.00	102.00
97	A-3			102.00	108.00	100.75	106.75	102.00	108.00
98	A-2			108.00	114.00	106.75	112.75	108.00	114.00
99	A-1			114.00	648.00	112.75	646.75	114.00	648.00
100				648.00	654.00	646.75	652.75	648.00	654.00
101				654.00	660.00	652.75	658.75	654.00	660.00
102				660.00	666.00	658.75	664.75	660.00	666.00
103				666.00	672.00	664.75	670.75	666.00	672.00
104				672.00	678.00	670.75	676.75	672.00	678.00
105				678.00	684.00	676.75	682.75	678.00	684.00
106				684.00	690.00	682.75	688.75	684.00	690.00
107				690.00	696.00	688.75	694.75	690.00	696.00
108				696.00	702.00	694.75	700.75	696.00	702.00
109				702.00	708.00	700.75	706.75	702.00	708.00
110				708.00	714.00	706.75	712.75	708.00	714.00
111				714.00	720.00	712.75	718.75	714.00	720.00
112				720.00	726.00	718.75	724.75	720.00	726.00
113				726.00	732.00	724.75	730.75	726.00	732.00
114				732.00	738.00	730.75	736.75	732.00	738.00
115				738.00	744.00	736.75	742.75	738.00	744.00
116				744.00	750.00	742.75	748.75	744.00	750.00
117				750.00	756.00	748.75	754.75	750.00	756.00
118				756.00	762.00	754.75	760.75	756.00	762.00
119				762.00	768.00	760.75	766.75	762.00	768.00
120				768.00	774.00	766.75	772.75	768.00	774.00
121				774.00	780.00	772.75	778.75	774.00	780.00
122				780.00	786.00	778.75	784.75	780.00	786.00
123				786.00	792.00	784.75	790.75	786.00	792.00
124				792.00	798.00	790.75	796.75	792.00	798.00
125				798.00	804.00	796.75	802.75	798.00	804.00

1. 空中广播信道 52～69 被用于蜂窝服务，于 2009 年 6 月停止广播。
2. 1974 年空中广播信道 70～83 停止广播，这些频率被蜂窝业务使用。

有线电视信道存在三套不同的标准：标准有线系统、HRC 系统以及 IRC 系统。标准和 IRC 系统信道低端边缘频率是偶数，HRC 系统的信道分配方案使得每一个信道的视频载波(对模拟电视而言)是偶数。所有这些系统的容量都是124 个信道(假定有线系统采用工作在800 MHz 的宽带放大器)。为了接收这些有线信道，使用者必须采用具有 CATV 能力的电视设备或者使用一个下变频器将 CATV 信道转换成空中信道，如信道3 或4，使得电视能够接收。大多数美国电视设备都是有线兼容的。这意味着在电视设备内部有一个内嵌的硬件开关或软件电路，以使用户可以将电视初始化到合适的信道配置(即选择无线广播、标准有线、HRC 或者 IRC 有线信道等不同模式工作)。参见表8.13，标准有线和 IRC 有线系统和空中广播站从信道2 ~ 13 具有相同的信道频率分配。因此，若一个电视设备被设置成接收空中广播信道，但是却与标准有线或者 IRC 有线系统相连，其从信道2 ~ 13 将可以从电缆系统正确接收，但是，从信道14 开始往上将不能正确接收。

CATV 系统也可以是双向的，允许一些用户发送信号给前端。在低频段分离系统中，低于50 MHz 的频率(T 边带信道)被用来向前端发送信息。在中间频段分离系统中，位于120 ~ 150 MHz 的频段被用来向前端发送信息。

优质电视节目通常以一定额外的价格提供给用户。通常靠改变视频同步信号或采用数字编码技术来对优质电视节目频道进行扰频。然后对优质电视节目的订户提供合适的解码器，这些解码器在一些系统中是可寻址的，并且可由 CATV 公司远程编程控制。

8.9.5 数字电视(DTV)

在美国和世界上许多其他国家，数字电视已经变为现实。在2009 年7 月，美国停止了模拟无线电视传输(除去一些超低功率站)，并且开始建立数字电视台。这是 FCC 和电视广播工业界在美国努力的结果。自1987 年以来，FCC 一直在鼓励高清晰度电视(high-definition television，HDTV)系统的发展，以取代 NTSC 系统。HDTV 系统具有高分辨率，质量接近于35 mm 电影，而且具有16:9 的宽屏比(宽比高)，而不是 NTSC 的4:3 窄屏比。目前，已提出了超过20 种的 HDTV 方法[Jurgen，1988；Jurgen，1991]。到1993 年，参加竞争的提案减少至4 个数字系统[Challapali 等，1995；Harris，1993；Zou，1991]。1993 年5 月，这4 个竞争系统的提出者联合起来发展单一的数字电视系统(DTV)，该系统采用这4 个竞争系统最好的思想[Challapali 等，1995；Hopkins，1994；Petajan，1995]。这个联合起来的组织称为 Grand Alliance(GA)。它的成员为 AT&T，通用仪器公司，MIT，飞利浦北美电子公司，David Sarnoff 研究中心，Thomson Consumer Electronics 和 Zenith 电子公司。这样，在1996 年产生了 FCC 的 DTV 标准，称为 ATSC(Advanced Television System Committee)标准，现在在美国主要城市的空中都有 ATSC 广播台。

表8.14 总结了美国的 ATSC 标准。该标准实际上是由几个标准联合组成的，为允许不同的分辨率和纵横比而设。主要有五种形式，两种是高清晰度(HD)，三种为标准清晰度(SD)。宽屏画面(16:9 纵横比)规定于两种 HD 形式以及一种 SD 形式中。另两种 SD 形式采用传统宽度的画面(4:3)。另外，帧速率根据隔行扫描或逐行扫描，可以是24 帧/秒、30 帧/秒或60 帧/秒。这里包括24 帧/秒的模式，以便更容易适应运动电影(24 帧/秒)。这些多样性，总共给出了18 种可能的画面格式。所有的 ATSC 接收机都被设计成可对18 种格式进行解码并显示相应画面(尽管分辨率可能不会被保持)。广播台可以根据不用的节目(或者根据节目或广告)选择不同的格式。但是对广播台而言，由于能够产生所有的格式，因而成本效率低。对 HDTV 标准，NBC 和 CBS 电视网络采用1080i(即1080 × 1980 像素，隔行扫描)格式。ABC 采用720p 格式，因为他

们相信 720 行逐行扫描在视觉上优于 1080i。对于 SDTV，NBC 和 ABC 采用 480p 格式，而 CBS 采用 480i 格式。注意，SDTV 的垂直分辨率为 480 行，这等同于美国模拟电视的垂直分辨率 483 行[式(8.59b)给出]。4∶3 的 SDTV 的水平分辨率为 704 像素或 640 像素，高于模拟电视的 445 像素[式(8.60b)给出]。

表 8.14　美国 ATSC 系统

	视频规范				
格式类型	HD	HD	SD	SD	SD
高宽比	16∶9	16∶9	4∶3	16∶9	4∶3
主动扫描					
行/帧	1080	720	480	480	480
像素/行	1920	1280	704	704	640
帧速率					
(Hz)[a]	24p, 30p, 30i	24p, 30p, 60p	24p, 30p, 30i, 60p	24p, 30p, 30i, 60p	24p, 30p, 30i, 60p
压缩标准[b]	MPEG-2				
压缩技术[c]	DCT, 8×8 块				
音频规范					
方法	Dolbey AC-3				
音频带宽	20 kHz				
采样频率	48 kHz				
动态范围	100 dB				
环绕声道数[d]	5.1				
压缩数据速率	384 kbps				
多语言	通过多个 AC-3 数据流				
数据传输系统					
类型	分组				
TDM 技术	MPEG-2，系统层				
分组大小	188 字节				
分组头大小	4 字节				
加密	通过授权解码器进行解码				
特殊特性支持	内置字幕和私人数据				
陆地模式广播的传输规范[e]					
调制[f]	8VSB				
比特/符号	3				
信道带宽	6 MHz				
信道滤波器	升余弦滚降，$r=0.115/2=0.0575$				

a　p = 循环扫描，i = 隔行扫描。

b　MPEG = 国际标准组织(ISO)的活动图像组。

c　DCT = 采用每像素 8×8 块的二维(水平和垂直)离散余弦变换。

d　左，中，右，左声道，右声道和重低音。第 6 个(重低音)信道只包含低音频率，所以被认为是 0.1 个信道。

e　陆地模式用于空口广播。对于通过 CATV 进行的传输，可能使用 16VSB。这可以允许在一个 6 MHz 带宽的信道上使用更高的 38.6 Mbps 的有效载荷数据速率。

f　8VSB = 8 级残留边带调制。也就是说，一个 8 级基带线性码被幅度调制到一个抑制载波(DSB-SC)信号上，并且下边带被滤去以产生 VSB 信号。

(续表)

符号(波特)速率(包括同步)	10.76 Msymbol/s
有效载荷数据速率(包括同步)	19.39 Mbps
编码(FEC)	码率为2/3的TCM和207 187的Reed-Solomon码
CNR门限	误码率为3×10^{-6}时为14.9 dB
导频(用于载波同步)	高于RF信道低频带边缘310 kHz

a p = 循环扫描, i = 隔行扫描。

b MPEG = 国际标准组织(ISO)的活动图像组。

c DCT = 采用每像素8×8块的二维(水平和垂直)离散余弦变换。

d 左, 中, 右, 左声道, 右声道和重低音。第6个(重低音)信道只包含低音频率, 所以被认为是0.1个信道。

e 陆地模式用于空口广播。对于通过CATV进行的传输, 可能使用16VSB。这可以允许在一个6 MHz带宽的信道上使用更高的38.6 Mbps的有效载荷数据速率。

f 8VSB = 8级残留边带调制。也就是说, 一个8级基带线性码被幅度调制到一个抑制载波(DSB-SC)信号上, 并且下边带被滤去以产生VSB信号。

未经压缩的视频数据的比特率大得惊人。例如, 根据表8.14, 对1080有效行, 每行1920个采样(像素), 每个采样8位, 每秒30帧(画面), 以及3原色(RGB), 则比特率为$1080\times1920\times8\times30\times3=1500$ Mbps。然而, 如果采用8量化级(3比特/符号)的多级信号, 则一条带宽为6 MHz的电视信道只能支持大约20 Mbps的数据速率(由图5.33, $B_T\approx D=R/\ell=20/3=6.67$ MHz), 因而需要一个约为75(1500/20)的数据压缩因子。如表8.14所示, 该数据压缩因子靠采用MPEG编码技术来实现。该技术包括对每一帧内8×8像素块进行离散余弦变换(discrete cosine transform, DCT), 以及仅对每一像素块的重要的DFT系数进行数字化以用于传送。而且, 对每一个新的帧, 仅当8×8像素块内, 帧与帧之间存在变化时才传送数据。

帧与帧之间的冗余靠运动估计和运动补偿来清除。有三种类型的编码帧。中间帧(inter-frame, I-frame)是在没有预测的隔离情况下的编码, 这种帧被用做参考帧。预测帧(predictive frame, P-frame)是由上一个I-frame作前向预测而得到的帧。双向帧(bidirectional frame, B-frame)是为过去或将来的I和P帧做的预测。由一个I帧以及一个或多个P和B帧所组成的序列, 就形成了一个MPEG图片组(group of pictures, GOP)[Gibson, 1997]。

如表8.14所示, 这就产生了19.39 Mbps的有效负载(已压缩的)数据速率。该有效负载数据加上FEC编码的奇偶校验位, 输入到一个3位数模转换器(DAC)中, 以生成符号速率(波特率)为$D=10.76$兆符号/秒的8量化级的基带行编码。如图8.38所示, 该8级数据被划分成段, 每段由832个符号组成, 其中有一个4符号的同步脉冲位于每段的起始, 为传送的数据提供参考。每312段以后, 额外的训练数据被插入到一整个段内, 该额外的数据能被用来训练接收机, 以便对信道衰落进行调整, 以及消除多径干扰。合成的8级基带信号以调幅方式调制到载波上。调制过程中, 在基带信号上加入了一个直流偏置电压, 这使得频谱中将有一个离散载波分量。此频率为载波频率f_c的导频音, 为DTV接收机中的载波发生器电路提供同步。一个残留边带VSB滤波器(如5.5节及5.6节所述)被用来消除AM信号的低边带, 并产生残留边带信号。该残留边带被设计为其边缘具有均方根升余弦滚降特性(在发射机和接收机处)。如3.6节中所讨论的, 这种滚降被用来滤除由矩形数据符号产生的$\sin(x)/x$频谱的旁瓣(见图5.33), 这样不会对滤波后的符号引入ISI。图8.39给出了产生的8VSB信号的频谱, 其中载频f_c为309.44 kHz, 高于低边带边缘。

完整的美国DTV标准可在ATSC的网站www.atsc.org得到。在欧洲, 数字视频广播(Digital Video Broadcasting, DVB)标准已被采纳为数字电视的标准。DVB采用编码正交频分复用(Coded Orthogonal Frequency Division Multiplexing, COFDM)来调制, 而不是8-VSB。详细信息参见网站www.dvb.org。

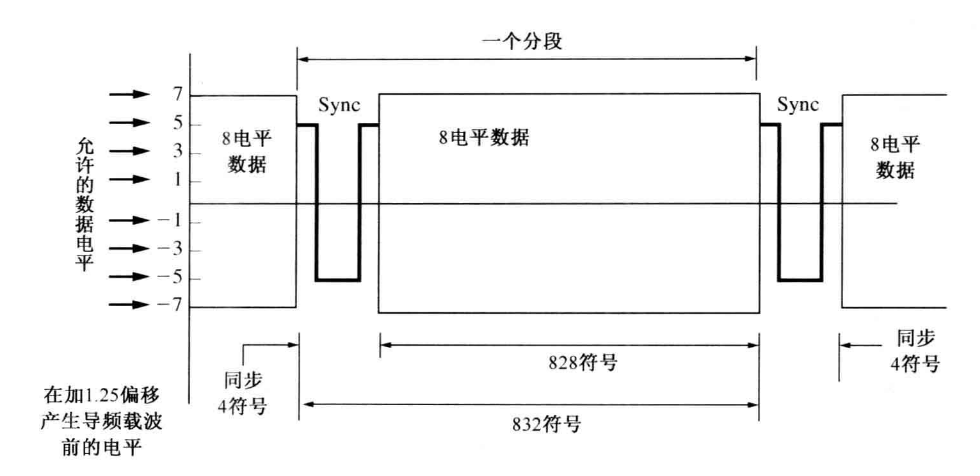


图 8.38　具有段同步的 8 电平基带信号

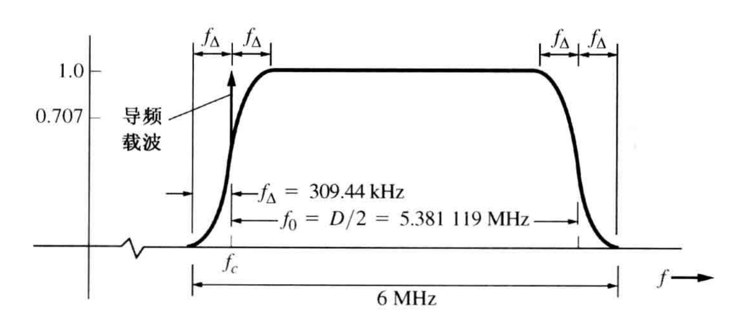


图 8.39　具有均方根升余弦段滚降特性的 8VSB DTV 信号的频谱

由于在一个 SD 帧内的像素数(480 × 704 = 337 920)约是一个 HD 帧内像素数(1080 × 1920 = 2 073 600)的 1/6，DTV 广播台就有一个非常有趣的想法：利用时分复用来传送多路 SD 节目，因为实现这种多路传输并不会超过 19.39 Mbps 的有效负载数据率。也就是说，在一个 6 MHz 的电视信道上，可以同时传送 4 ~ 6 路 SDTV 节目来取代一路 1080iHD 节目。这种多路 SDTV 的选择对电视广播台来说非常有利可图，因为他们可以和 HDTV 节目一起提供 SDTV 节目。

数字电视具有下列优势：

- 采用数字信号处理(DSP)电路；
- 无误差地再生出中继的和已录制的 TV 画面，因为二进制数据代表了画面；
- CD 质量的多路声音信道(4 ~ 6 个)可提供立体声多语言功能；
- 可以多路复用数据，以对屏幕图像加字幕及对 TV 录制设备和其他设备进行控制；
- 利用 DSP 电路可以消除多路图像(重影)和一些触发噪声；
- 由于采用数字调制，电视发射机所需的功率较低；
- 共道 ATSC 信号相互间的干扰小于同信道 NTSC 模拟信号相互间的干扰；
- 在每个信道，可同时传送几路 SDTV 节目和一路 HDTV 节目。

美国的 DTV 系统是通过给每个现有的 NTSC 电视台分配一个新的 DTV 信道来实现的。在过渡期间(2009 月 6 月前)，每个台将会同时在它现有的信道上传送 NTSC 信号，在它的新信道上传送 ATSC DTV 信号。只有频道 2 ~ 51 被分配给 DTV 站所使用(频道 52 ~ 69 不再用于电视业务，而被分配给蜂窝电话使用，从而创建了 700 MHz 的新的蜂窝频段。例如，可以对比表 8.8 和表 8.13)。

2009年7月12日开始，模拟NTSC信号被永久关闭(除了一些超低功率、低天线高度的站点)。既然NTSC信号被关闭，FCC已经允许一些DTV站点变回至它们曾经用于NTSC电视传输的信道，前提是它们能够满足以足够功率发送来获得期望覆盖范围，但是不会对该区域内其他DTV站点造成干扰的要求(对DTV站点而言，这一信道变化的成本很高，因为它们不得不为曾经的NTSC频道和最初分配给DTV的频道配备天线和DTV发射机)。

新的ATSC DTV系统使用虚拟频道这一概念。也就是说，FCC为每个DTV站点分配一个处于2~51的射频(RF)频道(见表8.13中RF信道频带)，但是DTV广播台可能在其广播的数字比特流中插入数据来表明另一个被称为虚拟频道号的频道编号。当接收到DTV信号时，HDTV接收机会检测由广播台发送的虚拟频道号，并在电视屏幕上显示该虚拟频道号。大多数广播台选择使用它们以前的NTSC的RF频道号作为其虚拟频道号。这样，即使DTV站点正在一个不同的RF频道(DTV频道由FCC分配)上广播，消费者也会在他们的HDTV设备上看见旧的NTSC频道号。例如，一个位于佛罗里达Gainesville的电视台WCJB在过去近40年时间里都使用RF频道20来发送它们的模拟NTSC信号，并且电视用户知道将其作为TV20的站点。对于DTV传输，FCC为其分配了RF频道16，因此它们现在在RF频道16上进行广播。但是，当用户调整接收该DTV信号时，即使HDTV设备实际调整至RF频道16，显示器上仍会显现频道20，即虚拟频道号。从而使观看者认为TV20仍然出现在频道20上。

你所在邮编区域内DTV站点列表，以及你所在美国邮编区域内其相应的RF信道号、虚拟信道号和信号强度，可以参见www.antennaweb.org。

8.10 电缆数据调制解调器

老的CATV系统使用全同轴分配系统，并且工作在450 MHz附近。提供高速互联网连接(通过使用电缆调制解调器)的现代CATV系统使用光纤从CATV前端来分配电视和数据信号至相邻的用户。在每个相邻的用户，信号从光转变为射频并且通过同轴线传送至家庭。这使得相邻同轴电缆网可以工作在800MHz，因为同轴分配线相对较短，并且只需非常少的RF放大器。

为了在同轴网中分发相邻数据业务，系统在50~750 MHz范围内为下行数据业务分配一个或更多的电视信道，在5~42 MHz的范围内为上行数据提供一个或更多的信道。用户将进入他/她家的CATV电缆连接到电缆调制解调器上，该调制解调器的作用是对下行数据解调和对上行数据调制。调制解调器的数据通常通过以太网线(或USB，可能性稍小些)连接到一台本地的计算机或室内的数据局域网中，下行调制解调器数据速率通常大约是8 Mbps，而上行速率大约是4 Mbps。

参照表8.15，若采用64QAM，那么单一的下行6 MHz宽信道能够支持27 Mbps的组合下行数据速率(由相邻的用户之间共享)。如果使用256QAM，那么支持的速率能够到达36 Mbps。典型地，若采用QPSK调制，一个上行数据流信道支持10 Mbps的组合数据速率，若采用16QAM，则为30 Mbps。上行数据信道可以分解为三个2 MHz带宽的信道，对于QPSK每一个支持3 Mbps的数据率，对于16QAM每一个支持10 Mbps的数据率。因为与6 MHz信道相比，2 MHz信道上的用户数较少，所以2 MHz带宽的信道减少了由每一个用户发射进入到上行数据流信道的噪声。

因为采用了统计复用的方式，所以一个下行链路和一个6 MHz带宽的上行同轴信道可以支持大约200个用户。采用统计复用时，每一个用户仅当需要的时候使用分配给他/她的数据速率(例如，上行为3 Mbps)；否则，被其他的用户使用。应用多个6 MHz的信道，可以支持500~2000个相邻的用户。若需要支持更多用户的容量，最初的相邻小区可以分解为多个更小一些的相邻的小区。

从上述讨论可以看到，电缆调制解调器比 DSL 调制解调器复杂得多。它们具有前端电路（在 VHF 和 UHF 范围内工作）、下变频器、中频以及调制器和解调器。

表 8.15　电缆调制解调标准

项　目	下行数据	上行数据
载波频率范围	50 ~ 750 MHz	5 ~ 42 MHz
信道带宽	6 MHz	6 MHz 或 2 MHz[a]
调制	64QAM 或 256QAM	QPSK 或 16QAM
组合数据速率	27 Mbps 或 36 Mbps	10 ~ 30 Mbps
用户数据速率	1.5 ~ 18 Mbps	256 kbps ~ 1.5 Mbps
编码	RS 码	RS 码
加密	DES	DES

[a] 若上行链路带宽为 2 MHz，那么由表得到，组合数据速率将为 1/3。

DES = 数据加密标准。

8.11　无线数据网

8.11.1　Wi-Fi

Wi-Fi 或 IEEE 802.11 型网络是一种 WLAN（无线局域网）。从 2000 年开始，该 WLAN 家族在美国和全球变得十分的流行。现在 Wi-Fi（也称为热点）已覆盖了大多数校园、公共图书馆、许多的旅馆、汽车旅馆和咖啡商店。它提供了连接到互联网的高速连接（大约 1.5 Mbps）。当家中有两台或者更多的计算机一起组网并且连接到互联网时，Wi-Fi 在家庭中也很流行。FCC 允许这些无线网络在分配的频段上不经授权就工作。任何人都可以不经 FCC 许可就运行其网络。

表 8.16 给出了 IEEE 802.11b 标准分配的每一个信道的中心频率。一共有 11 个信道，并且它们的中心频率以 5 MHz 划分。每一个信道的带宽近似为 20 MHz；因此，非常遗憾，信道的频谱与相邻信道上的 WLAN 信号的频谱有 15 MHz 的重叠。事实上，IEEE 802.11 标准对每一个信道都指出了中心频率附近的频谱掩模，于是在距离分配的中心频率 ±11 MHz 处，频谱应当衰减至少 30 dB，距离分配的中心频率 ±22 MHz 处，频谱应当衰减至少 50 dB。结果，若多个 WLAN 在同一邻近区内运行，运行的信道应当选择为使得信道间的间隔尽可能大。除了这些可能的相邻信道干扰，还存在有一些来自设备的其他干扰，诸如在这些频率范围工作的无绳电话、幼儿监视器及微波炉等。

表 8.16　Wi-Fi 2.5 GHz 信道分配

信道号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
中心频率（MHz）	2412	2417	2422	2427	2432	2437	2442	2447	2452	2457	2462

在美国，最大 ERP 为 4 W 时的最大发射功率为 1 W。实际上，大多数美国 Wi-Fi 设备发射功率电平介于 15 mW 和 200 mW 之间，于是可使用具有一定增益的天线。

表 8.17 中给出了 WLAN 家族中 802.11 的一些标准。802.11a 工作于 5 GHz 频段，因此没有来自于无绳电话等干扰的影响。然而，其范围受到限制，因为建筑物的墙对 5 GHz 的衰减比对 2.4 GHz 的衰减更强，5 GHz 时的自由空间损耗要比 2.4 GHz 的损耗多 6 dB［见式（8.11）］。802.11g 标准，因其 54 Mbps① 的最大数据速率以及可作为 802.11b 系统工作的向下兼容模式，正变得非常流

① 原书为 54 Gbps，有误。——译者注

行。OFDM 调制在 Wi-Fi 的很多系统中使用，因为 OFDM 系统具有抗多径衰落的能力。

最新的标准是 802.11n。它使用 MIMO(多输入和多输出)技术，这意味着为了提高数据率和增大范围，使用多天线/发射机/接收机来提供空间分集。关于 Wi-Fi 的最新信息，参见维基百科中对 IEEE 802.11 的介绍。

表 8.17 Wi-Fi 标准

项目	802.11a	802.11b	802.11g	802.11n
频带	5.0 GHz	2.4 GHz	2.4 GHz	2.4 GHz
最大速率	54 Mbps	11 Mbps	54 Mbps	120 Mbps
调制	OFDM	DSSS	OFDM	DSSS&OFDM
带宽(典型)	20 MHz	20 MHz	20 MHz	20 MHz
分集	无	无	无	MIMO
范围(最大)	500 英尺	500 英尺	500 英尺	1500 英尺
兼容		802.11a	802.11b	802.11b, 802.11g

DSSS = 直接序列扩频

MIMO = 多输入和多输出

8.11.2 WiMAX

WiMAX 的概念与 Wi-Fi 完全不同。WiMAX 更像一个蜂窝电话系统。它被设计用于数据传输以及连接互联网。WiMAX 是一个 WMAN(无线城域网)，WiMAX 标准由 IEEE 802.16 工作组研发并通过。

WiMAX 基站天线被放置在较高的位置，例如在建筑物或者塔的顶端，并且可以与蜂窝电话塔顶共享塔顶空间。

WiMAX 系统业务提供商以两种不同的方式之一来运行：授权业务和未授权业务。对于授权业务，运营者必须从 FCC 购买频谱空间和 WiMAX 业务执照。对于未授权业务，运营者无须执照就可建立和运营系统。然而，任何未授权的系统现在或将来都会受到来自于其他未授权系统信号的干扰。无论哪一种系统都需要专业的安装，即选择合适的基站天线(天线增益和模式)和合适的安装方向，以得到理想的覆盖并且对其他小区产生最小的干扰。

表 8.18 给出了授权和未授权的 WiMAX 标准。未授权的业务具有展开更快和成本更低的优点。授权的业务具有干扰较小和信号接收较好的优点，因为授权的业务工作在较低的频段(2.5 GHz)上，该频段的信号受建筑物的衰减较小并且有较好的 NLOS(非视距)特性。

表 8.18 WiMAX 标准

项　目	授权业务	未授权业务
波段	2.5 GHz	5.5 GHz
频率	2.5 ~ 2.69 GHz*	5.25 ~ 5.58 GHz
信道带宽	20 ~ 40 MHz	20 ~ 40 MHz
购买频谱空间	是	否
功率输出	最大约 20 W	4 W EIRP
范围	30 公里	10 km
调制	OFDM	OFDM
双向信道	FDD	TDD
数据速率(最大)	108 Mbps	108 Mbps
优点	干扰较小，NLOS 接收较好	展开较快，成本较低

* 额外的 WiMAX 频段可能由 FCC 分配。

FDD = 频分双工(即需要两个频率的信道——一个用于上行链路，一个用于下行链路)

TDD = 时分双工(即需要一个频率的信道，但是需要两个时隙——一个用于上行链路，一个用于下行链路)

NLOS = 非视距

在美国，运营商 Clearwire 正在建设具有覆盖全国的授权 WiMAX 网络。这一网络在美国的主要城市已经铺开。Sprint 公司和 Clearwire 公司已经签署了一项协议，该协议授命 Clearwire 向 Sprint 提供4G 的 WiMAX 服务(Clearwire 公司的财政来源于它的公共交易股票，同时也被 Sprint、Intel、Time Warner Cable、Bright Houser、Google 和 Comcast 共同拥有部分所有权)。如 8.8 节中所述，这个 WiMAX 网络是一个 4G 蜂窝网络，并且与其他公司提供的 LTE 4G 技术进行竞争。

WiMAX 使用 802.16 标准。关于这一正在发展的技术的最新信息，参见维基百科中的 IEEE 802.16 专题。

8.12 小结

本章研究了许多有线及无线通信系统，研究了有中心局和远程终端的现代电话系统，也研究了通过 DSL 传输数据的标准与用于 POTS 的标准。此外还对通过光纤电缆或卫星传输的 PSTN 系统的规范进行了介绍，讨论了卫星无线电广播服务，定义了无线接收机的噪声系数和有效输入噪声温度，并通过实例研究了链路预算。考察了用于蜂窝电话系统的 1G、2G、3G 和 4G 标准，学习了模拟和数字 TV 系统，研究了用于模拟 NTSC TV 和包括 SDTV 和 HDTV 在内的数字 ATSC TV 的标准，讨论了电缆数据调制解调器，而且给出了 Wi-Fi 和 WiMAX 无线数据网的标准，并对其运行方式进行了讨论。

8.13 助学例题

SA8.1 DSS 接收机链路预算 计算数字卫星电视系统的链路预算，该数字卫星电视系统与 8.5 节中的 DSS 系统(数字卫星系统)相似。DSS 卫星位于赤道上空西经 101°的轨道上。假定下行链路接收站为位于西经 82.43°、北纬 29.71°的 Gainesville FL。DSS 卫星用 16 个 Ku 波段(12.2 ~ 12.7 GHz)的转发器发送下行链路信号。每个转发器的带宽为 24 MHz，在对着美国方向特别是 Gainesville FL 方向的 EIRP 为 52 dBW。每个转发器发射的 QPSK 数据速率为 40 Mbps。接收系统由如下几部分组成：(1)直径18 in抛物面天线及附件；(2)将 Ku 波段输入信号变到 950 ~ 1450 MHz 的低噪声下变频器(LNB)；(3)连接 LNB 及接收机的传输线；(4)位于用户 TV 装置前端的接收机[Thomson, 1994]。LNB 的增益为 40 dB，噪声系数(NF)为 0.6 dB。RG6/U 同轴线为 110 in 长，其在 950 ~ 1450 MHz 波段内损耗为8 dB/100 ft。接收机检测数据包，解码并且通过使用内置数据转换器将数据转换成模拟视频和语音信号。接收机的 NF 为 10 dB，中频带宽为 24 MHz。假定天线源温度为 20K。

计算$(C/N)_{\mathrm{dB}}$、$(E_b/N_0)_{\mathrm{dB}}$和接收机的 BER。

解： 应用式(8.47) ~ 式(8.54)得到 Gainesville FL 至卫星接收天线的点参数(方位角和仰角)为

$$\beta = \arccos[\cos(29.71)\cos(101 - 82.43)] = 34.58^\circ$$

方位角为

$$A = 360 - \arccos\left(-\frac{\tan(29.71)}{\tan(34.58)}\right) = 214.13^\circ$$

仰角为

$$E = \arctan\left[\frac{1}{\tan(34.58)} - \frac{3963}{(26\,205)\sin(34.58)}\right] = 49.82^\circ$$

应用式(8.49)，得到倾斜距离为

$$d = \sqrt{(26\,205)^2 + (3963)^2 - 2(3693)(26\,205)\cos(34.58)}$$

于是，

$$d = 23\,052\text{英里} \quad \text{或者} \quad 3.709\times10^7\,\text{m}$$

应用式(8.34)可计算出接收系统总的 NF，其中 $F_1=0.6$ dB $=1.15$，$G_1=40$ dB $=10^4$，$F_2=110$ ft $\times 8$ dB/100 ft $=8.8$ dB $=7.59$，$G_2=-8.8$ dB $=0.13$ 及 $F_3=10$ dB $=10$。于是，

$$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_{a1}} + \frac{F_3 - 1}{G_{a1}G_{a2}} = 1.15 + \frac{7.59 - 1}{10^4} + \frac{10 - 1}{(10^4)(0.13)}$$

或 $F=1.15+6.59\times10^{-4}+6.83\times10^{-3}=1.15=0.6$ dB，于是 $T_e=(F-1)T_0=(1.15-1)(290)=43.18\ K$。

注意：LNB 的增益设计足够大，于是传输线和接收机的 NF 的影响被忽略。

应用表 8.4，计算一个 18 in(0.46 m)直径的接收天线参数，其中 $\lambda=c/f=3\times10^8/12.45\times10^9=0.0241$ m。

$$(G_{AR})_{\text{dB}} = 10\log\left[\frac{7\pi(0.46/2)^2}{(0.0241)^2}\right] = 32.96\text{ dB}$$

$$(T_{\text{syst}})_{\text{dB}} = 10\log(T_{AR} + T_e) = 10\log(20 + 43.18) = 18.01\,\text{dBK}$$

于是，

$$\left(\frac{G_{AR}}{T_{\text{syst}}}\right)_{\text{dB}} = 32.96 - 18.01 = 14.96\text{ dB/K}$$

应用式(8.55)计算 $(C/N)_{\text{dB}}$，其中，

$$(L_{FS})_{\text{dB}} = 20\log\left(\frac{4\pi d}{\lambda}\right) = 20\log\left(\frac{4\pi(3.709\times10^7)}{(0.0241)}\right) = 205.73\text{ dB}$$

以及

$$(B)_{\text{dB}} = 10\log(B) = 10\log(24\times10^6) = 73.8\text{ dB}$$

于是，

$$\left(\frac{C}{N}\right)_{\text{dB}} = (P_{\text{EIRP}})_{\text{dBw}} - (L_{FS})_{\text{dB}} + \left(\frac{G_{AR}}{T_{\text{syst}}}\right)_{\text{dB}} - k_{\text{dB}} - B_{\text{dB}}$$
$$= 52 - 205.73 + 14.96 - (-228.6) - 73.8$$

或

$$(C/N)_{\text{dB}} = 16.03\text{ dB}$$

$(E_b/N_0)_{\text{dB}}$可以通过应用式(8.44)计算得到，其中 $B=24$ MHz 及 $R=40$ Mbps。于是，

$$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{\text{dB}} = \left(\frac{C}{N}\right)_{\text{dB}} + \left(\frac{B}{R}\right)_{\text{dB}} = 16.03 - 2.22 = 13.81\,\text{dB}$$

对于 QPSK 信号而言，$(E_b/N_0)_{\text{dB}}$的信噪比 13.81 dB = 24.05 导致的误码率可以忽略不计，即如果未采用编码，由式(7.69)，可得 QPSK 信号的误码率为

$$P_e = Q\left(\sqrt{2\left(\frac{E_b}{N_0}\right)}\right) = Q\left(\sqrt{2(24.05)}\right) = 2.0\times10^{-12}$$

或平均每 3.4 小时有一个错误出现。然而，如果存在着信号的衰落(因为雨或其他大气条件)将发生严重的误码，这在助学例题 SA8.2 中将有所讨论。



SA8.2 有衰落的情况下 DSS 链路预算 重复助学例题 SA8.1 的过程，并且假定由于雨的影响 Ku 波段的信号有 4 dB 的衰落，计算$(C/N)_{\text{dB}}$、$(E_b/N_0)_{\text{dB}}$和无编码情况下的 BER。对于有编码的情形，假定编码增益为 3 dB。

解：

$$\left(\frac{C}{N}\right)_{\text{fade dB}} = \left(\frac{C}{N}\right)_{\text{dB}} - (L_{\text{fade}})_{\text{dB}} = 16.03 - 4.0 = 12.03\ \text{dB}$$

和

$$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{\text{fade dB}} = 9.81\ \text{dB} = 9.57$$

于是，在有衰落而没有采用编解码的情况下，误码率为

$$P_e = Q\left(\sqrt{2(9.57)}\right) = 6.04 \times 10^{-6}$$

或平均每 4.1 ms 发生一次误码，这样的性能令人难以接受。于是采用前向纠错码，应用编码增益为 3 dB 的编码，参考图 1.8，计算有效的(E_b/N_0)：

$$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{\text{dB}} = 9.81 + 3.0 = 12.81\ \text{dB} = 19.10$$

于是，应用式(7.69)，我们得到在衰落环境下应用编码的系统的误码率为

$$P_e = Q\left(\sqrt{2(19.10)}\right) = 3.2 \times 10^{-10}$$

或平均 78 s 发生一次误码。

SA8.3　无线设备链路的误码率　计算无线局域网(WLAN)的误码率(BER)。假定一台计算机/电话/视频终端通过建筑物内部的无线链路连接到外部世界。无线链路工作于设备和位于建筑物内部的基站单元之间。无线链路在 2.4 GHz 的载波上应用 OOK 信号，其数据速率为 2 Mbps。设备上行链路的传输功率为 0.5 mW，基站接收机的噪声系数为 8 dB，中频带宽为 4 MHz。它应用包络检测器检测数据，与接收机内部噪声相比，接收机输入端的外部噪声可以忽略。假定发射和接收天线同为简单的偶极天线，每个有 2.15 dB 的增益。位于建筑物内部发射和接收天线之间的路径损耗可用式(8.47)来描述：

$$L_{\text{dB}}(d) = L_{\text{FSdB}}(d_0) + 10n\log\left(\frac{d}{d_0}\right) + X_{\text{dB}} \tag{8.67}$$

其中，$L_{\text{dB}}(d)$为相距 d 的两个天线之间的路径损耗，$L_{\text{FSdB}}(d_0)$是距发射机距离为 d_0 的自由空间损耗，d_0 的距离很近。但是在远场，$d > d_0$，n 是路径损耗指数。X_{dB}代表由于多径反射造成的路径损耗变化。在本例之中令 $d_0 = 50$ ft，$n = 3$，$X_{\text{dB}} = 7$ dB(对于路径损耗指数，自由空间为 2，2 径地面反射的情形为 4)。

当设备和基站之间的距离为 200 ft 时，计算基站接收机检测器输入端的 CNR 和接收机输出的检测数据 BER。

解：见 M 文件 SA8_3. m。通过应用式(8.67)代替式(8.43)中的$(L_{\text{FS}})_{\text{dB}}$，可得到 CNR。应用给定的值，我们得到$(P_{\text{EIRP}})_{\text{dBw}} = -30.86$ dBw，$T_{\text{system}} = 1540$ K 和 $L_{\text{dB}}(200) = 88.18$ dB。对应于设备与基站之间的距离为 200 ft，应用式(8.43)，计算得到 CNR 为

$$\left(\frac{C}{N}\right)_{\text{dB}} = 13.22\ \text{dB}, \qquad \text{距离200 ft}$$

另外，应用式(8.44)得到$(E_b/N_0)_{\text{dB}} = 16.23$ dB，对于采用包络检测器(非相干检测)检测 OOK 信号的情形，应用式(7.58)得到其误码率。比特速率为 $R = 1/T = 2$ Mbps，中频带宽为 $B_P = 4$ MHz。对于设备和基站之间的距离为 200 ft 时，基站输出数据的误码率为

$$P_e = 1.36 \times 10^{-5}, \qquad \text{距离200 ft}$$

对于其他的 d 值，应用该公式及 MATLAB，计算从 50 ~ 500 ft 之间的 CNR 和 BER，其结果如图 8.40 和图 8.41 所示。

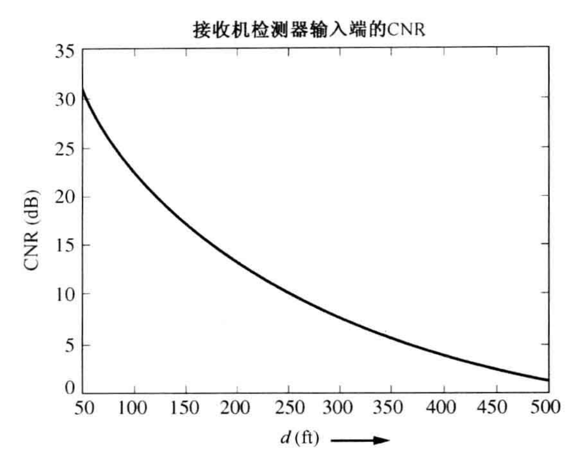


图 8.40 无线链路的 CNR(来自 SA8_3.m)

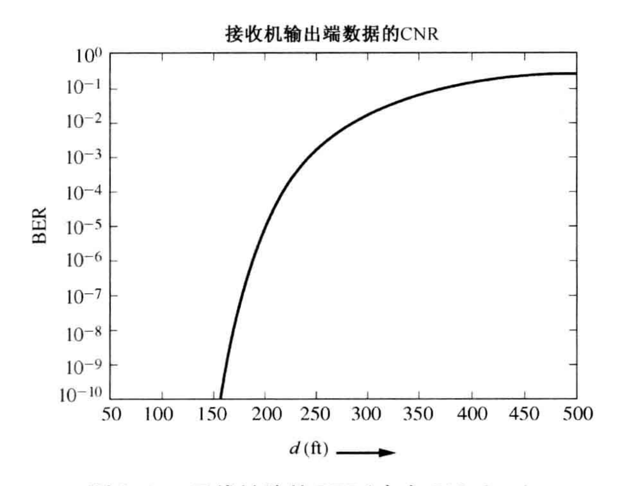


图 8.41 无线链路的 BER(来自 SA8_3.m)

无线链路的距离可以通过增加发射机功率、减小接收机噪声系数或应用扩频系统来增加。如果采用了一个 $r=4$ 级移位寄存器的扩频方案，则其 PN 码长为 $N=15$，如图 5.39① 所示。假定整个扩频码用于扩频比特数据，于是码片速率为 $R_c=NR$。由式(5.131)，该扩频系统将提供 $G_p=R_c/R=N=15$ 或 $G_{pdB}=11.76$ dB 的处理增益。如果接收机的解扩在中频后完成(即在接收机内部的噪声源以后)，处理增益将增加检测器输入端的 CNR 值 11.76 dB。这将增加通信距离至500 ft左右，即参考图 8.40，$d=500$ ft 时的 11.76 dB 的处理增益对应的 CNR 值为 13.0 dB，相应的误码率为 2.1×10^{-5}。

习题

★8.1 电话公司的远程终端为 300 路 VF 用户和 150 路 G.Lite DSL 用户(1.5 Mbps 速率的数据加上一路转换成 DS-0 信号的 VF 信号)提供服务。计算从 CO 到 RT 的接收光纤所需的最小数据速率。

8.2 通过连接到 CO 的本地环路的 50 对线路，提供电话业务至 50 个在郊区的用户。如果将 50 对线变成 T1 线并在郊区安装一个远程终端，那么可以为多少用户服务？

① 原书为图 5.37，有误。——译者注

8.3 假定电话公司有一个远程终端通过 T1 线连接到 CO，画出如下两种情况下 T1 与 CO 交换局接口的框图。

(a) 如果 CO 使用模拟交换；

(b) 如果 CO 使用综合数字交换。

8.4 如果在 CO 采用数字交换代替模拟交换，那么电话会议连接是否会比单方呼叫好？解释之。

★8.5 个人计算机通过双绞电话线，在 300 ~ 2700 Hz 的频段上发送全双工 24 kbps 的数据速率。解释为什么在线路的每端都需要调制解调器。

8.6 如图 8.10 所示，一个有 12 个 36 MHz 带宽转发器的卫星工作于 6/4 GHz 波段中某 500 MHz 带宽的频段上，且其在 4 GHz 下行链路上保护带宽为 4 MHz。计算用于保护带宽所占的比例。

8.7 地面站使用直径为 3 m 的抛物面天线接收 4 GHz 的同步卫星发出的信号。如果卫星发射机发射 10 W 的功率至直径 3 m 的发射天线，并且卫星距接收机 36 000 公里。试计算接收功率的大小。

8.8 图 8.12(b)所示为卫星通信系统 FDM/FM 地面站。试求对于 6240 MHz 信号达到分配频段所需峰值频率的偏差。

★8.9 一个微波发射机在 2 GHz 的输出为 0.1 W，假定该发射机用于发射和接收天线都是直径为4 ft的抛物面天线的微波通信系统中。

(a) 分析天线的增益；

(b) 计算发射信号的 EIRP；

(c) 如果接收天线位于自由路径损耗环境中，且距发射天线 15 ft。试求以 dBm 为单位的接收天线可接收到的信号功率。

8.10 数字电视广播台以 18 kW ERP 功率在 7 信道上发射信号。信号通过 50 英里的 LOS 路径到达接收端天线，天线增益为 8 dB。计算接收天线输出端的功率。

(a) 以 dBm 为单位；

(b) 负载 75 Ω 两端，以 dBmV 为单位；

(c) 负载 75 Ω 两端，以 μV 为单位。

8.11 假设电视台工作在信道 42 上，重做习题 8.10。

8.12 一个数字电视台工作在信道 7 上，另一个数字电视台工作在信道 51 上。使用 MATLAB 画出工作在信道 7 的电视台随距离(单位是英里)变化的自由空间损耗曲线(单位是 dB)。以相同的方法画出工作在信道 51 的电视台的自由空间损耗曲线。将两条曲线画在同一幅图内比较这两个结果。如果是模拟电视台，那么这些损耗改变吗？

8.13 使用 MATLAB 画出工作在 850 MHz 的蜂窝链路随距离(以英里为单位)而变化的自由空间损耗值(以 dB 为单位)。画出工作在 1900 MHz 的蜂窝链路的视距损耗。将二者画在同一幅图中比较这两个结果。对比这两条曲线，在具有相同蜂窝覆盖区域的条件下，哪一条链路给蜂窝移动公司带来的代价较小？

★8.14 应用 MATLAB，画出频率范围在 10 ~ 100 000 GHz 频段内，电阻为 10 kΩ 的热噪声源的 PSD，其中 $T = 300$ K。

8.15 给定如图 P8.15 所示的 RC 电路，其中 R 是温度为 T 的物理电阻。试求以 k、T、R 和 C 表示的输出端噪声电压的 rms 值。

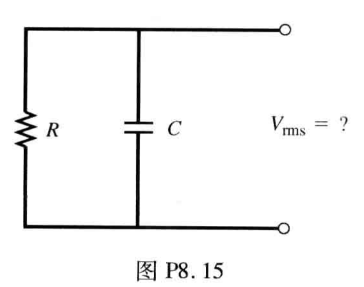


图 P8.15

8.16 连接到天线系统的接收机的噪声温度为 100 K，试求在 20 MHz 频段内的噪声功率。

★8.17 双极型晶体管放大器的模型如图 P8.17 所示，试求以适当参数表示的功率增益。

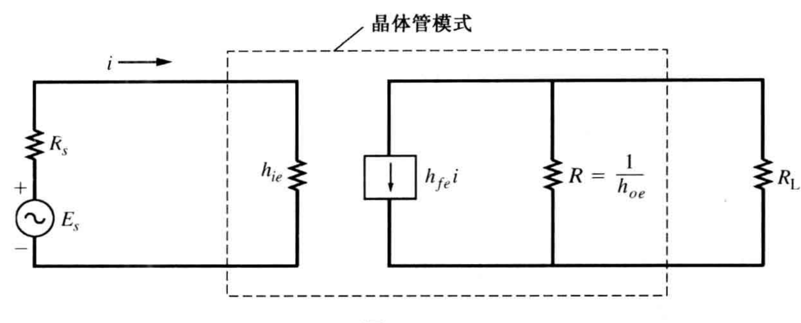


图 P8.17

8.18 应用式(8.18),可得到功率增益的定义 $G_a(f)$。证明 $G_a(f)$依赖于驱动源的阻抗而不依赖于负载阻抗(提示:计算一个简单的电阻网络的 $G_a(f)$)。

8.19 证明:应用 Y 因子方法测量可得到有效输入噪声温度和噪声系数。应用该方法进行测试的设备(DUT)首先被连接到一个有相对较大输出源温度 T_h的噪声源上,其中下标 h 表示“热”。于是 DUT 输出端通过功率计测量得到的噪声功率为 P_{aoh}。然后将 DUT 连接到一个有相对较低源温度 T_c的源上,其中下标 c 代表“冷”。DUT 输出的测量到的噪声功率为 P_{aoc}。证明:

(a) DUT 的有效输入噪声温度为

$$T_e=\frac{T_h-YT_c}{Y-1}$$

其中,$Y=P_{aoh}/P_{aoc}$是由测量得到的值。

(b) DUT 的噪声系数为

$$F=\frac{[(T_h/T_0)-1]-Y[(T_c/T_0)-1]}{Y-1}$$

其中,$T_0=290$ K。

8.20 如果线性设备的输入为信号加噪声。证明该设备的噪声系数为 $F=(S/N)_{in}/(S/N)_{out}$(提示:从本章关于噪声系数的定义入手)。

★8.21 天线对准了一个方向后,其噪声温度为 30 K。它连接到噪声系数为 1.6 dB 的前置放大器上,且其在有效频带 10 MHz 的带宽上得到的增益为 30 dB。

(a) 试求前置放大器的有效输入噪声温度;

(b) 试求前置放大器输出可得到的噪声功率。

8.22 一个带限于 5 kHz 的语音信号被调制成 10 MHz 的 SSB-AM 信号,并被噪声系数为 10 dB 的接收机所检测,接收机输入的信号功率为 10^{-10} mW,输入噪声的 PSD 为$\mathcal{P}(f)=kT/2$,且为 2×10^{-21}。计算:

(a) 所需的 IF 带宽;

(b) 接收机输入的 SNR;

(c) 假定应用乘法检测器,接收机输出的 SNR。

★8.23 一个 FSK 信号以 $R=110$ bps 速率在高斯白噪声的射频 RF 信道上传输,接收机使用噪声系数为 6 dB 的非相干检测器。接收机天线的输入阻抗为 50 Ω,接收机输入端信号电平为 0.05 μV,噪声电平为 $N_0=kT_0$。其中 $T_0=290$ K,k 为玻尔兹曼常数。试求接收机输出端数字信号的 P_e。

8.24 对 DPSK 信号重做习题 8.23。

8.25 试证明级联系统的有效输入噪声温度为式(8.37)。

★8.26 连接到天线系统的电视设备如图 P8.26 所示,计算:

(a) 整个系统的噪声系数;

(b) 如果在 B 点插入一个噪声系数为 3 dB 的 20 dB RF 前置放大器,试求整个系统的噪声系数;

(c) 如果插入点为 A,试求整个系统的噪声系数。

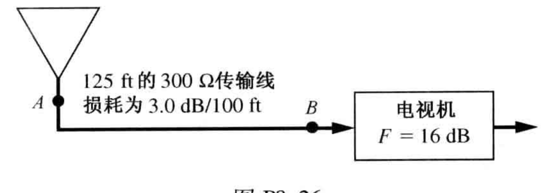


图 P8.26

8.27　地球站接收系统由一个 $T_{AR}=80$ K 的 20 dB 的增益天线，$G_a=40$ dB 和 $T_e=30$ K 的 RF 放大器及 $T_e=15\,000$ K 的下变频器组成。试求该接收系统的有效输入噪声温度。

8.28　若低噪声放大器(LNA)，下变频器和中频放大器级联。LNA 的增益为 40 dB，T_e为 20 K，下变频器的噪声系数为 8 dB，变频增益为 6 dB。如果中放增益为 60 dB，噪声系数为 14 dB。计算该系统的有效输入噪声温度。

8.29　同步卫星在 4 GHz 下行链路上发射 13.5 dBW 的 EIRP 至地球站，接收系统有 60 dB 的增益，有效输入噪声温度为 30 K，天线源的噪声温度为 60 K，中频带宽为 36 MHz。如果卫星位于距接收机 24 500 英里处，试计算接收机检测电路输出的$(C/N)_{dB}$。

★8.30　一个 $T_{AR}=160$ K 的天线通过一物理温度为 290 K 及损耗为 2 dB 的波导连接到接收机。接收机的噪声带宽为 1 MHz，有效输入噪声温度为 800 K。从天线输入至中频输出的增益为 120 dB。应用 MATLAB 计算：

(a) 接收机输入端的系统噪声温度；

(b) 整个系统的噪声系数；

(c) IF 输出端可得到的噪声功率。

8.31　国际通信 5 号卫星使用下行链路在 4 GHz 频段工作的 36 MHz 的转发器。每个卫星转发器的输出功率为 3.5 W，并且使用增益为 20 dB 的 17°的球状覆盖天线。

(a) 对于每一个位于子卫星点的用户(即位于卫星的正下方)。证明$(C/N)_{dB}=(G_{AR}/T_{syst})_{dB}-17.1$，其中$(G_{AR}/T_{syst})_{dB}$是地面接收站的特性系数。

(b) 合理地设计一个地面接收站(方框图)的参数以保证其 IF 输出的 CNR 为 12 dB。讨论其中所做的一些折中。

★8.32　抛物面天线的效率由其抛物反射表面的精度及其他因子决定。增益为 $G_A=4\pi\eta A/\lambda^2$，其中 η 是天线的效率。表 8.4 中用 56% 的效率值得到式 $G_A=7A/\lambda^2$。在国际通信 5 号卫星的地面接收系统中，假定需要 40 dB 的(G_{AR}/T_{syst})，应用一个 30 m 的天线。试求当系统噪声温度为 85 K 时所需的天线效率，假定所用天线为 25 m 时，天线的效率如何变化。

8.33　计算一个 TVRO 系统的性能。假定 TVRO 终端位于 Miami，佛罗里达(北纬 26.8°，西经 80.2°)，接收天线为对准 Galaxy I 卫星的 10 ft 天线，其他 TVRO 参数如表 8.5、图 8.25 和图 8.27 所示。

(a) 试求 TVRO 天线至卫星的仰角和斜距；

(b) 试求接收系统的温度；

(c) 试求接收机检测器输入的$(C/N)_{dB}$；

(d) 试求接收机输出的$(S/N)_{dB}$。

8.34　当 TVRO 终端位于 Anchorage，Alaska(北纬 61.2°，西经 149.8°)，天线为直径 8 m 时，重做习题 8.33。

8.35　TVRO 接收系统由一个直径为 8 ft 的天线接及一个 50 dB、25 K 的 LNA 组成。空间噪声温度为 32 K。系统设计成接收银河 I 卫星的信号。LNA 有一个后混频电路将卫星信号下变频至 70 MHz。70 MHz信号通过 120 ft 长的 75 Ω 同轴电缆馈入 TVRO 接收机，电缆的损耗为 3 dB/100 ft。接收机的带宽为 36 MHz，噪声温度为 3800 K。假定 TVRO 站位于加州的洛杉矶(北纬 34°，西经 118.3°)，并且考虑垂直极化。

(a) 试求 TVRO 终端至卫星的仰角和斜距；

(b) 试求整个系统的温度;

(c) 试求接收机检测器的输入$(C/N)_{dB}$。

★8.36 一个地面站接收系统工作于11.95 GHz 频段,由增益为65.53 dB 和$T_{AR}=60$ K 的20 m 天线,物理温度为290 K,损耗为1.28 dB 的波导,$T_e=50$ K,增益为60 dB 的LNA 及$T_e=11\,000$ K 的下变频器组成。应用MATLAB 求接收系统不同位置的$(G/T)_{dB}$:

(a) LNA 的输入端;

(b) 波导的输入端;

(c) 下变频器的输入端。

8.37 对于接收直接广播卫星(DBS)的TV 信号情形,重做习题8.4。假定系统参数除卫星功率是在12 GHz 频段上发射316 kW 的EIRP 之外,与表8.5 中均相同。进一步假定应用直径为0.5 m 的接收天线和LNA 的噪声温度为50 K。

★8.38 距太阳最远的行星是冥王星,它位于距地球7.5×10^9 km 的地方。假定一个无人控制宇宙飞船有一个2 GHz、10 W 的转发器在环绕冥王星。接收地球站的天线为64 m,且其系统噪声温度在2 GHz 时为16 K,计算当采用300 bps BPSK 数据链路且要求10^{-3}误码率(相应的(E_b/N_0)为0.988 dB)时宇宙飞船上天线的口径。假设允许2 dB 的附加损耗。

8.39 应用MATLAB 或一些在PC 上运行的程序,设计一个求解习题8.35 的程序,在PC 上运行程序,验证其是否给出正确答案。打印你的结果。另外,试一试其他参数,例如适合于你所在的位置的参数,并打印结果。

8.40 假定你要分析使用"曲管"转发器的卫星转发系统的性能。令$(C/N)_{up}$代表在卫星转发器中频波段的载波信噪比,$(C/N)_{dn}$为当卫星发射一个无噪声信号时,下行链路接收地面站的中频信噪比。证明整个接收地面站的中频CNR,$(C/N)_{ov}$为

$$\frac{1}{(C/N)_{ov}}=\frac{1}{(C/N)_{up}}+\frac{1}{(C/N)_{dn}}$$

8.41 对在助学例题SA8.3 中描述的无线设备,使用MATLAB 画出距离在50 ~ 500 ft 范围内的路径损耗(单位是dB)曲线。

★8.42 一个PCS 蜂窝基站输入到天线的功率为10 W,天线增益在1800 MHz 时为18 dB。路径损耗距离为$d_0=0.25$ 英里,$X_{dB}=0$。PCS 蜂窝电话的天线增益为0 dB。计算当PCS 电话位于距基站1 英里、2 英里、5 英里和10 英里且路径损耗指数为以下值时,以dBm 为单位的PCS 蜂窝电话天线输出端的功率。

(a) $n=2$(自由空间条件);

(b) $n=3$;

(c) $n=4$。

8.43 PCS CDMA 蜂窝电话发射机将200 mW 功率馈入0 dB 增益天线。PCS 信号在1900 MHz 波段上扩展为1.25 MHz 带宽。计算当PCS 电话位于距BS 2 km 时,以dBm 为单位的基站输出功率。假定路径损耗由式(8.47)给出,其中$d_0=100$ m,$n=3$ 和$X_{dB}=0$,BS 天线增益为16 dB。

8.44 给定一个如习题8.43 及表8.11 中所描述的IS-95 标准的CDMA 蜂窝电话链路。基站接收系统的噪声系数为8 dB。由于其他电话造成的多址干扰(MAI)在BS 接收机的前端增加了20 dB 的噪声电平。计算BS 接收机中解扩后(即在数据检测器输入端)的CNR、$(C/N)_{dB}$。另外,求解扩后的$(E_b/N_0)_{dB}$,假定解扩后的带宽为$B=19.2$ kHz,因为编码后QPSK 信号在每个I 和Q 路BPSK 载波上的数据速率为19.2 kbps(9.6 kbps 的负载数据速率用1/2 速率的编码)。

8.45 一个低功率TV 站被授权在TV 35 信道上以有效辐射功率1000 W 工作,塔高为400 ft,传输线路长450 ft。假定传输线采用直径$1\frac{5}{8}$ ft,损耗为0.6 dB/100 ft(在工作频段上)的50 Ω 同轴电缆。天线增益为5.6 dB。假设解复用时的损耗可忽略,试求在视频发射机输出的PEP。

★8.46　一个模拟电视发射机用一个周期性测试信号调制，测试发射机输出的包络，通过示波器观察的结果如图 P8.46 所示，其中 K 为未知常数，发射机的输出连接到已校准读数的50 Ω 空载瓦特计上。瓦特计的读数为 6.9 kW。试求发射机输出的 PEP。

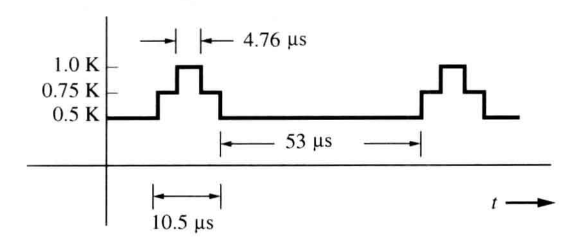


图 P8.46

8.47　用于模拟电视的 MTS 录音系统的参数如图 8.33 所示，应用该图：

(a) 设计检测语音信号和第二语音编程信号的 TV 接收机电路方框图；

(b) 描述该电路是如何工作的，即给出方框图中每一点的信号表达式，并用文字解释，标注出每个滤波器的传输函数、VCO 中心频率等。

8.48　在 R-Y、B-Y 彩色电视子载波解调系统中，G-Y 信号是从 R-Y 和 B-Y 信号中得到的，即

$$[m_G(t) - m_Y(t)] = K_1[m_R(t) - m_Y(t)] + K_2[m_B(t) - m_Y(t)]$$

(a)求所需 K_1 和 K_2 的值；

(b)画出一个 R-Y、B-Y 系统的方框图，并解释它是如何工作的。

★8.49　对于表 8.14 中的数字 DTV 标准，有同步头的数据速率为 19.39 Mbps。证明加上编码比特和训练比特，8VSB 信号的符号速率为 10.76 波特。

8.50　8VSB 信号在美国用于 DTV 传输。为避免 ISI，8VSB 信号被设计成如图 8.39 所示的具有均方根升余弦滚降滤波特性。

(a) 证明：具有升余弦滚降特性的 VSB 信号带宽为

$$B_{\mathrm{VSB}} = \frac{1}{2}(1 + 2r)D$$

其中，D 是符号速率，r 是滚降因子[提示：公式的推导与式(3.74)相似]。

(b) 应用从(1)中推导得到的表 8.15 中 DTV 系统的参数，证明 DTV 的绝对带宽为 6 MHz。

8.51　一个在美国的数字电视台工作于信道 9，其 ERP 为 4.9 kW。从距离电视台 25 英里的地方通过视距路径接收该电视台的信号，接收天线的增益为 8 dB。假设接收系统的噪声系数为 3 dB。计算接收机检测器输入端的 $(E_b/N_0)_{\mathrm{dB}}$。

附录 A　数学技巧、恒等式和表

A.1　三角函数和复数

A.1.1　定义

$\sin x = \dfrac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$　　　　$\cos x = \dfrac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{e^{jx} - e^{-jx}}{j(e^{jx} + e^{-jx})}$

A.1.2　三角等式和复数

$e^{\pm jx} = \cos x \pm j\sin x$（欧拉定理）

$e^{\pm j\pi/2} = \pm j$　　　　$e^{\pm jn\pi} = \begin{cases} 1, & n \text{ 为偶数} \\ -1, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$

$x + jy = Re^{j\theta}$，其中 $R = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctan(y/x)$，$(Re^{j\theta})^y = R^y e^{jy\theta}(R_1 e^{j\theta_1})(R_2 e^{j\theta_2}) = R_1 R_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$

$\cos(x \pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y$

$\sin(x \pm y) = \sin x\cos y \pm \cos x\sin y$

$\cos\left(x \pm \dfrac{\pi}{2}\right) = \mp \sin x$

$\sin\left(x \pm \dfrac{\pi}{2}\right) = \pm \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$

$2\sin x\sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$

$2\sin x\cos y = \sin(x - y) + \sin(x + y)$

$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$

$2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$

$4\cos^3 x = 3\cos x + \cos 3x$

$4\sin^3 x = 3\sin x - \sin 3x$

$8\cos^4 x = 3 + 4\cos 2x + \cos 4x$

$8\sin^4 x = 3 - 4\cos 2x + \cos 4x$

$R\cos(x + \theta) = A\cos x - B\sin x$

其中，$R = \sqrt{A^2 + B^2}, \theta = \arctan(B/A), A = R\cos\theta, B = R\sin\theta$

A.2　微分的计算

A.2.1　定义

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + (\Delta x/2)) - f(x - (\Delta x/2))}{\Delta x}$$

A.2.2　微分规则

$\dfrac{du(x)v(x)}{dx} = u(x)\dfrac{dv(x)}{dx} + v(x)\dfrac{du(x)}{dx}$（积）　　$\dfrac{du[v(x)]}{dx} = \dfrac{du}{dv}\dfrac{dv}{dx}$（链式法则）

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{v(x)\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}-u(x)\frac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}x}}{v^2(x)}\text{(商)}$$

A.2.3　导数表

$$\frac{\mathrm{d}[x^n]}{\mathrm{d}x}=nx^{n-1}$$

$$\frac{\mathrm{d}\arctan ax}{\mathrm{d}x}=\frac{a}{1+(ax)^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}\arccos ax}{\mathrm{d}x}=-\frac{a}{\sqrt{1-(ax)^2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\sin ax}{\mathrm{d}x}=a\cos ax$$

$$\frac{\mathrm{d}[\mathrm{e}^{ax}]}{\mathrm{d}x}=a\mathrm{e}^{ax}$$

$$\frac{\mathrm{d}\cos ax}{\mathrm{d}x}=-a\sin ax$$

$$\frac{\mathrm{d}[a^x]}{\mathrm{d}x}=a^x\ln a$$

$$\frac{\mathrm{d}\tan ax}{\mathrm{d}x}=\frac{a}{\cos^2 ax}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\ln x)}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}\sin^{-1}ax}{\mathrm{d}x}=\frac{a}{\sqrt{1-(ax)^2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\log_a x)}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}\log_a e$$

$$\frac{\mathrm{d}\left[\int_{a(x)}^{b(x)}f(\lambda,x)\mathrm{d}\lambda\right]}{\mathrm{d}x}=f(b(x),x)\frac{\mathrm{d}b(x)}{\mathrm{d}x}-f(a(x),x)\frac{\mathrm{d}a(x)}{\mathrm{d}x}+\int_{a(x)}^{b(x)}\frac{\partial f(\lambda,x)}{\partial x}\mathrm{d}\lambda\text{（莱布尼兹定律）}$$

A.3　不定型

如果 $\lim_{x\to a}f(x)$ 具有如下形式：

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty$$

那么，

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\left[\frac{N(x)}{D(x)}\right]=\lim_{x\to a}\left[\frac{(\mathrm{d}N(x))/\mathrm{d}x}{(\mathrm{d}D(x))/\mathrm{d}x}\right]\text{（罗必塔法则）}$$

其中，$N(x)$ 是 $f(x)$ 的分子，而 $D(x)$ 是 $f(x)$ 的分母，并且有 $N(a)=0$，以及 $D(a)=0$。

A.4　积分的计算

A.4.1　定义

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\sum_n[f(n\Delta x)]\Delta x\right\}$$

A.4.2　积分技巧

1. 变量代换。令 $v=u(x)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} \left(\frac{f(x)}{dv/dx} \bigg|_{x=u^{-1}(v)} \right) dv$$

2. 分部积分

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

3. 积分表
4. 复数技术
5. 数值方法

A.5 积分表

A.5.1 不定积分

$$\int (a+bx)^n dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)}, \quad 0 < n$$

$$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\ln|a+bx|$$

$$\int \frac{dx}{(a+bx)^n} = \frac{-1}{(n-1)b(a+bx)^{n-1}}, \quad 1 < n$$

$$\int \frac{dx}{c+bx+ax^2} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\left(\dfrac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right), & b^2 < 4ac \\ \dfrac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\dfrac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right|, & b^2 > 4ac \\ \dfrac{-2}{\sqrt{2ax+b}}, & b^2 = 4ac \end{cases}$$

$$\int \frac{x\,dx}{c+bx+ax^2} = \frac{1}{2a}\ln|ax^2+bx+c| - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{c+bx+ax^2}$$

$$\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{bx}{a}\right)$$

$$\int \frac{x\,dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{2}\ln(a^2+x^2)$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x$$

$$\int x\cos x\,dx = \cos x + x\sin x$$

$$\int x\sin x\,dx = \sin x - x\cos x$$

$$\int x^2\cos x\,dx = 2x\cos x + (x^2-2)\sin x$$

$$\int x^2\sin x\,dx = 2x\sin x - (x^2-2)\cos x$$

$$\int e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}$$

$$\int x^3 e^{ax}dx = e^{ax}\left(\frac{x^2}{a} - \frac{3x^2}{a^2} + \frac{6x}{a^3} - \frac{6}{a^4}\right)$$

$$\int x e^{ax}dx = e^{ax}\left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right)$$

$$\int e^{ax}\sin x\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+1}(a\sin x - \cos x)$$

$$\int x^2 e^{ax}dx = e^{ax}\left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right)$$

$$\int e^{ax}\cos x\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+1}(a\cos x - \sin x)$$

A.5.2 定积分

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\mathrm{d}x = \frac{\pi/n}{\sin(m\pi/n)}, \quad n > m > 0$$

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \Gamma(\alpha), \quad \alpha > 0$$

其中,

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$$

$$\Gamma(1) = 1; \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

$\Gamma(n) = (n-1)!$, 如果 n 是正整数

$$\int_0^\infty x^{2n}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-a^2x^2+bx}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{a}\mathrm{e}^{b^2/(4a^2)}, \quad a > 0$$

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x = \frac{a}{a^2+b^2}, \quad a > 0$$

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x = \frac{b}{a^2+b^2}, \quad a > 0$$

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-a^2x^2}\cos bx\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-b^2/4a^2}}{2a}, \quad a > 0$$

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}\cos bx\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(\alpha)}{b^\alpha}\cos\frac{1}{2}\pi\alpha, \quad 0 < \alpha < 1,\ b > 0$$

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}\sin bx\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(\alpha)}{b^\alpha}\sin\frac{1}{2}\pi\alpha, \quad 0 < |\alpha| < 1,\ b > 0$$

$$\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-ax^2}I_k(bx)\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\mathrm{e}^{b^2/4a}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{Sa}(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

其中, $I_k(bx) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{e}^{bx\cos\theta}\cos k\theta\mathrm{d}\theta$

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{Sa}^2(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{b^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2b}\mathrm{e}^{-ab}, \quad a > 0,\ b > 0$$

$$\int_0^\infty \frac{x\sin ax}{b^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-ab}, \quad a > 0,\ b > 0$$

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}2\pi yx}\mathrm{d}x = \delta(y)$$

A.6 级数展开

A.6.1 有限项级数

$$\sum_{n=1}^N n = \frac{N(N+1)}{2}$$

$$\sum_{n=0}^N a^n = \frac{a^{N+1}-1}{a-1}$$

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \qquad \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!(N-n)!} x^n y^{N-n} = (x+y)^N$$

$$\sum_{n=1}^{N} n^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4} \qquad \sum_{n=0}^{N} e^{j(\theta+n\varphi)} = \frac{\sin[(N+1)\varphi/2]}{\sin(\varphi/2)} e^{j[\theta+(N\varphi/2)]}$$

$$\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^{N-k} b^k = (a+b)^N \quad 其中, \binom{N}{k} = \frac{N!}{(N-k)!k!}$$

A.6.2 无穷级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right)(x-a)^n \text{ (泰勒级数)}$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 x}, \quad a \leqslant x \leqslant a+T \text{ (傅里叶级数)}$$

$$其中\ c_n = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x) e^{-jn\omega_0 x} dx \ 并且\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

A.7 希尔伯特变换对[①]

定义希尔伯特变换: $\hat{x}(t) \triangleq x(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\lambda)}{t-\lambda} d\lambda$

函　　数	希尔伯特变换
$x(at+b)$	$\hat{x}(at+b)$
$x(t)+y(t)$	$\hat{x}(t)+\hat{y}(t)$
$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$\frac{d^n}{dt^n}\hat{x}(t)$
常数	0
$\frac{1}{t}$	$-\pi\delta(t)$
$\sin(\omega_0 t+\theta)$	$-\cos(\omega_0 t+\theta)$
$\frac{\sin at}{at} = \text{Sa}(at)$	$-\frac{1}{2\pi} at\, \text{Sa}^2(at)$
$e^{\pm j\omega_0 t}$	$\mp je^{\pm j\omega_0 t}$
$\delta(t)$	$\frac{1}{\pi t}$
$\frac{a}{\pi(t^2+a^2)}$	$\frac{t}{\pi(t^2+a^2)}$
$\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \triangleq \begin{cases}1, & \lvert t\rvert \leqslant T/2 \\ 0, & 否则\end{cases}$	$\frac{1}{\pi}\ln\left\lvert\frac{2t+T}{2t-T}\right\rvert$

① 表2.1中给出了傅里叶变换定律，表2.2给出了傅里叶变换对。

A.8 狄拉克冲激函数

定义 狄拉克冲激函数 $\delta(x)$，也称为单位冲激函数，满足如下两个条件：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,\mathrm{d}x = 1 \qquad 和 \qquad \delta(x) = \begin{Bmatrix}\infty, & x = 0\\ 0, & x = 0\end{Bmatrix}$$

因而 $\delta(x)$ 是“奇异”函数。[①]

A.8.1 狄拉克冲激函数的性质

1. $\delta(x)$ 可以表示成一些普通函数的极限形式，于是(在一些参数取极限情况下)普通函数满足 $\delta(x)$ 的定义。例如，

$$\delta(x) = \lim_{\sigma\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-x^2/(2\sigma^2)}\right) \quad 或者 \quad \delta(x) = \lim_{a\to\infty}\left[\frac{a}{\pi}\left(\frac{\sin ax}{ax}\right)\right]$$

这两个例子中，$\delta(-x) = \delta(x)$，于是对于这种情形 $\delta(x)$ 被称为偶冲激函数。在本书中除了在描述离散随机变量的 PDF 时，其余的地方用的全是偶冲激函数。

$$\delta(x) = \begin{cases}\lim\limits_{a\to\infty}(a\mathrm{e}^{ax}), & x \leqslant 0\\ 0, & x > 0\end{cases}$$

这是一个单边冲激函数的例子。具体而言，这是一个左冲激函数。这类冲激函数被用于描述随机变量离散点的 PDF(见附录 B)。

2. 平移特性

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x)\delta(x - x_0)\,\mathrm{d}x = w(x_0)$$

3. 对于偶冲激函数

$$\int_a^b w(x)\delta(x - x_0)\,\mathrm{d}x = \begin{cases}0, & x_0 < a\\ \frac{1}{2}w(a), & x_0 = a\\ w(x_0), & a < x_0 < b\\ \frac{1}{2}w(b), & x_0 = b\\ 0, & x_0 > b\end{cases}$$

其中，$b > a$。

4. 对于左冲激函数

$$\int_a^b w(x)\delta(x - x_0)\,\mathrm{d}x = \begin{cases}0, & x_0 \leqslant a\\ w(x_0), & a < x_0 \leqslant b\\ 0, & x_0 > b\end{cases}$$

其中，$b > a$。

5. $\int_{-\infty}^{\infty} w(x)\delta^{(n)}(x - x_0)\,\mathrm{d}x = (-1)^n w^{(n)}(x_0)$

其中，上标 (n) 表示对 x 的 n 阶导数。

6. $\delta(x)$ 的傅里叶变换是 1，即

① 狄拉克冲激函数不是一般的函数，因为在 $x=0$ 点的值是没有定义的。它是由数学分配定理来描述的[Bremermann, 1965]。

$$\mathscr{F}[\delta(x)] = 1$$

反过来，

$$\delta(x) = \mathscr{F}^{-1}[1]$$

7. 尺度变换性质为

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$$

8. 对于偶冲激函数，

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm j2\pi xy} dy$$

A.9　Sa(x) = (sinx)/x 函数表

x	Sa(x)	Sa^2(x)	x	Sa(x)	Sa^2(x)
0.0	1.0000	1.0000	5.2	-0.1699	0.0289
0.2	0.9933	0.9867	5.4	-0.1431	0.0205
0.4	0.9735	0.9478	5.6	-0.1127	0.0127
0.6	0.9411	0.8856	5.8	-0.0801	0.0064
0.8	0.8967	0.8041	6.0	-0.0466	0.0022
1.0	0.8415	0.7081	6.2	-0.0134	0.0002
1.2	0.7767	0.6033	2π	0.0000	0.0000
1.4	0.7039	0.4955	6.4	0.0182	0.0003
1.6	0.6247	0.3903	6.6	0.0472	0.0022
1.8	0.5410	0.2927	6.8	0.0727	0.0053
2.0	0.4546	0.2067	7.0	0.0939	0.0088
2.2	0.3675	0.1351	7.2	0.1102	0.0122
2.4	0.2814	0.0792	7.4	0.1214	0.0147
2.6	0.1983	0.0393	7.6	0.1274	0.0162
2.8	0.1196	0.0143	7.8	0.1280	0.0164
3.0	0.0470	0.0022	8.0	0.1237	0.0153
π	0.0000	0.0000	8.2	0.1147	0.0132
3.2	-0.0182	0.0003	8.4	0.1017	0.0104
3.4	-0.0752	0.0056	8.6	0.0854	0.0073
3.6	-0.1229	0.0151	8.8	0.0665	0.0044
3.8	-0.1610	0.0259	9.0	0.0458	0.0021
4.0	-0.1892	0.0358	9.2	0.0242	0.0006
4.2	-0.2075	0.0431	9.4	0.0026	0.0000
4.4	-0.2163	0.0468	3π	0.0000	0.0000
4.6	-0.2160	0.0467	9.6	-0.0182	0.0003
4.8	-0.2075	0.0431	9.8	-0.0374	0.0014
5.0	-0.1918	0.0368	10.0	-0.0544	0.0030

A.10　Q(z) 函数表

$$Q(z) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z}^{\infty} e^{-\lambda^2/2} d\lambda$$

对于 $z \geqslant 3, Q(z) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}z} e^{-z^2/2}$（见图 B.7）

同时，

$Q(-z) = 1 - Q(z)$

$Q(z) = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\left[1 - \text{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\right]$

其中，$\text{erfc}(x) \triangleq \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda$ 且 $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\lambda^2} d\lambda$

对于 $z \geqslant 0$，一个合理的函数近似值为[Abramowitz 和 Stegun, 1964; Ziemer 和 Tranter, 1995]

$$Q(z) = \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}(b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5)$$

其中，$t = 1/(1 + pz)$，$p = 0.231\,641\,9$，$b_1 = 0.319\,815\,30$，$b_2 = -0.356\,563\,782$，$b_3 = 1.781\,477\,937$，$b_4 = -1.821\,255\,978$，$b_5 = 1.330\,274\,429$。

另一种对 $z \geqslant 0$ 时 $Q(z)$ 的估计为[Börjesson 和 Sunberg, 1979; Peebles, 1993]

$$Q(z) = \left[\frac{1}{(10.339)z + 0.339\sqrt{z^2 + 5.510}}\right]\frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

当 $z \geqslant 0$ 时，这种估计的最大绝对误差为 0.27%。



z	$Q(z)$	z	$Q(z)$
0.0	0.50000	2.0	0.02275
0.1	0.46017	2.1	0.01786
0.2	0.42074	2.2	0.01390
0.3	0.38209	2.3	0.01072
0.4	0.34458	2.4	0.00820
0.5	0.30854	2.5	0.00621
0.6	0.27425	2.6	0.00466
0.7	0.24196	2.7	0.00347
0.8	0.21186	2.8	0.00256
0.9	0.18406	2.9	0.00187
1.0	0.15866	3.0	0.00135
1.1	0.13567	3.1	0.00097
1.2	0.11507	3.2	0.00069
1.3	0.09680	3.3	0.00048
1.4	0.08076	3.4	0.00034
1.5	0.06681	3.5	0.00023
1.6	0.05480	3.6	0.00016
1.7	0.04457	3.7	0.00011
1.8	0.03593	3.8	0.00007
1.9	0.02872	3.9	0.00005
		4.0	0.00003

见图 B.7 中 $Q(z)$ 曲线。

附录 B　概率和随机变量

B.1　概论

对于概率理论的需求出现于任何科学领域中，因为要精确地确定测量所得的值是不可能的。例如，我们可能会说我们有 90% 的把握认为一个电压的值为 5 V ±0.1 V。相对于确定的描述，这是对这个电压参数的统计学描述。在进行确定的描述时，我们可能会定义这个电压值为确定的 5 V。

本附录只是对概率和随机变量做一个简要概述。另有许多很好的书籍对此主题做了详尽的论述［Miller，2012；Childers，1997；Papoulis，1991；Peebles，1993；Shanmugan 和 Breipohl，1988］。本附录可为没有学习过此内容的学生提供简明的介绍，或者帮助已经具有这方面知识的学生对此内容进行快速复习。

如果你以前没有接触过概率和随机变量的内容，你将很快意识到为了理解它们，你需要掌握大量看起来是一下子同时介绍给你的新概念。为了掌握和别人谈及统计结果时要用到的词汇，记牢这些概念是十分重要的。另外，你必须培养针对这些概念和原理的工程应用的感觉。我们将在刚开始的时候完成这一点，然后你将很容易地掌握更加复杂的统计思想。

B.2　集合

定义　集合是对象的一个集聚(或者类别)。

最大的集合或者包含了一次试验中所要考虑的对象的全体的集合称为全集。试验中所有其他要考虑的集合称为全集的子集或者事件。这可由图 B.1(a)中给出的韦恩图(Venn diagram)说明。例如，M 可能表示包括所有种类的奶油冰激凌集合，而 B 表示蓝草莓奶油冰激凌的子集。因而，B 包含于 M，记为 $B \subset M$。图 B.1(b)和(c)给出了两个集合 A 和 B。有两种基本的途径来描述集合 A 和集合 B 的组合，称为交集和合集。

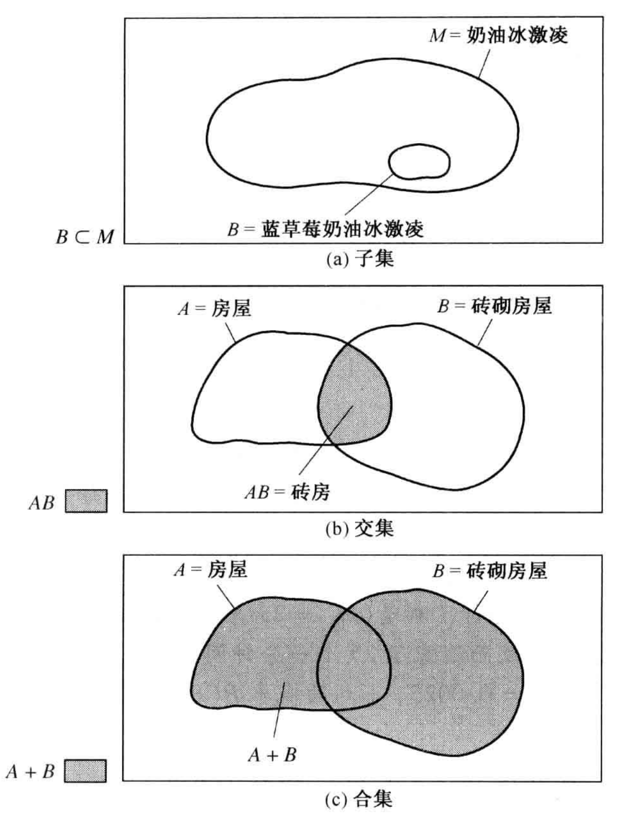
定义　集合 A 和集合 B 的交集，记为 AB，是 A 与 B 共有的元素的集合。(数学家们使用符号 $A \cap B$。)

A 和 B 的交集类似于数字逻辑中的与操作。例如，如果 A 表示房子而 B 表示砖建筑，那么事件 $C = AB$ 就仅表示砖房。这由图 B.1(b)说明。

定义　集合 A 和集合 B 的合集，记为 $A + B$，是包括了 A 的所有元素或者 B 的所有元素或者 A 和 B 所有元素的集合(数学家们使用符号 $A \cup B$)。

A 与 B 的合集类似于数字逻辑中的 OR 操作。沿用上面的例子，$D = A + B$ 将表示包含了所有砖砌建筑、所有房子和所有砖房的集合。这由图 B.1(c)说明。

事件 A 和 B 称为简单事件，而事件 $C = AB$ 及 $D = A + B$ 称为组合事件，因为它们是简单事件的逻辑函数。



(a) 子集

(b) 交集

(c) 合集

图 B.1　韦恩图(Venn diagram)

B.3　概率和相对频率

B.3.1　简单概率

事件 A 的概率，记为 $P(A)$，可以定义为在 n 次试验中 A 发生的频率。

定义 ①

$$P(A) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n_A}{n}\right) \tag{B.1}$$

n_A 是在 n 次试验中 A 发生的次数。

在实际中，n 一般是可数的，当 n 值很大的时候 $P(A)$ 值大约等于估计值。例如，假设抛一个硬币 40 次，正面事件(记为 A)发生了 19 次，那么正面的概率将被大致估算为 $P(A) = \frac{19}{40}$，而真实值 $P(A) = 0.5$ 将在 $n = \infty$ 时取得。

根据概率的定义，如式(B.1)所示，可以看出所有的概率变量都满足：

① 这里使用工程学的方法来定义概率。严格地说，统计学家们在以下三个定理的基础上发展了概率论：(1) $P(A) > 0$。(2) $P(S) = 1$，S 是确知事件。(3)假定 AB 是空集(即 $AB = \varnothing$)，则 $P(A+B) = P(A) + P(B)$。统计学家们定义 $P(A)$ 为满足这些定理的 A 的任意函数。工程学定义与这个方法一致，因为它满足这些定理。

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1 \tag{B.2}$$

当 A 为空集(从不发生)时 $P(A)=0$，当 A 为确知事件时(总是发生)时 $P(A)=1$。

B.3.2 联合概率

定义 一个联合事件 AB 的概率定义为

$$P(AB)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n_{AB}}{n}\right) \tag{B.3}$$

其中，n_{AB} 是事件 AB 在 n 次试验中发生的次数。

此外，两个事件 A 和 B，如果 AB 为空集，为互斥事件，这意味着 $P(AB)\equiv 0$。

例题 B.1 概率计算

令事件 A 表示在一分钟的间隔内在某十字路口由于汽车事故造成的阻塞。令事件 B 表示在一分钟的间隔内此路口在下雨。那么，事件 $E=AB$ 将表示在一分钟的间隔内在下雨时路口被阻塞。

假设在一周内持续地进行试验测量，得到 $n_A=25$，$n_B=300$，$n_{AB}=20$，而且一周之内共在 $n=10\,080$ 个一分钟间隔进行了测量($n_A=25$ 并不是说在一周之内发生了 25 起事故，而是说该十字路口因为汽车事故而堵塞了 25 个一分钟间隔；n_B 和 n_{AB} 也是这样)。这些结果表明路口被阻塞的概率 $P(A)=0.0025$，下雨的概率 $P(B)=0.03$，而当下雨时路口阻塞的概率 $P(AB)=0.002$。

定理 令 $E=A+B$；$P(E)=P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ (B.4)

证明 令事件 A 在 n 次试验中只发生 n_1 次，事件 B 只发生 n_2 次，而事件 AB 发生 n_{AB} 次。那么，

$$\begin{aligned}P(A+B)&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n_1+n_2+n_{AB}}{n}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n_1+n_{AB}}{n}\right)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n_2+n_{AB}}{n}\right)-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n_{AB}}{n}\right)\end{aligned}$$

它与式(B.4)完全相同，因为

$$P(A)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n_1+n_{AB}}{n}\right),$$

$$P(B)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n_2+n_{AB}}{n}\right),\ \text{且}\ P(AB)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n_{AB}}{n}\right)$$

例题 B.1(续) 路口阻塞或下雨，或下雨时路口阻塞的概率为

$$P(A+B)=0.0025+0.03-0.002\approx 0.03 \tag{B.5}$$

B.3.3 条件概率

定义 在事件 B 已经发生的条件下，事件 A 发生的概率记为 $P(A\mid B)$，定义为

$$P(A|B)=\lim_{n_B\to\infty}\left(\frac{n_{AB}}{n_B}\right) \tag{B.6}$$

例题 B.1(续)

下雨时路口阻塞的概率大约为

$$P(A|B) = \tfrac{20}{300} = 0.066 \tag{B.7}$$

定理　令 $E = AB$，那么

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B) \tag{B.8}$$

这就是著名的贝叶斯公式。

证明

$$P(AB) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n_{AB}}{n}\right) = \lim_{\substack{n\to\infty\\ n_A\to\text{很大}}}\left(\frac{n_{AB}}{n_A}\ \frac{n_A}{n}\right) = P(B|A)P(A) \tag{B.9}$$

注意，在例题 B.1 中得到的 $P(AB)$，$P(B)$ 和 $P(A|B)$ 的值可以由式(B.8)验证。

定义　两个事件，A 和 B，被称作相互独立，如果

$$P(A|B) = P(A) \tag{B.10}$$

或

$$P(B|A) = P(B) \tag{B.11}$$

利用这个定义，我们可以很容易地证明例题 B.1 中的事件 A 和 B 不是相互独立的。相反，如果把事件 A 定义为抛硬币时得到正面，而事件 B 为路口下雨，则 A 和 B 就是独立的。为什么？

通过式(B.8)和式(B.10)，可以得到如果一组事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是相互独立的，其必要条件是①

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n) \tag{B.12}$$

B.4　随机变量

定义　一个实随机变量是定义在概率系统事件(元素)上的实函数。

对于概率理论这个主题来说，理解为什么需要这个定义是基础性的。到目前为止，我们已经根据事件 A,B,C 等定义了概率。当集合是由物体(苹果、橙子等)组成而不是由数字组成的时候，这种方法不太适的。用数值来描述集合更加方便一些，所以方程式可以作为数值函数代替含有字母的参变量函数。这种方法通过使用随机变量来实现。

例题 B.2　随机变量

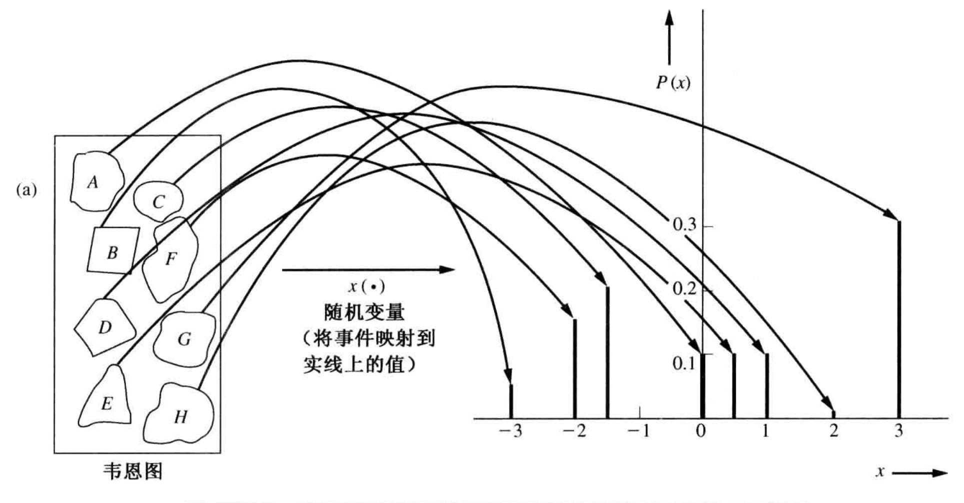
参见图 B.2，我们可以看到由韦恩图描述的互斥事件 A，B，C，D，E，F，G 和 H。这些都是一个实验的可能的输出，所以全集是 $S = A + B + C + D + E + F + G + H$。这些事件中的每一个都由随机变量 x 的一些取值表示，如图中的表格所示。这些指定的 x 值可以是确定的、不确定的、小数或者整数，只要它们是实数。因为所有的事件都是互相排斥的，由式(B.4)可得：

$$P(S) = 1 = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) + P(E) + P(F) + P(G) + P(H) \tag{B.13}$$

也就是说，各概率之和必须为 1(必然事件的概率)，如表中所示，而且单个的概率已经给出或者测量得到。例如，$P(C) = P(-1.5) = 0.2$。这些概率的值可以作为随机变量 x 的函数绘出图形，如 $P(x)$ 的曲线所示。这是一个离散(或者点)分布，因为此随机变量只取离散的(相对于连续的)值。

---

① 式(B.12)不是 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立的充分条件[Papoulis, 1984, p.34]。



事件 [·]	随机变量的值 $x[\cdot]$	事件的概率 $P(x)$
A	0.0	0.10
B	−3.0	0.05
C	−1.5	0.20
D	−2.0	0.15
E	+0.5	0.10
F	+1.0	0.10
G	+2.0	0.00
H	+3.0	0.30
		总计 = 1.00

图 B.2 针对例题 B.2 的随机变量与概率函数

B.5 累积分布函数和概率密度函数

定义 随机变量 x 的累积分布函数(CDF)由 $F(a)$ 表示，这里，

$$F(a) \triangleq P(x \leqslant a) \equiv \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n_{x\leqslant a}}{n}\right) \tag{B.14}$$

其中 $F(a)$ 是一个没有单位的函数。

定义 随机变量 x 的概率密度函数(PDF)由 $f(x)$ 给出，其中，

$$f(x) = \left.\frac{\mathrm{d}F(a)}{\mathrm{d}a}\right|_{a=x} = \left.\frac{\mathrm{d}P(x \leqslant a)}{\mathrm{d}a}\right|_{a=x} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x\to 0}}\left[\frac{l}{\Delta x}\left(\frac{n_{\Delta x}}{n}\right)\right] \tag{B.15}$$

$f(x)$ 的单位为 $1/x$。

例题 B.2(续)

此例中的由图 B.2 说明的 CDF 可以很容易通过式(B.14)得到。作为结果而得到的 CDF 如图 B.3 所示。注意，此 CDF 开始于左边($a = -\infty$)的 0 值，并且此概率一直累加到 CDF 在右边($a = +\infty$)等于 1。

应用式(B.15)，可以通过对 CDF 求导得到 PDF，结果如图 B.4 所示。此 PDF 由在该随机变量的指定的(离散的)点上的狄拉克(Dirac)脉冲函数组成，其权值等于相应事件的概率。①

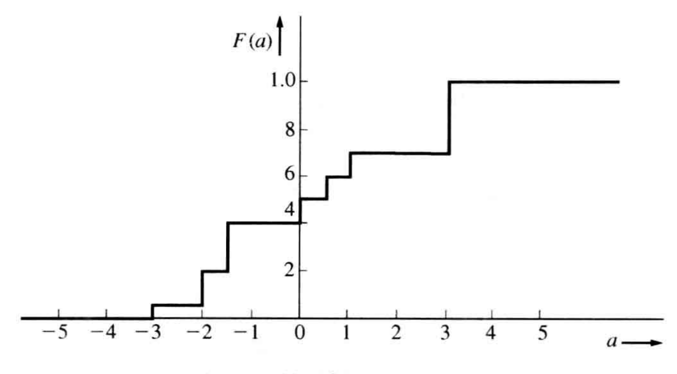


图 B.3　针对例题 B.2 的 CDF

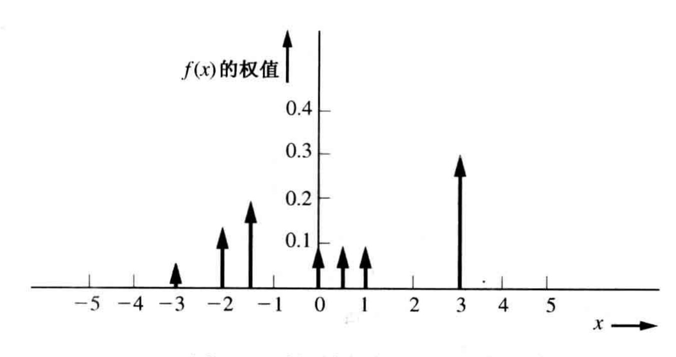


图 B.4　针对例题 B.2 的 PDF

B.5.1　CDF 和 PDF 的性质

CDF 的一些性质如下：

1. $F(a)$ 是一个不减函数。
2. $F(a)$ 是右连续的，即

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} F(a+\varepsilon)=F(a)$$

3.
$$F(a)=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\int_{-\infty}^{a+\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x \tag{B.16}$$

4. $0\leqslant F(a)\leqslant 1$。
5. $F(-\infty)=0$。
6. $F(+\infty)=1$。

注意，这里的 ε 是用来说明有可能在 $x=a$ 出现离散点。如果在 $x=a$ 处没有离散点出现，这个极限就是不必要的。

① 在这里用左边脉冲函数，是为了当 $x=a$ 为离散点时，$F(a)=P(x\leqslant a)$ 包括了从 $x=-\infty$ 开始的所有概率，直到包括 $x=a$ 点。关于 Dirac 脉冲函数的性质请参阅 A.8 节(附录 A)。

PDF 的一些性质如下：

1. $f(x) \geqslant 0$，即 $f(x)$ 是一个非负函数。

2. $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = F(+\infty) = 1 \tag{B.17}$$

正如我们稍后将要看到的，$f(x)$ 的值可以大于 1；但是，由 $f(x)$ 围成的区域的面积是等于 1 的。这些 CDF 和 PDF 的性质在检查问题结果时是很有用的。也就是说，如果一个 CDF 或者 PDF 的值违背了这些性质中的任何一条或多条，你就会知道在计算中出现了错误。

B.5.2　离散和连续分布

例题 B.2 是一个离散，或者说点分布的例子。也就是说，这个随机变量有 M 个离散的值 $x_1, x_2, \cdots, x_M$（此例中 $M = 7$）。因而，CDF 也只是跳跃性地随 a 的增长而增长[也就是说 $F(a)$ 是不连续的]，并且 PDF 由该随机变量位于离散值的点上的狄拉克冲激函数组成。相对于这个离散分布的例子，存在连续的分布，其中的一个由下一个例子说明。如果允许一个随机变量在某个区间上取任何值，它就是这个区间上一个连续分布的随机变量。

例题 B.3　连续分布

令一个随机变量表示大量的手电筒电池(1.5 V)的电压值。如果集合中电池的数目是无限的，那么可以得到的不同电压值(事件)的数目也将是无限的，以至于分布(PDF 和 CDF)是连续函数。假设通过测量，首先通过 $F(a) = P(x \leqslant a) = \lim_{n\to\infty}(n_{x\leqslant a}/n)$ 估算 CDF 的值，其中 n 是整个集合中电池的总数量，并且 $n_{x\leqslant a}$ 是集合中电压值小于或等于 a V 的电池的数目，其中 a 是参数。可能得到的 CDF 如图 B.5(a)所示。通过对 CDF 求导得到相应的 PDF，如图 B.5(b)所示。注意，这个 $f(x)$ 在 x 的某些值处超过了 1，但是 $f(x)$ 所包围的图形的面积仍然是 1(PDF 的性质之一)(通过验证，你可以证明也满足其他 CDF 和 PDF 性质)。

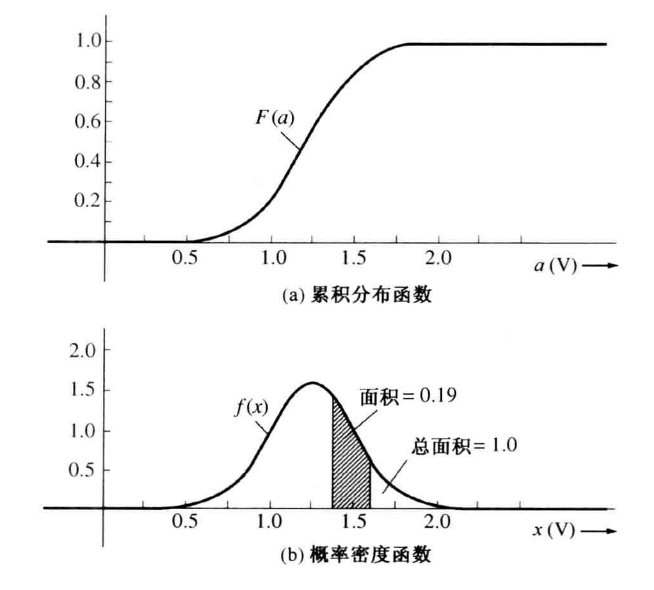


图 B.5　针对连续分布的 CDF 和 PDF(例题 B.3)

定理

$$F(b) - F(a) = P(x \leqslant b) - P(x \leqslant a) = P(a < x \leqslant b)$$
$$= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \left[\int_{b+\varepsilon}^{b+\varepsilon} f(x) \mathrm{d}x \right] \tag{B.18}$$

证明

$$F(b) - F(a) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \left[\int_{-\infty}^{b+\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{a+\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x \right]$$
$$= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \left[\int_{-\infty}^{a+\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a+\varepsilon}^{b+\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{a+\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x \right]$$
$$= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \left[\int_{a+\varepsilon}^{b+\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x \right]$$

例题 B.3(续)

假设我们要计算得到一个电压值介于 1.4 V 和 1.6 V 之间的电池的概率。应用该定理和图 B.5，可计算得到

$$P(1.4 < x \leqslant 1.6) = \int_{1.4}^{1.6} f(x)\mathrm{d}x = F(1.6) - F(1.4) = 0.19$$

我们还发现得到一个电压为 1.5 V 的电池的概率为 0。为什么？然而，得到电压值为 1.5 V ±0.1 V 的电池的概率为 0.19。

例题 B.4　高斯随机变量的 PDF 和 CDF

令 x 是均值为 m、方差为 σ 的高斯随机变量。使用 MATLAB，寻找 m 和 σ 的值以给出图 B.5 所示的结果。绘出你的结果并与图 B.5 进行比较。使用 MATLAB，计算 $P(1.4 < x \leqslant 1.6)$ 。解题过程参见 M 文件 ExampleB_04. m。

定理　若 x 为离散分布的，那么，

$$f(x) = \sum_{i=1}^{M} P(x_i)\, \delta\,(x - x_i) \tag{B.19}$$

其中，M 是离散事件的数目，$P(x_i)$ 是离散事件 x_i 发生的概率。

这个定理由例题 B.2 说明，该离散分布的 PDF 如图 B.4 所示。

定理　若 x 为离散分布的，那么，①

$$F(a) = \sum_{i=1}^{L} P(x_i) \tag{B.20}$$

L 为满足 $x_L \leqslant a, L \leqslant M$ 的最大整数，并且 M 为离散分布中的点的数目。这里假设离散点 x_i 是按 i 的降序排列的，即 $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_M$。

该定理如图 B.3 所示，此图是对例题 B.2 应用式(B.20)所得。

在电气工程的问题中，利用相对频率的方法，如式(B.14)和式(B.15)所述的方法，波形的

① 式(B.20)等同于 $F(a) = \sum_{i=1}^{M} P(x_i)u(a - x_i)$，其中 $u(y)$ 为单位阶跃函数[在式(2.49)中定义]。

CDF 和 PDF 相对比较容易得到。例如，在图 B.6 中给出了三角波和方波的 PDF。这些是通过扫描一个水平窄窗口得到的，宽度为 Δx 伏，垂直穿过了波形并测量了在 Δx 窗口中电压出现的相对频率。时间轴被分为了 n 个间隔，并且在这些间隔内波形在 Δx 窗口出现了 $n_{\Delta x}$ 次。在一个模拟示波器上观察波形可以对这个波形的 PDF 有一个粗略的认识。不使用水平扫描，显示的电压(y 轴)函数的强度给出了 PDF(这里假设图像的强度与时间成比例，窗口中的波形保持在 Δy 单位的宽度以内)。PDF 作为 y(随机变量)的函数与强度成正比。

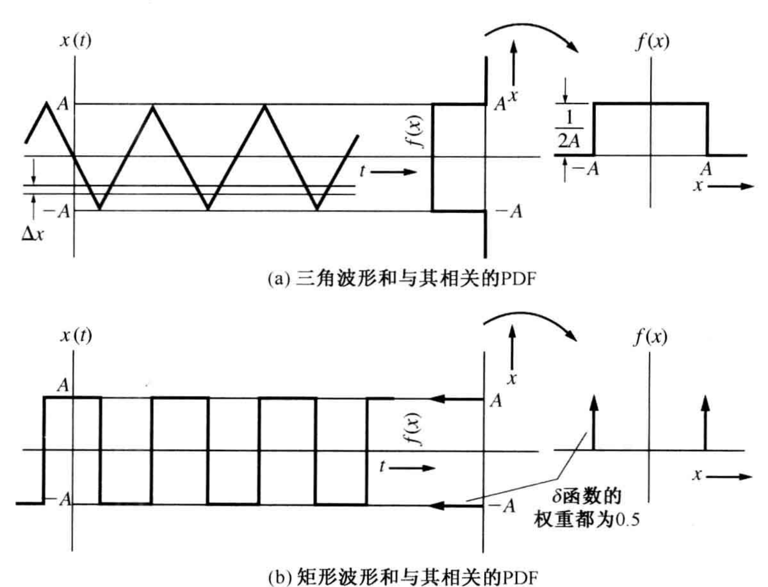


图 B.6 针对矩形波形和三角波形的 PDF

B.6 集平均与矩

B.6.1 集平均

概率论的一个主要应用就是计算一个随机变量(这个随机变量常用来描述一定的物理现象)的均值，或者计算随机变量函数的均值。通常，令随机变量的函数表示为 $y = h(x)$。

定义 $y = h(x)$ 的期望值，又称为集平均值，为

$$\overline{y} = \overline{[h(x)]} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} [h(x)]\, f(x)\, \mathrm{d}x \tag{B.21}$$

这个定义既适用于离散随机变量，又适用于连续随机变量。注意，这个算子是线性的，该算子为

$$\overline{[\cdot]} = \int_{-\infty}^{\infty} [\cdot]\, f(x)\, \mathrm{d}x \tag{B.22}$$

注意，有些作者可能会把集平均值表示为 $E[y]$ 或者 $\langle y\rangle$。我们将使用 $\overline{y}$ 符号，因为它不仅易于书写，而且在包含大量平均算子的公式中还便于使用。

定理 如果 x 是一个离散分布的随机变量，它的期望值可以这样求得：

$$\overline{y} = \overline{[h(x)]} = \sum_{i=1}^{M} h(x_i)P(x_i) \tag{B.23}$$

其中，M 是分布内离散点的个数。

证明　把式(B.19)代入式(B.21)，得到：

$$\begin{aligned}\overline{[h(x)]} &= \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\left[\sum_{i=1}^{M} P(x_i)\,\delta(x-x_i)\right]\mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=1}^{M} P(x_i)\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\delta(x-x_i)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=1}^{M} P(x_i)h(x_i)\end{aligned}$$

例题 B.5　均值的计算

现在我们来证明式(B.23)和由式(B.21)给出的期望值定义与我们通常计算均值的方法是一致的。假定一个班有 $n = 40$ 个学生参加考试。考试结果是，有 1 名同学得 100 分，2 名同学得 95 分，4 名同学得 90 分，6 名同学得 85 分，10 名同学得 80 分，10 名同学得 75 分，5 名同学得 70 分，1 名同学得 65 分，1 名同学得 60 分。那么，这个班的平均成绩为

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{100(1)+95(2)+90(4)+85(6)+80(10)+75(10)+70(5)+65(1)+60(1)}{40} \\ &= 100\left(\frac{1}{40}\right)+95\left(\frac{2}{40}\right)+90\left(\frac{4}{40}\right)+85\left(\frac{6}{40}\right)+80\left(\frac{10}{40}\right)+75\left(\frac{10}{40}\right) \\ &\quad +70\left(\frac{5}{40}\right)+65\left(\frac{1}{40}\right)+60\left(\frac{1}{40}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{9} x_i P(x_i) = 79.6\end{aligned} \tag{B.24}$$

B.6.2　矩

矩被定义为一些用于 $h(x)$ 的特殊函数的集平均。例如，对于 r 阶矩(随后定义)，令 $y = h(x) = (x - x_0)^r$。

定义　随机变量 x 关于 x_0 点的 r 阶矩可以由下式给出：

$$\overline{(x-x_0)^r} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-x_0)^r f(x)\,\mathrm{d}x \tag{B.25}$$

定义　均值 m 是一阶原点矩(也就是说，$x_0 = 0$)，即

$$m \triangleq \bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x \tag{B.26}$$

定义　方差 σ^2 是关于均值的二阶矩，因而

$$\sigma^2 = \overline{(x-\bar{x})^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{x})^2 f(x)\,\mathrm{d}x \tag{B.27}$$

定义　标准方差 σ 是方差的平方根值，因而

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{x})^2 f(x)\,\mathrm{d}x} \tag{B.28}$$

作为一名工程师，你会在一些机械应用中认识式(B.26)和式(B.27)中的积分。均值表示分布在一维上的实体的重心，$f(x)$ 表示这个实体在 x 轴上的密度函数。方差表示在重心上的惯量。然而，你也许会问："均值、方差和矩在电子工程类问题中有什么重要性?"，在第6章中已证明，如果 x 代表电压或者电流波形，均值就是这个波形的直流分量。其二阶原点矩（$r=2$，$x_0=0$）$\overline{x^2}$ 表示归一化功率。方差 σ^2 表示相应的交流耦合信号的平均功率，因此，$\sqrt{\overline{x^2}}$ 为波形的 RMS 值，σ 为相应交流耦合信号的 RMS 值。

在统计术语中，m 表示 PDF 的重心，σ 表示 PDF 关于重心的扩展。例如，在图 B.5 中给出了手电筒电池集合的电压分布。其均值是 $\bar{x}=1.25$ V，标准方差 $\sigma=0.25$ V。该图给出了将在 B.7 节详细讨论的高斯分布。对于该高斯分布，$f(x)$ 下面从 $x=1.0\sim1.5$ V 的面积，对应于 $\bar{x}\pm\sigma$ 区间，是0.68。因此可以推断：68%的电池电压在均值的一个标准方差范围内变化(高斯分布)。

有几种方法用来描述 x 的典型值，或者最普通的值。均值 m 是一种描述重心的方式。另外一种方法是中值，相应的值 $x=a$，并有 $F(a)=\dfrac{1}{2}$。第三种方法是模，它是对应 $f(x)$ 最大值的 x（假定 PDF 仅有一个最大值）。对高斯分布，所有方式求出的值是同一个值，$x=m$。对于其他类型的分布，所求出的均值、中值及模值通常是比较接近的数值。方差也与有关原点和均值的二阶矩有关，如下面的定理所述：

定理

$$\sigma^2=\overline{x^2}-(\bar{x})^2 \tag{B.29}$$

该定理的证明可以说明集平均值算子符号是如何使用的。

证明

$$\begin{aligned}\sigma^2&=\overline{(x-\bar{x})^2}\\&=\overline{[x^2]}-\overline{[2x\bar{x}]}+\overline{[(\bar{x})]^2}\end{aligned} \tag{B.30}$$

因为 $\overline{[\cdot]}$ 是一个线性算子，所以 $\overline{[2x\,\bar{x}]}=2\,\bar{x}\,\bar{x}=2\,(\bar{x})^2$。此外，$(\bar{x})^2$ 是一个常数，并且常数的均值就是它本身，也就是说，对于常数 c，

$$\bar{c}=\int_{-\infty}^{\infty}cf(x)\,\mathrm{d}x=c\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=c \tag{B.31}$$

于是，把式(B.31)代入式(B.30)，得到：

$$\sigma^2=\overline{x^2}-2(\bar{x})^2+(\bar{x})^2$$

这个式子同式(B.29)是等价的。

因此，就有两种方法求方差：(1)利用式(B.27)给出的定义；(2)利用式(B.29)的定理。

B.7 重要分布示例

有许多种类型的分布。一些在通信和统计问题中比较重要的分布已经总结在表 B.1 中了。在这里，我们给出它们的 PDF 和 CDF 的表达式、PDF 略图、均值和方差的表达式。这些分布将在下面详细讨论。

表 B.1　一些分布及其特征

分布名称	类型	PDF 略图	累积分布函数(CDF)	概率密度函数(PDF)	均值	方程
二项	离散	$n=3$，$p=0.6$	$F(a)=\sum_{k=0,\ m\leqslant a}^{m}P(k)$ 其中，$P(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	$f(x)=\sum_{k=0}^{n}P(k)\delta(x-k)$ 其中，$P(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
泊松	离散	$\lambda=2$	$F(a)=\sum_{k=0,\ m\leqslant a}^{m}P(k)$ 其中，$P(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}P(k)\delta(xk)$ 其中，$P(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ
均匀	连续		$F(a)=\begin{cases}0, & a<\left(\frac{2m-A}{2}\right)\\ \frac{1}{A}\left[a-\left(\frac{2m-A}{2}\right)\right], & \lvert a-m\rvert\leqslant\frac{A}{2}\\ 1, & a\geqslant\left(\frac{2m-A}{2}\right)\end{cases}$	$f(x)=\begin{cases}0, & x<\left(\frac{2m-A}{2}\right)\\ \frac{1}{A}, & \lvert x-m\rvert\leqslant\frac{A}{2}\\ 0, & x>\left(\frac{2m+A}{2}\right)\end{cases}$	m	$\frac{A^2}{12}$
高斯	连续		$F(a)=Q\left(\frac{m-a}{\sigma}\right)$ 其中，$Q(\sigma)\triangleq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^{\infty}e^{-x^2/2}dx$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp[-(x-m)^2/2\sigma^2]$	m	σ^2
正弦	连续		$F(a)=\begin{cases}0, & a\leqslant -A\\ \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}+\arcsin\left(\frac{a}{A}\right)\right], & \lvert a\rvert\leqslant A\\ 1, & a\geqslant A\end{cases}$	$f(x)=\begin{cases}0, & x<-A\\ \frac{1}{\pi\sqrt{A^2-x^2}}, & \lvert x\rvert\leqslant A\\ 0, & x>A\end{cases}$	0	$\frac{A^2}{2}$

B.7.1　二项分布

二项分布在描述数字和其他统计问题中十分有用，它的应用可用下面这个例子来最好地说明。

假设有一个 n 比特长的二进制字，发送 1 的概率是 p，那么发送 0 的概率就是 $1-p$。我们想求得包含有 k 个二进制 1 的 n 比特字的概率，一个这样的字可以是 k 个 1，接下来是 $n-k$ 个 0。得到这样一个字的概率是 $p^k(1-p)^{n-k}$。也有其他包含 k 个二进制 1 的字。事实上，包含 k 个二进制 1 的不同的 n 比特字的个数是

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!k!} \tag{B.32}$$

（这可以用具体的数字举例验证，比如 $n=8,k=3$。）符号 $\binom{n}{k}$ 在代数上用来表示式(B.32)中所进行的运算，读作“一次从 n 个数中取出 k 个的个数”。因而，n 比特中包含有 k 个二进制 1 的概率是

$$P(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \tag{B.33}$$

如果令随机变量 x 表示离散的数值，那么 $x = k$，其中 k 可以取0，1，2，…，n，于是得到二项分布的 PDF 为

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} P(k)\delta(x-k) \tag{B.34}$$

其中，$P(k)$ 由式(B.33)给出。

“二项”这个名字产生于这样一个事实，$P(k)$ 是二项式展开中的一项。也就是说，令 $q = 1 - p$，我们得到：

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} P(k) \tag{B.35}$$

组合 $\binom{n}{k}$ 也是二项式系数，可以用帕斯卡(Pascal)三角形求得：

$$\begin{array}{lccccccccccc}
n=0 & & & & & & 1 & & & & & \\
n=1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n=2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
n=3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
n=4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
n=5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\vdots & & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}$$

对于一个特定的 n 值，组合 $\binom{n}{k}$，$k = 0, 1, 2, \cdots, n$，是第 n 行的元素。例如，对于 $n = 3$，

$$\binom{3}{0} = 1,\quad \binom{3}{1} = 3,\quad \binom{3}{2} = 3,\quad \binom{3}{3} = 1$$

二项分布的均值可用式(B.23)求得：

$$m = \bar{x} = \sum_{k=0}^{n} x_k P(x_k) = \sum_{k=0}^{n} kP(k)$$

或者

$$m = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \tag{B.36}$$

应用恒等式：

$$k\binom{n}{k} = \frac{kn!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}$$

$$= n\left[\frac{(n-1)!}{((n-1)(k-1))!(k-1)!}\right]$$

或者

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1} \tag{B.37}$$

我们得到：

$$m = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} \tag{B.38}$$

进行变量代换，令 $j = k - 1$，于是，

$$\begin{aligned} m &= \sum_{j=0}^{n-1} n\binom{n-1}{j} p^{j+1} q^{n-(j+1)} \\ &= np\left[\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} p^j q^{(n-1)-j}\right] = np\left[(p+q)^{n-1}\right] \end{aligned} \tag{B.39}$$

因为 p 和 q 是概率，并且 $p + q = 1$，我们得到 $(p+q)^{n-1} = 1$。因而，式(B.39)简化为

$$m = np \tag{B.40}$$

类似地，应用 $\sigma^2 = \overline{x^2} = (\bar{x})^2$ 可以证明其方差是 $np(1-p)$。

B.7.2　泊松分布

当 n 十分大并且 p 又很小时，泊松分布(见表 B.1)可由二项分布求极限得到，但是二者的乘积 $np = \lambda$ 必须大小合适[Thomas, 1969]。

B.7.3　均匀分布

均匀分布为

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < \left(\dfrac{2m - A}{2}\right) \\ \dfrac{1}{A}, & |x - m| \leqslant \dfrac{A}{2} \\ 0, & x > \left(\dfrac{2m + A}{2}\right) \end{cases} \tag{B.41}$$

其中，A 是随机变量的峰-峰值，这由表(B.1)中的略图显示。该分布的均值为

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{m-(A/2)}^{m+(A/2)} x \frac{1}{A}\,\mathrm{d}x = m \tag{B.42}$$

方差是

$$\sigma^2 = \int_{m-(A/2)}^{m+(A/2)} (x - m)^2 \frac{1}{A}\,\mathrm{d}x \tag{B.43}$$

进行变量代换，令 $y = x - m$：

$$\sigma^2 = \frac{1}{A}\int_{-A/2}^{A/2} y^2 \mathrm{d}y = \frac{A^2}{12} \tag{B.44}$$

均匀分布在描述第 3 章讨论的当模拟信号被转化成 PCM 信号过程中产生的量化噪声时十分有用。在第 6 章中，它也用来描述当输入是高斯噪声(连续)时，相位检测器的噪声输出。

B.7.4　高斯分布

高斯分布也称为正态分布，如果它不是最重要的分布，那么也是最重要的分布之一。正如在第 5 章讨论的，热噪声具有高斯分布。其他大量的现象也用高斯统计学来描述，并且许多定

理都是在基于高斯假设的基础上发展而来的。高斯分布在通信领域和统计学领域中都是十分重要的，这一点怎么强调也不过分。可以证明，在二项分布中，当 n 变得十分大时，而保持其均值 $m = np$ 有限，并让方差 $\sigma^2 = np(1-p)$ 远大于1，则可以通过二项分布的极限形式获得高斯分布[Feller, 1957; Papoulis, 1984]。

定义 高斯分布为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)} \tag{B.45}$$

其中，m 是均值，σ^2 是方差。

图 B.5 给出了式(B.45)的草图以及高斯随机变量的 CDF。高斯随机变量的 PDF 是关于 $x = m$ 对称的，对于 $(-\infty \leqslant x \leqslant m)$，PDF 下的面积为1/2，且对于 $(m \leqslant x \leqslant \infty)$，PDF 下的面积也为1/2。PDF 的峰值为 $1/\sqrt{2\pi}\sigma$，以至于当 σ 趋于0时，高斯 PDF 就形成了在 $x = m$ 处的 σ 函数(因为 PDF 下的面积总是1)。

我们现在来说明式(B.45)已得到合适的归一化处理[即 $f(x)$ 下的面积是1]。这可以通过令 I 表示 PDF 的积分来完成：

$$I \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)}\mathrm{d}x \tag{B.46}$$

做一个变量代换，令 $y = (x-m)/\sigma$，则

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}(\sigma\mathrm{d}y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\mathrm{d}y \tag{B.47}$$

可以通过证明 I 的平方为1来证明积分 I 为1：

$$\begin{aligned} I^2 &= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\mathrm{d}x\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\mathrm{d}y\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{B.48}$$

做一个将变量从直角坐标到极坐标的变换，令 $r^2 = x^2 + y^2$，并且令 $\theta = \arctan(y/x)$，则

$$I^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\infty} e^{-r^2/2} r\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = 1 \tag{B.49}$$

于是，$I^2 = 1$，所以 $I = 1$。

到目前为止，我们假定式(B.45)的参数 m 和 σ^2 是该分布的均值和方差，我们必须证明它们的确如此！这可以通过将高斯形式以任意参数 α 和 β 的形式表示来完成：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta} e^{-(x-\alpha)^2/(2\beta^2)} \tag{B.50}$$

如式(B.49)所示，这个函数仍然被恰当地归一化。首先，我们需要证明参数 α 就是均值：

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta}\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-(x-\alpha)^2/(2\beta^2)}\mathrm{d}x \tag{B.51}$$

做变量代换，令 $y = (x-\alpha)/\beta$，则

$$m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\beta y + \alpha) e^{-y^2/2}\mathrm{d}y$$

或者

$$m = \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (y\mathrm{e}^{-y^2/2})\,\mathrm{d}y + \alpha\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-y^2/2}\mathrm{d}y\right) \tag{B.52}$$

式(B.52)中右边的第一个积分为0，因为被积函数是一个奇函数，并且积分域对称。右边第二个积分是一个归一化的高斯 PDF 的积分，因此积分值为1。因此，式(B.52)变成

$$m = \alpha \tag{B.53}$$

因而我们证明了参数 α 是均值。

方差为

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\beta} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 \mathrm{e}^{-(x-m)^2/(2\beta^2)}\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{B.54}$$

类似地，我们需要证明 $\alpha^2 = \beta^2$。这将留作课后练习。

例题 B.6　绘制高斯随机变量的 PDF

编写一个计算 m 和 σ 值的 MATLAB 程序，然后绘制相应的高斯 PDF。解题过程参见 M 文件 ExampleB_06. m。

第二个有待于回答的问题是:“高斯分布的 CDF 是什么?”

定理　高斯分布的累积分布函数(CDF)是

$$F(a) = Q\left(\frac{m - a}{\sigma}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{m - a}{\sqrt{2}\sigma}\right) \tag{B.55}$$

其中，Q 函数定义为

$$Q(z) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda^2/2}\,\mathrm{d}\lambda \tag{B.56}$$

互补误差函数(erfc)定义为

$$\mathrm{erfc}(z) \triangleq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{z}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda^2}\,\mathrm{d}\lambda \tag{B.57}$$

还可以证明:

$$\mathrm{erfc}(z) = 1 - \mathrm{erf}(z) \tag{B.58}$$

其中，误差函数定义为

$$\mathrm{erf}(z) \triangleq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{z} \mathrm{e}^{-\lambda^2}\,\mathrm{d}\lambda \tag{B.59}$$

式(B.55)中使用的 Q 函数和互补误差函数给出相同的 $F(a)$ 曲线。因为由式(B.56)和式(B.57)给出的两个积分不能以闭式的形式求出，只能通过数学表格(见 A.10 节，附录 A)、数值积分技术或者用闭式近似式来计算。两个函数之间的关系是

$$Q(z) = \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) \tag{B.60}$$

在解题的时候，Q 函数不需要 1/2 或者 $1/\sqrt{2}$ 这些因子，因此通信工程师常常喜欢用 Q 函数

而不用互补误差函数。相反，使用误差函数和互补误差函数的好处就在于就它们是MATLAB的标准函数之一，而且这些函数在某些手持计算器上也是提供的。但是，概率和统计方面的教科书通常给出归一化的 CDF 的表格。这是一个针对 $m = 0$ 且 $\sigma = 1$ 情形的 $F(a)$ 的表格，并且它等效于 $Q(-a)$ 与 $\frac{1}{2}\text{erfc}(-a/\sqrt{2})$。由于 $Q(z)$ 和 $\frac{1}{2}\text{erfc}(-z/\sqrt{2})$ 是等价的，所以使用哪一个公式是个人的偏好。我们在本书中采用 Q 函数。

证明 一个高斯 CDF 定理的证明：

$$F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{a} \mathrm{e}^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)}\mathrm{d}x \tag{B.61}$$

做变量代换，令 $y = (m-x)/\sigma$：

$$F(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{\infty}^{(m-a)/\sigma} \mathrm{e}^{-y^2/2}(-\sigma\mathrm{d}y) \tag{B.62}$$

或者

$$F(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{(m-a)/\sigma}^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2/2}\mathrm{d}y = Q\left(\frac{m-a}{\sigma}\right) \tag{B.63}$$

类似地，$F(a)$ 也可以用互补误差函数来表示。

例题 B.7 绘制高斯随机变量的 CDF

编写一个计算 m 和 σ 值的 MATLAB 程序，然后绘制相应的高斯 CDF。解题过程参见 M 文件 ExampleB_07. m。

正如早先所述，遗憾的是，$Q(z)$和 $\text{erfc}(z)$的积分不能以闭式的形式求出。但是，对于较大数值的 z，可以得到的非常好的闭式近似；对于小的 z 值，可以很容易地应用数值积分技术。图 B.7 中给出了 $z \geq 0$ 时的 $Q(z)$，在 A.10 节中给出了 $Q(z)$的表。

在 $z > 0$ 时，一个相对简单的 $Q(z)$ 闭式上界为

$$Q(z) < \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,z}\mathrm{e}^{-z^2/2}, \quad z > 0 \tag{B.64}$$

这也示于图 B.7 中。它通过分部积分计算 $Q(z)$ 得到：

$$Q(z) = \int_{z}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\lambda^2/2}\mathrm{d}\lambda = \int_{z}^{\infty} u\mathrm{d}v = uv\Big|_{z}^{\infty} - \int_{z}^{\infty} v\mathrm{d}u$$

其中，$u = 1/(\sqrt{2\pi}\lambda)$，并且 $\mathrm{d}v = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda^2/2}\mathrm{d}\lambda$。因而，

$$Q(z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\lambda}\right)\left(-\mathrm{e}^{-\lambda^2/2}\right)\Big|_{z}^{\infty} - \int_{z}^{\infty}\left(-\mathrm{e}^{-\lambda^2/2}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\lambda^2}\mathrm{d}\lambda\right)$$

忽略积分，它是一个正数，我们得到了 $Q(z)$ 的上限，如式(B.64)所给出。如果有必要的话，也可以求得下限[Wozencraft 和 Jacobs，1965]。$Q(z)$ 的一个有理函数近似已在 A.10 节给出，其闭式近似误差小于 0.27%。

对于 $z \geq 3$，与真实的 $Q(z)$ 值相比，其上限的误差少于 10%。也就是说，对于 $z = 3$，$Q(3) = 1.35\times10^{-3}$ 且上限值为 1.48×10^{-3}，误差为 9.4%。对于 $z = 4$，误差只有 5.6%，而对于 $z = 5$，误差是 3.6%。在评估数字系统的错误概率时，如在第 6、7、8 章讨论的那样，经常发现结果是一个 Q 函数。因为大多数有用的数字通信系统的错误概率都是10^{-3}或更低，这个上限对评估 $Q(z)$

十分有用。无论比例如何，如果使用了上限近似值，我们就知道得到的数值要比理论值稍微差一些。在这种意义下，这个近似将是最坏情况下的结果。

对于 z 取负值的情况，可以通过以下恒等式计算 $Q(z)$：

$$Q(-z) = 1 - Q(z) \tag{B.65}$$

其中，正数 z 的 Q 函数值(如从图 B.7 中求得的那样)用来求负数 z 的 Q 函数值。

例题 B.8　$Q(z)$ 的近似

编写 MATLAB 程序来计算和绘制 $Q(z)$ 函数以及 $Q(z)$ 的上限。解题过程参见 M 文件 ExampleB_08.m。将这些结果与图 B.7 进行比较。

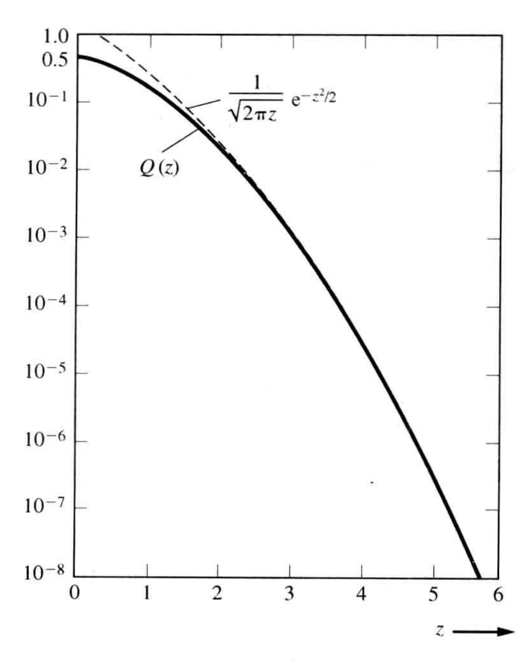


图 B.7　函数 $Q(z)$ 与上界 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}z}e^{-z^2/2}$

B.7.5　正弦分布

定理　如果 $x = A\sin\psi$。其中 ψ 服从均匀分布，且

$$f_\psi(\psi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & |\psi| \leqslant \pi \\ 0, & \text{否则} \end{cases} \tag{B.66}$$

于是，正弦函数的 PDF 可由下式给出：

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -A \\ \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}, & |x| \leqslant A \\ 0, & x > A \end{cases} \tag{B.67}$$

这个定理的证明将在 B.8 节中给出。

正弦分布的 PDF 在表 B.1 中已给出，同时也给出了 CDF 和方差的公式。注意，标准方差与第 6 章讨论的 RMS 值是等价的，为 $\sigma = A/\sqrt{2}$。这不应该是一个令人吃惊的结果。

正弦分布可以被用来对观察的现象建模。例如，x 可能代表一个振荡电压，其中 $\psi = \omega_0 t + \theta_0$。这里振荡频率是 f_0，假设 ω_0 和 t 是确知的值。θ_0 代表初始的随机相位(当打开没有同步的振荡器电源时，振荡建立在存在于电路中的噪声电压的基础上)。在另外一种振荡模型中，时间可能被认为是一个均匀分布的随机变量，其中 $\psi = \omega_0 t$。这里，我们将再次得到一个 x 的正弦分布。

B.8　随机变量的函数变换

如前面介绍的正弦分布那样，我们经常要求解某一个随机变量的 PDF，而这个变量又是一个已知分布的其他随机变量的函数。这在图 B.8 中已经说明。这里，输入随机变量用 x 来表示，输出变量用 y 来表示。因为涉及到许多个 PDF，下标(例如 f_x 中的 x)被用来表示与该随机变量相关的 PDF。PDF 的参数也许会发生变化，这取决于做了什么样的替代，因为等式做了相应的化简。

定理　如果 $y = h(x)$，其中 $h(\cdot)$ 是无记忆设备输出到输入的(转移)特性①，则输出的 PDF 是

$$f_y(y) = \sum_{i=1}^{M} \frac{f_x(x)}{|\mathrm{d}y/\mathrm{d}x|}\Bigg|_{x = x_i = h_i^{-1}(y)} \tag{B.68}$$

其中，$f_x(x)$ 是输入 x 的 PDF。M 是 $y = h(x)$ 的实根个数，即对于单一的 y 值，$y = h(x)$ 的逆给出 $x_1, x_2, \cdots, x_M$。$|\cdot|$ 表示绝对值，并且单一的垂直线表示在 $x = x_i = h_i^{-1}(y)$ 时计算该算式。

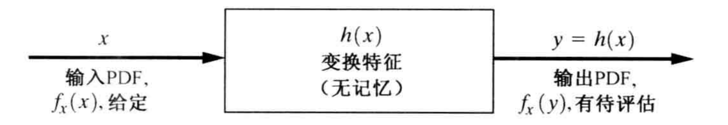


图 B.8　随机变量的函数变换

下面将给出两个例子说明该定理的应用，并且随后给出证明。

例题 B.9　正弦分布

令

$$y = h(x) = A\sin x \tag{B.69}$$

其中，x 在 $-\pi$ 与 π 之间均匀分布，如式(B.66)所给出的那样，如图 B.9 所示。对于给定的 y 值，假定 $-A < y_0 < A$，x 存在两个可能的逆值，也就是说，x_1 和 x_2 如图所示。于是，$M = 2$，假设 $|y| < A$。否则，$M = 0$。计算式(B.69)的导数，得到：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = A\cos x$$

并且对于 $0 \leqslant y \leqslant A$，得到：

$$x_1 = \text{sinarcs}\left(\frac{y}{A}\right)$$

---

① 输出到输入变换特性 $h(x)$ 不应当与用 $h(t)$ 表示的线性网络的脉冲响应相混淆。

以及

$$x_2 = \pi - x_1$$

其中 arcsSin(·) 中的大写字母 S 表示主角。对于 $-A \leqslant y \leqslant 0$，可得到类似的结果。利用式(B.68)，我们得到 y 的 PDF 为

$$f_y(y) = \begin{cases} \dfrac{f_x(x_1)}{|A\cos x_1|} + \dfrac{f_x(x_2)}{|-A\cos x_2|}, & |y| \leqslant A \\ 0, & \text{否则} \end{cases} \tag{B.70}$$

两项的分母可以借助于图 B.9 中的三角计算出来。利用该结果，并且用均匀分布的 PDF 代替 $f_x(x)$，式(B.70)变为

$$f_y(y) = \begin{cases} \dfrac{1/2\pi}{|\sqrt{A^2-y^2}|} + \dfrac{1/2\pi}{|-\sqrt{A^2-y^2}|}, & |y| \leqslant A \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

或者

$$f_y(y) = \begin{cases} 0, & y < -A \\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{A^2-y^2}}, & |y| \leqslant A \\ 0, & y > A \end{cases} \tag{B.71}$$

这就是最初由式(B.67)给出的正弦函数的 PDF。此结果在直观上是显而易见的，因为我们知道一个正弦波在峰值附近占了很多时间，并且经过零点的速度相对较快。所以，这个 PDF 的峰值是在 $+A$ V 和 $-A$ V 处取得的。对式(B.71)的绘图，参见 M 文件 ExampleB_09.m。

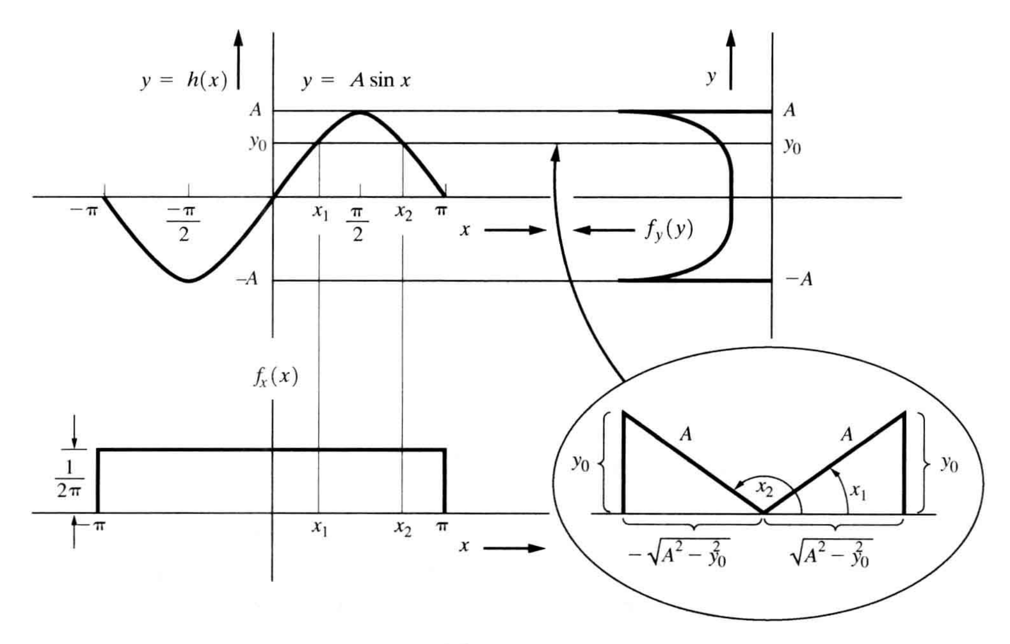


图 B.9　正弦分布 PDF 的计算(例题 B.9)

例题 B.10 二极管输出函数的概率密度函数

假设一个二极管的电压-电流特性由如图 B.10 所示的理想特性给出，其中 y 是两级之间的电流，x 是两级之间的电压。这种特性也叫作半波线性整流。

$$y = \begin{cases} Bx, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases} \tag{B.72}$$

其中，$B > 0$。对于 $y > 0$，$M = 1$；对于 $y < 0$，$M = 0$。然而，如果 $y = 0$，x 有无数个根(也就是所有的 $x \leqslant 0$)。因而，对于 $x \leqslant 0$，如果 $f_x(x)$ 下面的区域不为零，那么在 $y = 0$ 处存在一个离散点。(也就是说，对于映射到 $y = 0$ 的 x 的值。)利用式(B.68)，我们得到：

$$f_y(y) = \begin{Bmatrix} \dfrac{f_x(y/B)}{B} & y > 0 \\ 0, & y < 0 \end{Bmatrix} + P(y = 0)\,\delta(y) \tag{B.73}$$

其中，

$$P(y = 0) = P(x \leqslant 0) = \int_{-\infty}^{0} f_x(x)\,\mathrm{d}x = F_x(0) \tag{B.74}$$

假定 x 服从零均值的高斯分布，则这些公式可简化为

$$f_y(y) = \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}B\sigma}\mathrm{e}^{-y^2/(2B^2\sigma^2)}, & y > 0 \\ 0, & y < 0 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2}\delta(y) \tag{B.75}$$

其结果如图 B.10 所示。对 $B = 1$ 与正值的 x，注意输出与输入相同(也就是说，$y = x > 0$)，因而对 $y > 0$，输出的 PDF 与输入的 PDF 相同。对于 $x < 0$，x 的值映射到点 $y = 0$，于是在点 $y = 0$ 处的 y 的 PDF 包含一个权重为 0.5 的冲激函数。

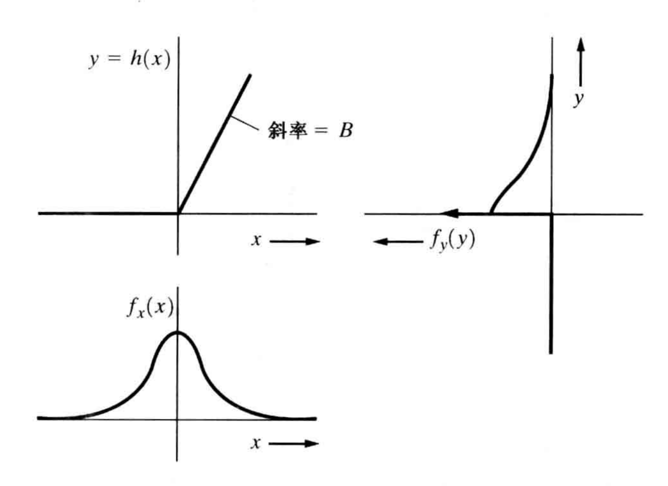


图 B.10 例题 B.10 中二极管输出特性的 PDF 的计算

证明 通过把轴分割为一些区间，在每个区间中，$h(x)$ 是单调增或单调减或者是常数，我们将证明式(B.68)是有效的。正如我们在例题 B.10 中所看到的，当 $h(x)$ 在 x 的一些区间中为常量时，y 的离散点等于那个常量是可能的。另外，在 x 的分布中一些离散点将会被映射到 y 的离散点上，甚至是在 $h(x)$ 不是常数的区间。

通过考虑这种情况，例如对于 $x < x_0$，$y = h(x)$ 是单调减的，而对于 $x > x_0$，$y = h(x)$ 是单调增的，我们现在证明式(B.68)所描述的定理是正确的。这一点如图 B.11 所示。y 的 CDF 为

$$F_y(y_0) = P(y \leqslant y_0) = P(x_1 \leqslant x \leqslant x_2) \\ = P[(x = x_1) + (x_1 < x \leqslant x_2)] \tag{B.76}$$

其中，符号 + 表示合集运算。那么，利用式(B.4)，我们得到：

$$F_y(y_0) = P(x_1) + P(x_1 < x \leqslant x_2)$$

或者

$$F_y(y_0) = P(x_1) + F_x(x_2) - F_x(x_1) \tag{B.77}$$

可以通过对等式两边求导得到 y 的 PDF：

$$\frac{\mathrm{d}F_y(y_0)}{\mathrm{d}y_0} = \frac{\mathrm{d}F_x(x_2)}{\mathrm{d}x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}y_0} - \frac{\mathrm{d}F_x(x_1)}{\mathrm{d}x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}y_0} \tag{B.78}$$

其中，$\mathrm{d}P(x_1)/\mathrm{d}y_0 = 0$，因为 $P(x_1)$ 是常量。因为

$$\mathrm{d}F_x(x_2)/\mathrm{d}x_2 = f_x(x_2) \quad 且 \quad \mathrm{d}F_x(x_1)/\mathrm{d}x_1 = f_x(x_1)$$

于是式(B.78)变为

$$f_y(y_0) = \frac{f_x(x_2)}{\mathrm{d}y_0/\mathrm{d}x_2} + \frac{f_x(x_1)}{-\mathrm{d}y_0/\mathrm{d}x_1} \tag{B.79}$$

在 $x = x_1$ 点，y 的斜率是负的，因为对于 $x < x_0$，函数单调减，因而 $\mathrm{d}y_0/\mathrm{d}x_1 < 0$，并且式(B.79)变为

$$f_y(y_0) = \sum_{i=1}^{M=2} \frac{f_x(x)}{|\mathrm{d}y_0/\mathrm{d}x|}\bigg|_{x = x_i = h_i^{-1}(y_0)} \tag{B.80}$$

当 $h(x)$ 的单调增或减的区间超过两个时，上述过程可以推广，以获得式(B.68)。

作为对随机变量函数变换讨论的总结，应该强调映射函数 $y = h(x)$ 的描述假定了输出 y 在任何时刻都取决于当前输入 x 的取值而不是以前或者将来 x 的取值。所以，这个技术可以应用于那些无记忆单元(也就是说非电感或电容元件)的设备；然而，正如我们在前面的例子中所见，这个设备可能是非线性的。

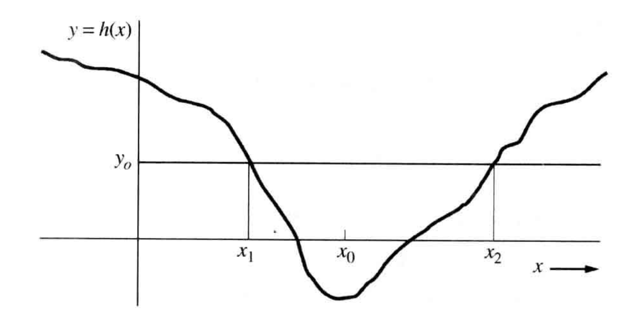


图 B.11　函数 $h(x)$ 对 $x < x_0$ 单调递减，而对 $x > x_0$ 单调递增的例子

B.9　多变量统计

在 B.3 节中定义了简单概率、事件、联合概率及条件概率。在 B.4 节和 B.5 节中，应用简单事件的概率，我们提出了 PDF 和 CDF 的概念。这些 PDF 和 CDF 只涉及一个变量，所以是一维的问题。类似地，矩只涉及一维积分。

在本节中，我们将提出多维问题，也叫多变量统计。这些涉及到与相关事件和条件概率有

联系的 PDF 和 CDF。另外，我们还将得到 B.6 节中研究过的一维矩的扩展的多维矩。如果读者清楚地理解一维的情况(在前面章节中提出的)，那么再把这些结果推广到 N 维的情况时，就不会有太多困难了。

B.9.1 多变量的 PDF 和 CDF

定义 N 维的 CDF 是

$$F(a_1,a_2,\cdots,a_N) = P[(x_1 \leqslant a_1)(x_2 \leqslant a_2)\cdots(x_N \leqslant a_N)]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n_{(x_1\leqslant a_1)(x_2\leqslant a_2)\cdots(x_N\leqslant a_N)}}{n}\right] \tag{B.81}$$

其中，$(x_1 \leqslant a_1)(x_2 \leqslant a_2)\cdots(x_N \leqslant a_N)$ 是由与 $x_1 \leqslant a_1$，$x_2 \leqslant a_2$ 等相关事件所组成的交集事件。

定义 N 维的 PDF 是

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_N) = \left.\frac{\partial^N F(a_1,\,a_2,\,\cdots,\,a_N)}{\partial a_1 \partial a_2\cdots\partial a_N}\right|_{\mathbf{a}=\mathbf{x}} \tag{B.82}$$

其中，$\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{x}$ 是行向量，$\mathbf{a} = (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N)$ 且 $\mathbf{x} = f(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_N)$。

定义 $y = h(\mathbf{x})$ 的期望值是

$$\overline{[y]} = \overline{h(x_1,x_2,\ldots,x_N)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} h(x_1,x_2,\ldots,x_N) \times f(x_1,x_2,\ldots,x_N)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_N \tag{B.83}$$

N 维随机变量的一些性质为

1. $f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N) \geqslant 0$ (B.84a)
2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_N = 1$ (B.84b)
3. $F(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_N) = \lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\int_{-\infty}^{a_1+\varepsilon}\int_{-\infty}^{a_2+\varepsilon}\cdots\int_{-\infty}^{a_N+\varepsilon} f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_N$ (B.84c)
4. $F(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_N) \equiv 0$，如果任意 $a_i = -\infty$，$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ N$ (B.84d)
5. $F(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_N) = 1$，当所有的 $a_i = +\infty$，$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ N$ 时 (B.84e)
6. $P[(a_1 < x_1 \leqslant b_1)(a_2 < x_2 \leqslant b_2)\cdots(a_N < x_N \leqslant b_N)]$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\int_{a_1+\varepsilon}^{b_1+\varepsilon}\int_{a_2+\varepsilon}^{b_2+\varepsilon}\cdots\int_{a_N+\varepsilon}^{b_N+\varepsilon} f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_N \tag{B.84f}$$

多维 PDF 和 CDF 的定义和性质是基于 B.3 节中讨论过的联合概率的概念。类似地，可得到条件 PDF 和 CDF[Papoulis, 1984]。应用式(B.8)的性质 $P(AB) = P(A)P(B\mid A)$，我们得到 x_1 和 x_2 的联合 PDF 是

$$f(x_1,x_2) = f(x_1)f(x_2|x_1) \tag{B.85}$$

其中，$f(x_2 \mid x_1)$ 是给定 x_1 时 x_2 的条件 PDF。更一般地，我们得到：

$$f(x_1,\,x_2|x_3) = f(x_1|x_3)f(x_2|x_1,x_3) \tag{B.86}$$

许多关于多维 PDF 之间关系的其他表达式也应该显而易见。当 x_1 和 x_2 相互独立时，$f(x_2 \mid x_1) = f_{x_2}(x_2)$，并且

$$f_x(x_1, x_2) = f_{x_1}(x_1) f_{x_2}(x_2) \tag{B.87}$$

这里下标 x_1 表示与 x_1 相关的 PDF，下标 x_2 表示与 x_2 相关的 PDF。对于 N 个独立的随机变量，有

$$f_x(x_1, x_2, \cdots, x_N) = f_{x_1}(x_1) f_{x_2}(x_2) \cdots f_{x_N}(x_N) \tag{B.88}$$

定理　如果 x 的 N 维 PDF 已知，那么在 $L < N$ 时，可以得到 x 的 L 维 PDF：

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_L) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{N-L\text{次积分}} f(x_1, x_2, \cdots, x_N)\,\mathrm{d}x_{L+1}\,\mathrm{d}x_{L+2}\cdots\mathrm{d}x_N \tag{B.89}$$

这个 L 维的 PDF，其中 $L < N$，有时被称为边缘 PDF，因为它是从一个更高维（N 维）的 PDF 得到的。

证明　首先证明当 $N = 2$ 且 $L = 1$ 时，该结果是正确的：

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1) f(x_2|x_1)\,\mathrm{d}x_2 \\ &= f(x_1)\int_{-\infty}^{\infty} f(x_2|x_1)\,\mathrm{d}x_2 = f(x_1)\end{aligned} \tag{B.90}$$

因为在 $f(x_2 \mid x_1)$ 下的面积为 1。该过程可以很容易推广至证明式(B.89)的 L 维的情形。

B.9.2　双变量统计特性

二维（或联合）分布是 $N = 2$ 维的情况。在本节中，前一节中的定义将会被用于计算二维矩。如第 6 章中所述，二维统计量在解决电子工程的问题中有很重要的用途，所以我们还要学习一些其他概念。

定义　x_1 和 x_2 的相关函数（或联合均值）为

$$m_{12} = \overline{x_1 x_2} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \tag{B.91}$$

定义　两个随机变量 x_1 和 x_2 是不相关的，如果

$$m_{12} = \overline{x_1 x_2} = \overline{x_1}\;\overline{x_2} = m_1 m_2 \tag{B.92}$$

如果 x_1 和 x_2 是独立的，它们必然不相关，但是反过来不一定正确。然而，我们将看到，对于二维高斯随机变量而言这一点将成立。

定义　如果满足以下条件，则两个随机变量是正交的：

$$m_{12} = \overline{x_1 x_2} \equiv 0 \tag{B.93}$$

注意，正交随机变量的定义和式(2.73)的正交函数的相似性。

定义　协方差为

$$\begin{aligned}u_{11} &= \overline{(x_1 - m_1)(x_2 - m_2)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1 - m_1)(x_2 - m_2) f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\end{aligned} \tag{B.94}$$

显然，如果 x_1 和 x_2 是独立的，协方差为0(并且 x_1 和 x_2 不相关)。反过来不一定成立，但是对于二维高斯随机变量是成立的。

定义 相关系数为

$$\rho = \frac{u_{11}}{\sigma_1\sigma_2} = \frac{\overline{(x_1 - m_1)(x_2 - m_2)}}{\sqrt{\overline{(x_1 - m_1)^2}}\sqrt{\overline{(x_2 - m_2)^2}}} \tag{B.95}$$

这也被称为归一化协方差。相关系数的范围总是

$$-1 \leqslant \rho \leqslant +1 \tag{B.96}$$

例如，假设 $x_1 = x_2$，则 $\rho = +1$。若 $x_1 = -x_2$，则 $\rho = -1$；若 x_1 和 x_2 是独立的，则 $\rho = 0$。所以相关系数表示了 x_1 的值与 x_2 的值相似的程度。在第6章中这一论题得到了详细的讨论，并将结果推广到随机过程(时间函数)中。将波形在某一时刻的值与波形在另一时刻的值进行比较。这将引入频率响应的概念。

B.9.3 二维高斯分布

二维高斯分布是具有很重要意义的联合($N = 2$)分布的一个很好的例子。二维高斯分布的PDF是

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e} - \frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1 - m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x_1 - m_1)(x_2 - m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2 - m_2)^2}{\sigma_2^2}\right] \tag{B.97}$$

其中，σ_1^2 是 x_1 的方差，σ_2^2 是的 x_2 方差，m_1 是 x_1 的均值，m_2 是 x_2 的均值。验证式(B.97)，我们看到，如果 $\rho = 0$，那么 $f(x_1, x_2) = f(x_1)f(x_2)$，其中 $f(x_1)$ 和 $f(x_2)$ 是 x_1 和 x_2 的一维PDF。因此，如果二维高斯随机变量是不相关的(这意味着 $\rho = 0$)，则它们是独立的。

图B.12所示为二维高斯概率密度函数。

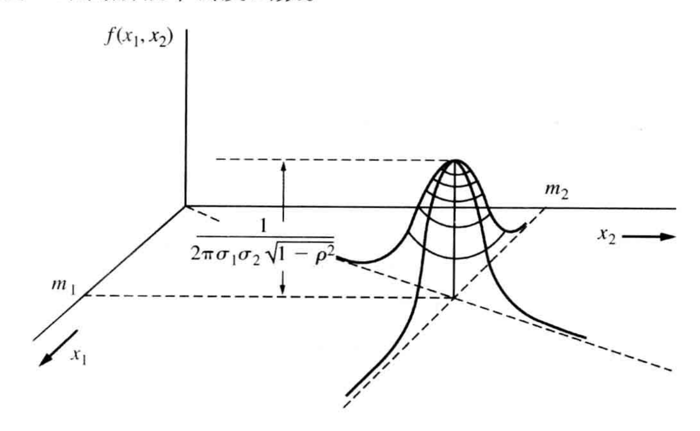


图 B.12 二维高斯分布的PDF

B.9.4 多维函数变换

现在将B.8节的内容推广到多维的情形。参考图B.13，我们根据 x 的概率密度函数 $f_x(x)$ 得到 y 的概率密度函数 $f_y(y)$。

定理 令 $y = h(x)$ 为某个输入设备(无记忆)的转移特性，该设备有 N 个输入，记为 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_N)$；$N$ 个输出，记为 $y = (y_1, y_2, \cdots, y_N)$，并且 $y_i = h_i(x)$，即

$$\begin{aligned} y_1 &= h_1(x_1, x_2, \ldots, x_N) \\ y_2 &= h_2(x_1, x_2, \ldots, x_N) \\ &\vdots \\ y_N &= h_N(x_1, x_2, \ldots, x_N) \end{aligned} \tag{B.98}$$

此外，令 $\mathbf{x}_i, i = 1, 2, \cdots, M$ 表示式 $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$ 的实根(矢量)，则输出的概率密度函数为

$$f_y(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{M} \frac{f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})}{|J(\mathbf{y}/\mathbf{x})|}\bigg|_{\mathbf{x} = \mathbf{x}_i = \mathbf{h}_i^{-1}(\mathbf{y})} \tag{B.99}$$

其中，$|\cdot|$ 表示绝对值运算，$J(\mathbf{y}/\mathbf{x})$ 表示由 $\mathbf{x}$ 到 $\mathbf{y}$ 的雅克比(Jacobian)变换。雅克比变换定义为

$$J\left(\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}}\right) = \mathrm{Det}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial h_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial h_1(\mathbf{x})}{\partial x_N} \\ \dfrac{\partial h_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial h_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial h_2(\mathbf{x})}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial h_N(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial h_N(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial h_N(\mathbf{x})}{\partial x_N} \end{bmatrix} \tag{B.100}$$

其中，Det[·] 表示矩阵 [·] 的行列式。

这里并不证明该定理，但是很明显这是对 B.8 节中研究的一维情况的推广。坐标变换将一个坐标系统的微分与另外一个坐标系统联系起来[Thomas，1969]：

$$\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2 \cdots \mathrm{d}y_N = J\left(\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}}\right)\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_N \tag{B.101}$$

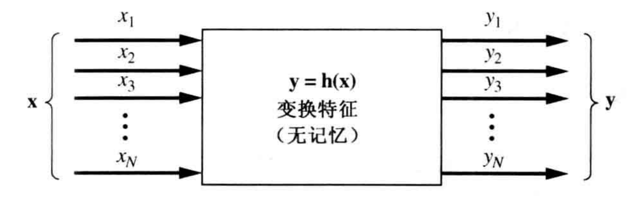


图 B.13　随机变量的多变量函数变换

例题 B.11　两个随机变量和的概率密度函数

假设有一个电路配置(比如一个运算放大器)对两个输入 x_1 与 x_2 求和，得到输出：

$$y = A(x_1 + x_2) \tag{B.102}$$

其中，A 是电路增益。假设 $f(x_1, x_2)$ 已知，并且我们希望根据输入的联合 PDF 得到输出的 PDF 的公式。

我们可以用式(B.99)所描述的定理来解决这一问题。然而，对于两个输入，必须得到两个输出才能满足定理的假设条件。我们需要再定义一个辅助变量 y_2，因而有

$$y_1 = h_1(\mathbf{x}) = A(x_1 + x_2) \tag{B.103}$$

$$y_2 = h_2(\mathbf{x}) = Ax_1 \tag{B.104}$$

含有辅助变量的式(B.104)是无形的，只要它是一个独立的公式，就可使行列式 $J(\mathbf{y}/\mathbf{x})$ 不为零。然而，这个公式常被用来简化数学过程。应用式(B.103)和式(B.104)，得到：

$$J = \mathrm{Det}\begin{bmatrix} A & A \\ A & 0 \end{bmatrix} = -A^2 \tag{B.105}$$

将其代入式(B.99),得到:

$$f_{\mathbf{y}}(y_1, y_2) = \left.\frac{f_x(x_1, x_2)}{|-A^2|}\right|_{x=h^{-1}(\mathbf{y})}$$

或

$$f_{\mathbf{y}}(y_1, y_2) = \frac{1}{A^2} f_x\left(\frac{y_2}{A}, \frac{1}{A}(y_1 - y_2)\right) \tag{B.106}$$

我们想要求得$f_{y_1}(y_1)$的公式,因为$y_1 = A(x_1 + x_2)$。这可以通过式(B.106)的边缘PDF的计算得到:

$$f_{y_1}(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{y}}(y_1, y_2)\mathrm{d}y_2$$

或

$$f_{y_1}(y_1) = \frac{1}{A^2}\int_{-\infty}^{\infty} f_x\left(\frac{y_2}{A}, \frac{1}{A}(y_1 - y_2)\right)\mathrm{d}y_2 \tag{B.107}$$

该通用结论将$y = y_1$的PDF与x的联合PDF联系起来,其中$y = A(x_1 + x_2)$。如果x_1和x_2相互独立,并且$A = 1$,则式(B.107)变为

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x_1}(\lambda) f_{x_2}(y - \lambda)\mathrm{d}\lambda$$

或

$$f(y) = f_{x_1}(y) * f_{x_2}(y) \tag{B.108}$$

其中,* 表示卷积运算。类似地,如果我们将N个随机变量求和,则和的PDF是N个一维随机变量PDF的$N-1$次卷积的结果。

B.9.5 中心极限定理

如果将大量具有任意一维PDF的独立随机变量求和,那么中心极限定理表明这些独立随机变量之和的PDF在大多数情况下接近高斯(正态)分布。严格地说,如果这些独立随机变量是离散分布的,则该定理不成立。在这种情况下,和的PDF将由冲激函数构成(非高斯分布,是连续的);然而,如果Delta函数被“污染了”(比如,Delta函数由具有相应面积的方波函数所替代),则产生的PDF将近似于高斯分布。无论如何,和的累积分布函数(CDF)将近似于高斯的CDF。

中心极限定理可由下例说明。

例题B.12 三个独立均匀分布的随机变量之和的PDF

中心极限定理将通过计算三个独立同分布的随机变量之和的PDF来证明。这个精确结果将与由中心极限定理所得到的高斯PDF进行比较。

令各个独立随机变量x_i具有均匀分布,如图B.14(a)所示。$y_1 = x_1 + x_2$的PDF数记为$f(y_1)$,可由式(B.108)及图2.7所示的卷积计算得到。结果示于图B.14(b)中。可以看到,仅经过一次卷积计算,和的(三角形的)PDF已趋向于高斯分布。$y_2 = x_1 + x_2 + x_3$的PDF$f(y_2)$由三角形的PDF和另一个均匀的PDF进行卷积得到,结果是

$$f(y_2)=\begin{cases}0, & y_2\leqslant -\dfrac{3}{2}A\\ \dfrac{1}{2A^3}\left(\dfrac{3}{2}A+y_2\right)^2, & -\dfrac{3}{2}A\leqslant y_2\leqslant -\dfrac{1}{2}A\\ \dfrac{1}{2A^3}\left(\dfrac{3}{2}A^2-2y_2^2\right), & |y_2|\leqslant \dfrac{1}{2}A\\ \dfrac{1}{2A^3}\left(\dfrac{3}{2}A-y_2\right), & \dfrac{1}{2}A\leqslant y_2\leqslant \dfrac{3}{2}A\\ 0, & y_2\geqslant \dfrac{3}{2}A\end{cases}\tag{B.109}$$

该曲线由图 B.14(c)中的实线表示。为了比较，相应的高斯曲线用虚线表示，其中 $1/(\sqrt{2\pi}\sigma)=3/(4A)$。从图中可以看到，对于 $|y_2|<\dfrac{3}{2}A$，$f(y_2)$ 十分接近高斯曲线，这与中心极限定理预见的结果一致。当然，对于 $|y_2|>\dfrac{3}{2}A$，$f(y_2)$ 肯定不是高斯的，因为这种情况下 $f(y_2)\equiv 0$，而高斯曲线除了 $y=\pm\infty$ 处以外皆不为 0。因而，我们发现近似的高斯分布(如中心极限定理所预见的)在尾部并不十分精确。在第 7 章中，已经证明数字系统的误比特率是通过计算分布尾部下面的面积得到的。如果分布并不是高斯的，并且用中心极限定理和高斯 PDF 来近似该分布的话，那么结果常常是不精确的，正如此例所示。然而，如果分布曲线下的面积接近均值，则高斯近似将十分精确。

对于选定 A 值的图 B.14(c)所示的曲线，参见 M 文件 ExampleB_12.m。

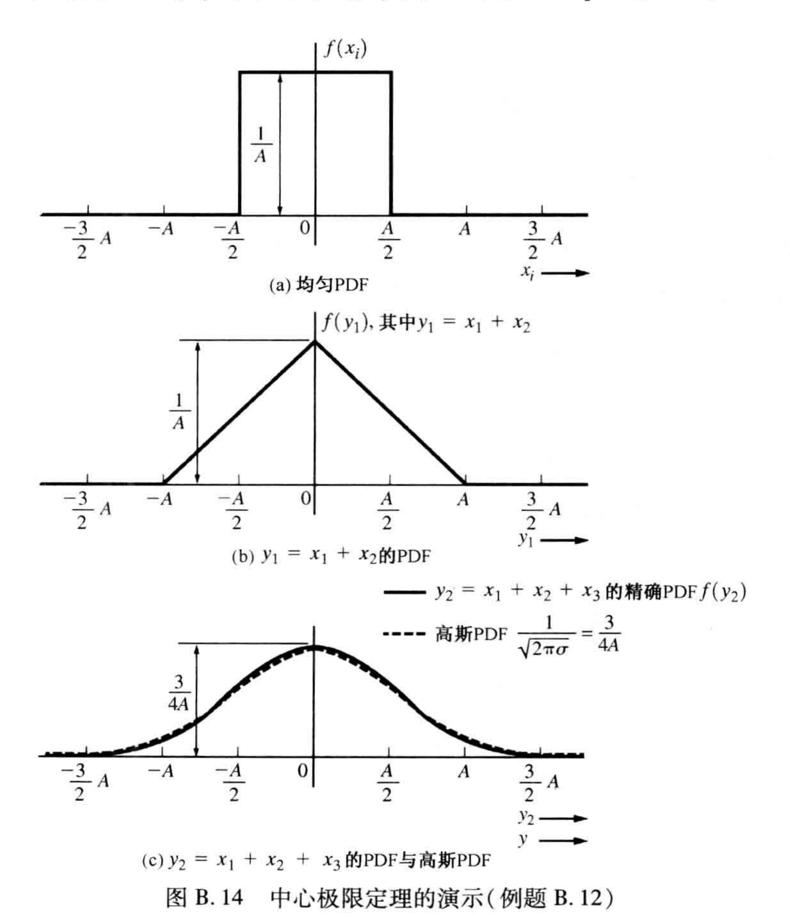


图 B.14 中心极限定理的演示(例题 B.12)

习题

★B.1 某二进制长消息包含1428个二进制1和2668个二进制0，问接收到的比特中获得一个二进制1的概率是多少？

★B.2 (a) 掷两个骰子得8的概率为多少？

(b) 掷两个骰子得5、7或8的概率为多少？

B.3 证明

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

★B.4 掷出一个骰子，得到任一面的概率为 $P(x)=\frac{1}{6}$，其中 $x=k=1,2,3,4,5$ 或6。求出得到一奇数面的概率。

★B.5 对于习题B.4中的掷骰子，求出一次投掷获得偶数面时结果为4的概率。

B.6 下列哪些函数满足PDF的特性？为什么？

(a) $f(x)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$

(b) $f(x)=\begin{cases}|x|, & |x|<1\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$

(c) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{6}(8-x), & 4\leqslant x\leqslant 10\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$

(d) $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^k\delta(xk)$

B.7 证明所有累积分布函数必须满足B.5节中给出的特性。

B.8 令 $f(x)=Ke^{-b|x|}$，其中 K 和 b 是正常数。求出其CDF的数学表达式并把结果用草图画出来。

★B.9 对图B.14(b)所示的三角分布，求出 $-\frac{1}{4}A\leqslant y_1\leqslant\frac{1}{4}A$ 的概率。

B.10 某三角PDF如图B.14(b)所示。

(a) 求出描述CDF的数学表达式。

(b) 绘出CDF。

B.11 求出图PB.11所示两种波形的PDF。

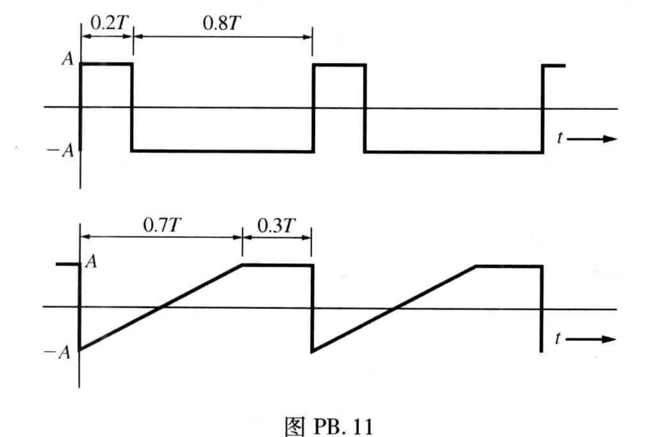


图 PB.11

★B.12　令 PDF 为 $f(x) = Ke^{-bx}$，$x \geqslant 0$，且 $f(x) = 0$，$x \leqslant 0$，其中 K 和 b 是正常数。

(a) 求出以 b 表示的 K 值。

(b) 求出以 b 表示的 m 值。

(c) 求出以 b 表示的 σ^2 值。

B.13　某随机变量 x 具有 PDF：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{32}(-x^2 + 8x - 12), & 2 < x < 6 \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

(a) 证明 $f(x)$ 是有效的 PDF。

(b) 求出平均值。

(c) 求出二阶矩。

(d) 求出方差。

B.14　求出图 B.14(b) 所示三角分布的标准差。

B.15　(a) 求出 $n = 7$，$p = 0.5$ 的二项式分布的表达式。

(b) 作出该二项式分布的 PDF 草图。

(c) 求出该二项式分布的 CDF 并作草图。

(d) 求出该分布的 $\overline{x^3}$。

B.16　对二项分布，证明 $\sigma^2 = np(1-p)$。

★B.17　某二项式随机变量 x_k 的取值为 k，其中，

$$k = 0,1,\ldots,n; \quad P(k) = \binom{n}{k}p^k q^{n-k}; \quad q = 1 - p$$

假设 $n = 160$，并且 $p = 0.1$。

(a) 绘出 $P(k)$。

(b) 比较(a)中的图与用高斯近似作出的图 $P(k)$，该高斯近似为

$$\binom{n}{k}p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(k-m)^2/2\sigma^2}$$

当 $npq \geqslant 1$ 并且 $|k - np|$ 位于 $\sqrt{npq}$ 的领域中时成立，其中 $\sigma = \sqrt{npq}$，并且 $m = np$。

(c) 作出泊松近似图：

$$\binom{n}{k}p^k q^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

其中，$\lambda = np$，n 较大，p 较小。

B.18　收到 $n = 3000$ 个晶体管，每个晶体管是次品的概率为 $p = 0.001$，求出这一批晶体管中有 6 个或更少的次品的概率(注意：泊松近似在 n 大、p 小时有效)。

B.19　在光纤通信系统中，光子的发射服从泊松分布，如表 B.1 所示。$m = \lambda$ 是在任一时间间隔内发射的平均光子数，$P(k)$ 是在同一时间间隔发射 k 个光子的概率。

(a) 对 $\lambda = 0.5$ 作出 PDF 图。

(b) 对 $\lambda = 0.5$ 作出 CDF 图。

(c) 证明 $m = \lambda$。

(d) 证明 $\sigma = \sqrt{\lambda}$。

B.20　设 x 是服从拉普拉斯分布的随机变量，拉普拉斯 PDF 为 $f(x) = (1/2b)e^{-|x-m|/b}$，其中 b 和 m 是实常数，且 $b > 0$。

(a) 求出 x 的均值，用 b 和 m 表达。

(b) 求出 x 的方差，用 b 和 m 表达。

B.21　参考你对习题 B.20 的解，使用 MATLAB 绘出 $m = 15$ 且 $\sigma = 5$ 时的拉普拉斯 PDF。

B.22 给定高斯 PDF:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta} e^{-(x-m)^2/(2\beta^2)}$$

证明该分布的方差为β^2。

★B.23 在电阻的生产过程中,所得的电阻值服从均值为目标电阻值的高斯分布。如果想要生产出的95%的1 kΩ电阻具有±10%的容忍度,则所需的σ值为多少?

B.24 假定x服从高斯分布,求下列概率:

(a) $|x-m| < \sigma$。

(b) $|x-m| < 2\sigma$。

(c) $|x-m| < 3\sigma$。

如有需要,请用 MATLAB 或者表格求数值结果。

B.25 证明:

(a) $Q(z) = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)$。

(b) $Q(-z) = 1 - Q(z)$。

(c) $Q(z) = \frac{1}{2}\left[1 - \text{erfc}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\right]$。

B.26 使用 MATLAB,绘制式(B.60)和习题 B.25 定义的$Q(z)$。

B.27 对高斯分布,证明:

(a) $F(a) = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{m-a}{\sqrt{2}\sigma}\right)$。

(b) $F(a) = \frac{1}{2}\left[1 + \text{erfc}\left(\frac{a-m}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right]$。

B.28 使用 MATLAB,绘制$m = 10$且$\sigma = 2$时高斯随机变量的 CDF。

B.29 某噪声电压服从高斯分布。RMS 值为5 V, DC 值为1.0 V,求该电压值在−5 V与+5 V之间的概率。

★B.30 假定x是$m = 5$且$\sigma = 0.6$的高斯随机变量。

(a) 求取$x \leqslant 1$的概率。

(b) 求取$x \leqslant 6$的概率。

B.31 高斯随机变量x的均值为零,方差为2。令A为$|x| < 3$的事件。

(a) 求条件 PDF $f(x|A)$的表达式。

(b) 在$|x| < 5$的范围内画出$f(x|A)$。

(c) 在$|x| < 5$的范围内画出$f(x)$,并比较这两幅图。

B.32 令x服从正弦分布,其 PDF 由式(B.67)给出。证明 CDF 为

$$F(a) = \begin{cases} 0, & a \leqslant -A \\ \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{a}{A}\right)\right], & |a| \leqslant A \\ 1, & a \geqslant A \end{cases}$$

B.33 (a) 若x服从正弦分布,其峰值为A,证明 RMS 值为$\sigma = A/\sqrt{2}$[提示:利用式(B.67)]。

(b) 若$x = A\cos\psi$,其中ψ在$-\pi \sim \pi$间均匀分布,证明x的 RMS 值为$\sigma = A/\sqrt{2}$。

★B.34 设$y = x^2$,并且x是均值为m、方差为σ^2的高斯随机变量,试求y的 PDF 式,以m和σ^2表示。

B.35 x是在$-1 \leqslant x \leqslant 1$范围内服从均匀分布的随机变量,并且在$x = \frac{1}{2}$处有一个$P\left(x = \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$的离散点。

(a) 求 x 的 PFD 数学表达式，并作图画出你的结果。

(b) 求 y 的 PDF，其中，

$$y=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

绘出你的结果。

B.36 某饱和放大器的模型为

$$y=\begin{cases}Ax_0, & x>x_0\\ Ax, & |x|\leqslant x_0\\ -Ax_0, & x<-x_0\end{cases}$$

假定 x 是均值为 m、方差为 σ^2 的高斯随机变量，寻找以 A，x_0，m 与 σ^2 表示的 y 的 PDF 式。

B.37 使用 MATLAB 和你对习题 B.36 的解，绘制出高斯输入，且 $x_0=5$、$A=10$、$m=2$ 以及 $\sigma=1.5$ 的饱和放大器输出的 PDF

★B.38 某量化器的输入为一峰值为 8 V 的正弦信号。量化器的特性见图 3.8(a)。试求输出的 PDF 并作图。

B.39 某全波整流器电路的输入为服从高斯分布的电压波形，该全波整流器由 $y(t)=|x(t)|$ 描述，其中，$x(t)$ 是输入，$y(t)$ 是输出。输入波形具有 1 V 的直流分量，RMS 值为 2 V。

(a) 绘制输入波形的 PDF 图。

(b) 绘制输出波形的 PDF 图。

★B.40 参考例题 B.10 和式(B.75)，它们描述了理想二极管(半波整流器)输出的 PDF。求输出的均值(直流分量)。

B.41 给出联合密度函数为

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}e^{-(1/2)(4x_1+x_2)}, & x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

(a) 证明 $f(x_1, x_2)$ 是密度函数。

(b) 证明 x_1 和 x_2 是独立或非独立的。

(c) 计算 $P(1\leqslant x_1\leqslant 2, x_2\leqslant 4)$。

(d) 求 ρ。

★B.42 某联合密度函数为

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}K(x_1+x_1x_2), & 0\leqslant x_1\leqslant 1, \quad 0\leqslant x_2\leqslant 4\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

(a) 求 K。

(b) 判断 x_1 和 x_2 是否独立。

(c) 求 $F_{x_1x_2}(0.5, 2)$。

(d) 求 $F_{x_2|x_1}(x_2 \mid x_1)$。

B.43 令 $y=x_1+x_2$，其中 x_1 和 x_2 是非相关的随机变量。证明：

(a) $\overline{y}=m_1+m_2$，其中 $m_1=\overline{x_1}$ 且 $m_2=\overline{x_2}$。

(b) $\sigma_y^2=\sigma_1^2+\sigma_2^2$，其中 $\sigma_1^2=\overline{(x_1-m_1)^2}$ 且 $\sigma_2^2=\overline{(x_2-m_2)^2}$。

[提示：采用与式(B.29)证明中所采用的相类似的集合操作符。]

B.44 令 $x_1=\cos\theta$ 且 $x_2=\sin\theta$，其中 θ 在区间 $(0, 2\pi)$ 上均匀分布，证明：

(a) x_1 和 x_2 是非相关的。

(b) x_1 和 x_2 不是独立的。

★B.45 随机变量 x_1 和 x_2 服从联合高斯分布。联合 PDF 由式(B.97)描述，其中，$m_1=m_2=0$，$\sigma_{x_1}=\sigma_{x_2}=1$，并且 $\rho=0.5$。在 $|x_1|<0.5$ 和 $x_2=0$ 的范围内画出 $f(x_1, x_2)$ 的曲线。同时，在 $|x_1|<5$ 和 $x_2=0.4$、0.8、1.2 以及 1.6 的范围内画出 $f(x_1, x_2)$ 的曲线。

B.46　证明一个二维高斯变量 PDF 的边缘 PDF 是一维高斯 PDF，即计算

$$f(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_2$$

其中，$f(x_1, x_2)$ 由式(B.97)给出。[提示：将一些包含 x_1（但不包含 x_2）的项放到积分之外。在剩余积分的指数上完成平方，以得到高斯 PDF 形式。利用标准高斯 PDF 的积分是 1 这一特性。]

B.47　接收机的输入由二进制信号与噪声组成。也就是说，假定输入 y 为 $y = x + n$，其中 x 是数值为 $\pm A$ V 的等概率发生的二进制数据。令 n 表示独立的高斯随机噪声，其均值为 m、标准差为 σ。求出作为 A、m 和 σ 函数的 y 的 PDF。

B.48　参考习题 B.47 的解，并利用 MATLAB，绘制 y 的 PDF，其中 $A = 12$、$m = 2$，并且 $\sigma = 4$。

B.49　参考习题 B.47 的解，并利用 MATLAB，计算接收机输入电压位于 10 ~ 14 V 之间的概率，其中 $A = 12$、$m = 2$，并且 $\sigma = 4$。

B.50　(a) $y = A_1x_1 + A_2x_2$，其中 A_1 和 A_2 是常数，并且 x_1 和 x_2 的联合 PDF 为 $f_x(x_1, x_2)$。试以 x 的(联合)PDF 来表示 y 的 PDF。

(b) 若 x_1 与 x_2 独立，如何能够简化这个公式?

B.51　两个独立随机变量 x 和 y，具有 PDF $f(x) = 5e^{-5x}u(x)$ 和 $f(y) = 2e^{-2y}u(y)$。作出 w 的 PDF 曲线，其中 $w = x + y$。

★B.52　两个高斯随机变量 x_1 与 x_2 的均值向量为 $\mathbf{m}_x$，协方差矩阵为 $\mathbf{C}_x$。两个新的随机变量 y_1 和 y_2 由线性变换 $\mathbf{y} = \mathbf{Tx}$ 产生。

$$\mathbf{m}_x = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_x = \begin{bmatrix} 5 & -2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) 求用 $\mathbf{m}_y$ 表示的 $\mathbf{y}$ 的均值。

(b) 求用 $\mathbf{C}_y$ 表示的 $\mathbf{y}$ 的方差。

(c) 求 y_1 和 y_2 的相关系数(提示：参考 6.6 节)。

B.53　三个高斯随机变量 x_1、x_2 和 x_3 具有零均值。通过线性变换 $\mathbf{y} = \mathbf{Tx}$ 得到三个新的随机变量 y_1、y_2 和 y_3，其中，

$$C_x = \begin{bmatrix} 6.0 & 2.3 & 1.5 \\ 2.3 & 6.0 & 2.3 \\ 1.5 & 2.3 & 6.0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) 求用 $\mathbf{C}_y$ 表示的 $\mathbf{y}$ 的协方差矩阵。

(b) 写出概率密度函数 $f(y_1, y_2, y_3)$ 的表达式(提示：见 6.6 节)。

★B.54　(a) 求 $y = Ax_1x_2$ 的 PDF 公式，其中 x_1 与 x_2 是具有联合概率密度函数 $f_x(x_1, x_2)$ 的随机变量。

(b) 如果 x_1 与 x_2 相互独立，把从(a)中得到的结果化简为一个更加简单的形式。

B.55　$y_2 = x_1 + x_2 + x_3$，其中 x_1、x_2 和 x_3 是互相独立的随机变量。每个 x_i 都有在 $-(A/2) \leqslant x_i \leqslant (A/2)$ 均匀分布的一维 PDF。证明 y_2 的 PDF 由式(B.109)给出。

★B.56　通过使用 MATLAB 内在的随机数发生器来验证中心极限定理，即

(a) 计算随机变量 y 的样本，其中 $y = \Sigma x_i$ 并且 x_i 来自随机数发生器。

(b) 应用 MATLAB 中的直方图函数画出 y 的 PDF。

附录 C　MATLAB 的使用

MATLAB 是使用个人计算机(PC)分析和设计通信系统的一种非常有用的工具，它广泛应用于工科课程以及产业界，用于系统设计和仿真。

MATLAB 是 MathWorks 公司的产品，是 Matrix Laboratory 的缩写。它将所有的常数和变量都视为矩阵、行向量或者列向量。因而，MATLAB 中默认的运算是矩阵运算。例如，$a*b$ 是 a 和 b 的矩阵乘积。这意味着 MATLAB 程序代码非常简洁。复杂的运算可以用非常少的几行没有"do"循环的代码来描述，其结果可以用 PC 有效地计算。然而，这可能使得代码难以理解，尽管它非常紧凑并且计算起来非常有效。在使用矩阵和矢量的同时也允许强有力的图形功能。

在 MATLAB 的程序中，将采纳"保持代码简单"的概念。这意味着在代码之中可能出现循环，以使代码便于理解，尽管可以使用一种运行更快且更为紧凑的代码。我们的目标是将 MATLAB 作为一种使通信系统易于理解的工具。

当然，为了运行本书中的 MATLAB M 文件，需要在你的计算机上按照 MathWorks 的指引安装 MATLAB。如果在安装的过程中没有安装快捷图标，那么在你的桌面上就要安装 MATLAB 的快捷图标。

在本附录中给出的议及本书中的 M 文件，都是使用 MATLAB v. 7. 11 R2010b 开发的，并进行了验证。

C.1　关于 MATLAB M 文件

1. 从网站 http://lcouch. us 或者 http://www. couch. ece. ufl. edu 下载针对本书的 MATLAB 文件。
2. 你需要解压缩下载文件。也就是说，从下载的 zip 文件中提取 M 文件集合。
3. Examplex_xx. m 文件是针对在各章出现的例题的解决方案，Sax_xx. m 文件是针对各章末尾出现的助学例题的解决方案。Px_xx. m 文件是标记有★号与计算机符号的章节末尾习题的解决方案。学生题解手册中有所有标记为★的问题的解决方案，因而你可能想参考这个手册以研究 Px_xx. m 文件中使用的公式是如何得到的。也有在 Examplex_xx. m、Sax_xx. m 与 Px_xx. m 文件中使用的，但由其他 M 文件定义的函数。因而，所有的 M 文件必须被放到相同的文件夹中，以使一个文件在调用另一个文件而使用到相关函数时，能够找到它。
4. M 文件是一组存放在纯文本文件中的 MATLAB 指令，这些文件的文件名以. m 的扩展为结尾。它们也称为脚本文件，并且可以使用 ASCII 编辑器编辑，例如 Notepad，但是内置的 MATLAB 编辑器集成在 MATLAB 中，因而更容易使用。

C.2　快速开始运行 M 文件

1. 点击桌面上的 MATLAB 图标。
2. 将出现默认的 MATLAB 窗口(除非你先前把默认设置改为另一个选项)。注意，默认窗

口左下角的开始图标，这将允许你选择 Toolboxes、Simulink、Demos 等操作。Toolboxes 与 Simulink 没有被本书中任何 M 文件使用，因为我们对学习如何创造基本的 M 文件感兴趣，这些文件将被用于解决通信系统中的例题和问题。

3. 点击位于默认 MATLAB 窗口顶部 File 下的 New Script 图标，将会出现 Editor 窗口(或者在默认窗口，点击 Desktop 下拉菜单并选择 Editor)。
4. 在 Editor 窗口顶部，点击文件夹图标并进入你下载的 M 文件所在的文件夹。选择 Example1_1.m。在 Editor 窗口，将会出现针对 Example1_1.m 文件的代码行。
5. 为了运行这个 MATLAB 文件，点击 Editor 窗口顶部的绿色(运行)箭头。在 Command 窗口中将会出现"printed"(已打印)的输出结果，并且在 Figure 1 窗口中将会出现输出结果的波形图(有时一个窗口出现在另外一个窗口后面，因而需要把前面的窗口移动到一边，以查看隐藏在它后面的窗口)。或者，你可以通过在 Command 窗口中的 MATLAB 提示符，输入文件名来运行 M 文件(不需要.m 文件扩展名)。
6. 在点击 Enter 键时，你输入到 Command 窗口的指令被立即执行。你输入到 Editor 窗口的指令，以及其他 Editor 窗口中的指令，将在你点击绿色箭头时被执行。

C.3 MATLAB 编程

有许多帮助你编写 MATLAB 脚本文件代码的资源，第一个就是内置的 MATLAB 帮助。点击 Command 窗口命令提示符行的 fx 图标来浏览 MATLAB 函数的描述。通过点击默认窗口顶部的 Help 以得到下拉帮助资源列表，可以获得更加全面的帮助。也可以从 MathWorks 网站 http://www.mathworks.com 获得帮助。

其次，有许多关于 MATLAB 编程的优秀书籍。对于入门者而言，最好的书籍之一是 MATLAB Primer [Davis, 2011]。这是一本袖珍型的书，总篇幅大约 230 页，它简明地描述了 MATLAB 编程的基础。它包括一个附录，该附录列举了 MATLAB 前 500 个指令与函数的描述。另外一本优秀的书籍是 Mastering MATLAB 7 [Hanselman 和 Littlefield, 2011]。这是一本平装书，篇幅大概为 850 页，包含 MATLAB 基础到更加高级的主题。基础知识在前几章，读者可以跳到后续章节直接阅读感兴趣的主题。

就像前面指出的那样，MATLAB 使用的基本变量类型是矩阵。可以说这为在 MATLAB 编程中使用到的符号奠定了基础。下面总结了 MATLAB 程序中使用的基本符号。

1. 行向量由逗号或空格分界的列表创建。例如，输入 M1 = [1, 2, 3, 4, 5, 6] 或 M1 = [1 2 3 4 5 6]。这是 6 个元素的行向量或者说是一个 1×6 矩阵(1 行 ×6 列)。
2. 列向量用分号分界的列表创建。例如，M2 = [1; 2; 3; 4; 5; 6] 是一个六元素的列向量或 6×1 矩阵。
3. 输入 M3 = [1 2 3; 4 5 6]。它创建了一个 2×3 矩阵。要看第二行和第三列的元素，只需输入 M3(2, 3)，得到的值为 6。
4. 标量是一个 1×1 矩阵。例如，输入 M4 = 2.5。
5. 输入 M5 = 0.5 + 2j。描述了一个 1×1 矩阵的复数。
6. 冒号运算符被用来检索数组和创建向量元素。此符号的用法是初始值：增量：结束值。例如，输入 t = 1:2:6，则创建行向量 **t** = [1 3 5]。如果增量被删除，默认的增量是 1。例如，u = 1:6 是行向量 **u** = [1 2 3 4 5 6]。冒号还可以像百搭牌一样使用。例

如，在第 3 条中，M3(1, 3) 指第一行和第三列的元素，但是 M3(1, :) 指矩阵 M3 中的第一行的行向量。

7. 一旦变量(也就是矩阵)被定义，它一直在内存中，直到它被清除。换句话说，它的值可以通过键入它的符号获得。例如，在 MATLAB 提示符下输入 M3。
8. 输入 whos。whos 是列出存储在内存中所有变量(也就是矩阵)的 MATLAB 命令。它也显示每个矩阵的大小。
9. MATLAB 区分大小写。换句话说，M3 是不同于 m3 的变量，后者尚未定义。
10. 转置运算符是′。例如，输入 M1′，它是 M1 的转置。
11. 在 MATLAB 命令结尾加上分号是为了禁止该命令计算结果的显示。例如，输入 $y = 6*3$；。计算结果不显示在屏幕上。但是，你可以通过键入 y 显示计算结果。
12. 如果命令由逗号和分号分隔开，则可以在同一行输入多条命令。例如，$A = 1, B = 5$。
13. 常用的基本函数(如三角函数和对数函数)也内建在 MATLAB 中。输入 help elfun 可列出这些函数。要列出特殊函数，如贝塞尔函数，则输入 help specfun。用户自定义函数也可由 M 文件创建；输入 help function 可查看明细。
14. 图 2.21 显示的绘制结果是通过运行表 2.3 中列出的 MATLAB 的 M 文件获得的。函数 plot(t, w)给出了一个波形图，向量 **w** 是时间向量 **t** 的函数，如图 2.21 顶部所示。可以通过使用 subplot 函数在一个窗口显示多个绘图。例如，按 4 行 ×1 列阵列排列的多个绘图可以通过 subplot(4, 1, x)获得，其中 x 是 4 个图的序号。此外，符号 subplot(4, 1, x)可以像表 2.3 所示的那样使用。在另外一个例子中，按照 3 行 ×2 列排列多个绘图可以通过 subplot(3, 2, x)获得，其中 x 是 6 个图的序号。换句话说，subplot(3, 2, 3)是 6 幅图中的第 3 个，第 3 幅图出现在第 2 行第 1 列。
15. % 被用于定义注释语句。一行中% 符号后的所有文本都被编译成注释。

参考文献

ABRAMOWITZ, M., and I. A. STEGUN (Editors), *Handbook of Mathematical Functions*, National Bureau of Standards, Superintendent of Documents, U.S. Government Printing Office, Washington, DC, 1964. Also available in paperback from Dover Publications, New York, 1965.

AMOROSO, F., "The Bandwidth of Digital Data Signals," *IEEE Communications Magazine*, vol. 18, no. 6, November 1980, pp. 13–24.

ANDERSON, R. R., and J. SALZ, "Spectra of Digital FM," *Bell System Technical Journal*, vol. 44, July–August 1965, pp. 1165–1189.

ANDREWS, F. T., "Early T-Carrier History," *IEEE Communications Magazine*, vol. 19, no. 4, April 2011, pp. 12–17.

ANVARI, K., and D. WOO, "Susceptibility of $\pi/4$ DQPSK TDMA Channel to Receiver Impairments," *RF Design*, February 1991, pp. 49–55.

AOYAMA, T., W. R. DAUMER, and G. MODENA (Editors), Special Issue on Voice Coding for Communications, *IEEE Journal on Selected Areas of Communications*, vol. 6, February 1988.

ARRL, *The 2011 ARRL Handbook for Radio Communications*, 88d ed., 2010; *The 1997 ARRL Handbook for Radio Amateurs*, 1996; *The 1992 ARRL Handbook for Radio Amateurs*, 1991, American Radio Relay League, Newington, CT.

AT&T, *FT-2000 OC-48 Lightwave System*, Publication No. AT&T 365-575-100, AT&T Regional Technical Assistance Center (800–432–6600), Holmdel, NJ, December 1994.

BAINES, R., "The DSP Bottleneck," *IEEE Communications Magazine*, vol. 33, May 1995, pp. 46–54.

BALDUINO, P. R. H., "Latin America Goes Wireless via Satellite," *IEEE Communications Magazine*, vol. 33, no. 9, September 1995, pp. 114–122.

BASCH, E. E., and T. G. BROWN, "Introduction to Coherent Optical Fiber Transmission," *IEEE Communications Magazine*, vol. 23, May 1985, pp. 23–30.

BEDROSIAN, E. B., and S. O. RICE, "Distortion and Crosstalk of Linearly Filtered Angle-Modulated Signals," *Proceedings of the IEEE*, vol. 56, January 1968, pp. 2–13.

BELL TELEPHONE LABORATORIES, *Transmission Systems for Communications*, 4th ed., Western Electric Company, Winston-Salem, NC, 1970.

BENDAT, J. S., and A. G. PIERSOL, *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*, Wiley-Interscience, New York, 1971.

BENEDETTO, S., E. BIGLIERI, and V. CASTELLANI, *Digital Transmission Theory*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1987.

BENEDETTO, S., M. MONDIN, and G. MONTORSI, "Performance Evaluation of Trellis-Coded Modulation Schemes," *Proceedings of the IEEE*, vol. 82, no. 6, June 1994, pp. 833–855.

BENEDETTO, S., and G. MONTORSI, "Unveiling Turbo Codes: Some Results on Parallel Concatenated Coding Schemes," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. IT-42, March 1996, pp. 409–428.

BENNETT, W. R., and J. R. DAVEY, *Data Transmission*, McGraw–Hill Book Company, New York, 1965.

BENNETT, W. R., and S. O. RICE, "Spectral Density and Autocorrelation Functions Associated with Binary Frequency Shift Keying," *Bell System Technical Journal*, vol. 42, September 1963, pp. 2355–2385.

BENSON, K. B., and J. C. WHITAKER, *Television Engineering Handbook*, Rev. ed., McGraw–Hill Book Company, New York, 1992.

BERGLAND, G. D., "A Guided Tour of the Fast Fourier Transform," *IEEE Spectrum*, vol. 6, July 1969, pp. 41–52.

BEST, R. E., *Phase-Locked Loops*, 4th ed., McGraw–Hill, Inc., New York, 1999.

BHARGAVA, V. K., "Forward Error Correction Schemes for Digital Communications," *IEEE Communications Magazine*, vol. 21, January 1983, pp. 11–19.

BHARGAVA, V. K., D. HACCOUN, R. MATYAS, and P. P. NUSPL, *Digital Communications by Satellite*, Wiley-Interscience, New York, 1981.

BIC, J. C., D. DUPONTEIL, and J. C. IMBEAUX, *Elements of Digital Communication*, John Wiley & Sons, New York, 1991.

BIGLIERI, E., D. DIVSALAR, P. J. MCLANE, and M. K. SIMON, *Introduction to Trellis-Coded Modulation with Applications*, Macmillan Publishing Company, New York, 1991.

BLACKMAN, R. B., and J. W. TUKEY, *The Measurement of Power Spectra*, Dover, New York, 1958.

BLAHUT, R. E., *Theory and Practice of Error Control Codes*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1983.

BLANCHARD, A., *Phase-Locked Loops*, Wiley-Interscience, New York, 1976.

BOASHASH, B., "Estimating and Interpreting the Instantaneous Frequency of a Signal—Part 1: Fundamentals" and "Part 2: Algorithms and Applications," *Proceedings of the IEEE*, vol. 80, no. 4, April 1992, pp. 520–538 and 540–568.

BÖRJESSON P. O., and C. E. W. SUNDBERG, "Simple Approximations for the Error Function Q(x) for Communication Applications," *IEEE Transactions on Communications*, vol. COM-27, March 1979, pp. 639–643.

BOWRON, P., and F. W. STEPHENSON, *Active Filters for Communications and Instrumentation*, McGraw–Hill Book Company, New York, 1979.

BREMERMANN, H., *Distributions, Complex Variables and Fourier Transforms*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1965.

BRILEY, B. E., *Introduction to Telephone Switching*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1983.

BROADCASTING, *Broadcasting and Cable Yearbook 2006*, R. R. Bowker, New Providence, NJ, 2006.

BUDAGAVI, M., and J. D. GIBSON, "Speech Coding in Mobile Radio Communications," *Proceedings of the IEEE*, vol. 86, no. 7, July 1998, pp. 1402–1412.

BYLANSKI, P., and D. G. W. INGRAM, *Digital Transmission Systems*, Peter Peregrinus Ltd., Herts, England, 1976.

CAMPANELLA, M., U. LOFASO, and G. MAMOLA, Optimum Pulse Shape for Minimum Spectral Occupancy in FSK Signals," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. VT-33, May 1984, pp. 67–75.

CARLSON, A. B., *Communication Systems*, 3d ed., McGraw–Hill Book Company, New York, 1986.

CATTERMOLE, K. W., *Principles of Pulse-Code Modulation*, American Elsevier, New York, 1969.

CCITT STUDY GROUP XVII, "Recommendation V.32 for a Family of 2-Wire, Duplex Modems Operating on the General Switched Telephone Network and on Leased Telephone-Type Circuits," *Document AP VIII-43E*, May 1984.

CHAKRABORTY, D., "VSAT Communication Networks—An Overview," *IEEE Communications Magazine*, vol. 26, no. 5, May 1988, pp. 10–24.

CHALLAPALI, K., X. LEBEQUE, J. S. LIM, W. H. PAIK, R. SAINT GIRONS, E. PETAJAN, V. SATHE, P. A. SNOPKO, and J. ZDEPSKI, "The Grand Alliance System for US HDTV," *Proceedings of the IEEE*, vol. 83, no. 2, February 1995, pp. 158–173.

CHAPMAN, R. C. (Editor), "The SLC96 Subscriber Loop Carrier System," *AT&T Bell Laboratories Technical Journal*, vol. 63, no. 10, Part 2, December 1984, pp. 2273–2437.

CHESTER, D. B., "Digital IF Filter Technology for 3G Systems: An Introduction," *IEEE Communications Magazine*, vol. 37, February 1999, pp. 102–107.

CHILDERS, D. G., *Probability and Random Processes Using MATLAB*, Irwin, Chicago, CL, 1997.

CHILDERS, D., and A. DURLING, *Digital Filtering and Signal Processing*, West Publishing Company, New York, 1975.

CHORAFAS, D. N., *Telephony, Today and Tomorrow*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.

CLARK, G. C., and J. B. CAIN, *Error-Correction Coding for Digital Communications*, Plenum Publishing Corporation, New York, 1981.

CONKLING, C., "Fractional-N Synthesizers Trim Current, Phase Noise," *Microwaves and RF*, February 1998, pp. 126–134.

COOPER, G. R., and C. D. MCGILLEM, *Modern Communications and Spread Spectrum*, McGraw–Hill Book Company, New York, 1986.

COUCH, L. W., "A Study of a Driven Oscillator with FM Feedback by Use of a Phase-Lock-Loop Model," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. MTT-19, no. 4, April 1971, pp. 357–366.

COUCH, L. W., *Digital and Analog Communication Systems*, 4th ed., Macmillan Publishing Company, New York, 1993.

COUCH, L. W., *Modern Communications Systems*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1995.

COURANT, R., and D. HILBERT, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. 1, Wiley-Interscience, New York, 1953.

DAMMANN, C. L., L. D. MCDANIEL, and C. L. MADDOX, "D2 Channel Bank—Multiplexing and Coding," *Bell System Technical Journal*, vol. 51, October 1972, pp. 1675–1700.

DAVENPORT, W. B., JR., and W. L. ROOT, *An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise*, McGraw–Hill Book Company, New York, 1958.

DAVIDOFF, M. R., *Satellite Experimenter's Handbook*, 2d ed., American Radio Relay League, Newington, CT, 1990.

DAVIS, D. W., and D. L. A. BARBER, *Communication Networks for Computers*, John Wiley & Sons, New York, 1973.

DAVIS, T. A., *MATLAB Primer*, 8th ed., CRC Press, Boca Raton, FL, 2011.

DEANGELO, J., "New Transmitter Design for the 80's," *BM/E (Broadcast Management/Engineering)*, vol. 18, March 1982, pp. 215–226.

DECINA, M., and G. MODENA, "CCITT Standards on Digital Speech Processing," *IEEE Journal on Selected Areas of Communications*, vol. 6, February 1988, pp. 227–234.

DEFFEBACH, H. L., and W. O. FROST, "A Survey of Digital Baseband Signaling Techniques," *NASA Technical Memorandum NASATM X-64615*, June 30, 1971.

DEJAGER, F., "Delta Modulation, A Method of PCM Transmission Using a 1-Unit Code," *Phillips Research Report*, no. 7, December 1952, pp. 442–466.

DEJAGER, F., and C. B. DEKKER, "Tamed Frequency Modulation: A Novel Method to Achieve Spectrum Economy in Digital Transmission," *IEEE Transactions on Communications*, vol. COM-26, May 1978, pp. 534–542.

DESHPANDE, G. S, and P. H. WITTKE, "Correlative Encoding of Digital FM," *IEEE Transactions on Communications*, vol. COM-29, February 1981, pp. 156–162.

DHAKE, A. M., *Television Engineering*, McGraw–Hill Book Company, New Delhi, India, 1980.

DIXON, R. C., *Spread Spectrum Systems*, 3d ed., John Wiley & Sons, New York, 1994.

DORF, R. C. (Editor-in-Chief), *The Electrical Engineering Handbook*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1993.

DORF, R. C. (Editor), *The Engineering Handbook*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.

EDELSON, B. I., and A. M. WERTH, "SPADE System Progress and Application," *COM-SAT Technical Review*, Spring 1972, pp. 221–242.

EILERS, C. G., "TV Multichannel Sound—The BTSC System," *IEEE Transactions on Consumer Electronics*, vol. CE-31, February 1985, pp. 1–7.

EVANS, J. V., "Satellite Systems for Personal Communications," *Proceedings of the IEEE*, vol. 86, no. 7, July 1998, pp. 1325–1341.

FASHANO, M., and A. L. STRODTBECK, "Communication System Simulation and Analysis with SYSTID," *IEEE Journal on Selected Areas of Communications*, vol. SAC-2, January 1984, pp. 8–29.

FEHER, K., *Digital Communications—Satellite/Earth Station Engineering*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1981.

FELLER, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, John Wiley & Sons, New York, 1957, p. 168.

FIKE, J. L., and G. E. FRIEND, *Understanding Telephone Electronics*, 2d ed., Texas Instruments, Dallas, 1984.

FINK, D. G., and H. W. BEATY (Editors), *Standard Handbook for Electrical Engineers*, McGraw–Hill Book Company, New York, 1978.

FLANAGAN, J. L., M. R. SCHROEDER, B. S. ATAL, R. E. CROCHIERE, N. S. JAYANT, and J. M. TRIBOLET, "Speech Coding," *IEEE Transactions on Communications*, vol. COM-27, April 1979, pp. 710–737.

FOLEY, J., "Iridium: Key to World Wide Cellular Communications," *Telecommunications*, vol. 25, October 1991, pp. 23–28.

FORNEY, G. D., "The Viterbi Algorithm," *Proceedings of the IEEE*, vol. 61, March 1973, pp. 268–273.

FORNEY, G. D., L. BROWN, M. V. EYUBOGLU, and J. L. MORAN, "The V.34 High-Speed Modem Standard," *IEEE Communications Magazine*, vol. 34, December 1996, pp. 28–33.

FROHNE, R., "A High-Performance, Single-Signal, Direct-Conversion Receiver with DSP Filtering," *QST*, vol. 82, April 1998, pp. 40–46.

GALLAGHER, R. G., *Information Theory and Reliable Communications*, John Wiley & Sons, New York, 1968.

GARDNER, F. M., *Phaselock Techniques*, 2d ed., John Wiley & Sons, New York, 1979.

GARDNER, F. M., and W. C. LINDSEY (Guest Editors), Special Issue on Synchronization, *IEEE Transactions on Communications*, vol. COM-28, no. 8, August 1980.

GARG, V. K., *IS-95 CDMA and cdma 2000*, Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, NJ, 2000.

GARG, V. K., and J. E. WILKES, *Principles and Applications of GSM*, Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, NJ, 1999.

GERSHO, A., "Advances in Speed and Audio Compression," *Proceedings of the IEEE*, vol. 82, no. 6, June 1994, pp. 900–912.

GERSHO, A., "Charge-Coupled Devices: The Analog Shift Register Comes of Age," *IEEE Communications Society Magazine*, vol. 13, November 1975, pp. 27–32.

GERSON, I. A., and M. A. JASIUK, "Vector Sum Excited Linear Prediction (VSELP) Speech Coding at 8kb/s," *International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Albuquerque, NM, April 1990, pp. 461–464.

GIBSON, J. D., Editor, *The Communications Handbook*, CRC Press, Inc., Boca Raton, FL, 1997.

GLISSON, T. L., *Introduction to System Analysis*, McGraw–Hill Book Company, New York, 1986.

GOLDBERG, R. R., *Fourier Transforms*, Cambridge University Press, New York, 1961.

GOLOMB, S. W. (Editor), *Digital Communications with Space Applications*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1964.

GOODMAN, D. J., "Trends in Cellular and Cordless Communication," *IEEE Communications Magazine*, vol. 29, June 1991, pp. 31–40.

GORDON, G. D., and W. L. MORGAN, *Principles of Communication Satellites*, Wiley-Interscience, New York, 1993.

GRIFFITHS, J., *Radio Wave Propagation and Antennas*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987.

GRUBB, J. L., "The Traveller's Dream Come True," *IEEE Communications Magazine*, vol. 29, November 1991, pp. 48–51.

GULSTAD, K., "Vibrating Cable Relay," *Electrical Review* (London), vol. 42, 1898; vol. 51, 1902.

GUPTA, S. C., "Phase Locked Loops," *Proceedings of the IEEE*, vol. 63, February 1975, pp. 291–306.

HA, T. T., *Digital Satellite Communications*, Macmillan Publishing Company, New York, 1986.

HA, T. T., *Digital Satellite Communications*, 2d ed., John Wiley & Sons, New York, 1989.

HAMMING, R. W., "Error Detecting and Error Correcting Codes," *Bell System Technical Journal*, vol. 29, April 1950, pp. 147–160.

HÄNDEL, R., and M. N. HUBER, *Integrated Broadband Networks*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1991.

HANSELMAN, D., and B. LITTLEFIELD, *Mastering MATLAB 7*, Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2011.

HARRIS, A., "The New World of HDTV," *Electronics Now*, vol. 64, May 1993, pp. 33–40 and p. 72.

HARRIS, F. J., "On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform," *Proceedings of the IEEE*, vol. 66, January 1978, pp. 51–83.

HARRIS, F. J., "The Discrete Fourier Transform Applied to Time Domain Signal Processing," *IEEE Communications Magazine*, vol. 20, May 1982, pp. 13–22.

HARTLEY, R. V., "Transmission of Information," *Bell System Technical Journal*, vol. 27, July 1948, pp. 535–563.

HAUS, H. A., Chairman IRE Subcommittee 7.9 on Noise, "Description of Noise Performance of Amplifiers and Receiving Systems," *Proceedings of the IEEE*, vol. 51, no. 3, March 1963, pp. 436–442.

HAYKIN, S., *Communication Systems*, 2d ed., John Wiley & Sons, New York, 1983.

HOFMANN, F., C. HANSEN, and W. SCHÄFER, "Digital Radio Mondiale (DRM) Digital Sound Broadcasting in the AM Bands," *IEEE Transactions on Broadcasting*, vol. 49, September 2003, pp. 319–328.

HOLMES, J. K., *Coherent Spread Spectrum Systems*, Wiley-Interscience, New York, 1982.

HOPKINS, R., "Digital Terrestrial HDTV for North America: The Grand Alliance HDTV System," *IEEE Transactions on Consumer Electronics*, vol. 40, no. 3, August 1994, pp. 185–198.

HSING, T. R., C. CHEN, and J. A. BELLISIO, "Video Communications and Services in the Copper Loop," *IEEE Communications Magazine*, vol. 31, January 1993, pp. 62–68.

HSU, H. P., "Chapter 2–Sampling," *The Mobile Communications Handbook*, 2d ed., (J. D. Gibson, Editor), CRC Press, Boca Raton, FL, 1999, pp. 2.1–2.10.

HUANG, D. T., and C. F. VALENTI, "Digital Subscriber Lines: Network Considerations for ISDN Basic Access Standard," *Proceedings of the IEEE*, vol. 79, February 1991, pp. 125–144.

IPATOV, V., *Spread Spectrum and CDMA: Principles and Applications*, John Wiley & Sons, New York, 2005.

IRMER, T., "An Overview of Digital Hierarchies in the World Today," *IEEE International Conference on Communications*, San Francisco, June 1975, pp. 16–1 to 16–4.

IRWIN, J. D., *Basic Engineering Circuit Analysis*, Macmillan Publishing Company, New York, 5th ed. 1995.

IRWIN, J. D., and R. M. Nelms, *Basic Engineering Circuit Analysis*, 10th ed., John Wiley & Sons, New York, 2011.

JACOBS, I., "Design Considerations for Long-Haul Lightwave Systems," *IEEE Journal on Selected Areas of Communications*, vol. 4, December 1986, pp. 1389–1395.

JAMES, R. T., and P. E. MUENCH, "A.T.&T. Facilities and Services," *Proceedings of the IEEE*, vol. 60, November 1972, pp. 1342–1349.

JAYANT, N. S., "Digital Encoding of Speech Waveforms," *Proceedings of the IEEE*, May 1974, pp. 611–632.

JAYANT, N. S., "Coding Speech at Low Bit Rates," *IEEE Spectrum*, vol. 23, August 1986, pp. 58–63.

JAYANT, N. S., and P. NOLL, *Digital Coding of Waveforms*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.

JENKINS, M. G., and D. G. WATTS, *Spectral Analysis and Its Applications*, Holden-Day, San Francisco, CA, 1968.

JERRI, A. J., "The Shannon Sampling Theorem—Its Various Extensions and Applications: A Tutorial Review," *Proceedings of the IEEE*, vol. 65, no. 11, November 1977, pp. 1565–1596.

JORDAN, E. C., and K. G. BALMAIN, *Electromagnetic Waves and Radiating Systems*, 2d ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1968.

JURGEN, R. K., "High-Definition Television Update," *IEEE Spectrum*, vol. 25, April 1988, pp. 56–62.

JURGEN, R. K., "The Challenges of Digital HDTV," *IEEE Spectrum*, vol. 28, April 1991, pp. 28–30 and 71–73.

KAPLAN, E., *Understanding GPS: Principles and Applications*, Artech House, Norwood, MA, 2005.

KAUFMAN, M., and A. H. SEIDMAN, *Handbook of Electronics Calculations*, McGraw–Hill Book Company, New York, 1979.

KAY, S. M., *Modern Spectral Estimation—Theory and Applications*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1986.

KAY, S. M., and S. L. MARPLE, "Spectrum-Analysis—A Modern Perspective," *Proceedings of the IEEE*, vol. 69, November 1981, pp. 1380–1419.

KAZAKOS, D., and P. PAPANTONI-KAZAKOS, *Detection and Estimation*, Computer Science Press, New York, 1990.

KLAPPER, J., and J. T. FRANKLE, *Phase-Locked and Frequency–Feedback Systems*, Academic Press, New York, 1972.

KRAUS, J. D., *Radio Astronomy*, 2d ed., Cygnus-Quasar Books, Powell, OH, 1986.

KRAUSS, H. L., C. W. BOSTIAN, and F. H. RAAB, *Solid State Radio Engineering*, John Wiley & Sons, New York, 1980.

KRETZMER, E. R., "Generalization of a Technique for Binary Data Communications," *IEEE Transactions on Communication Technology*, vol. COM-14, February 1966, pp. 67–68.

LAM, S. S., "Satellite Packet Communications, Multiple Access Protocols and Performance," *IEEE Transactions on Communications*, vol. COM-27, October 1979, pp. 1456–1466.

LANCASTER, D., "Hardware Hacker—Caller Number Delivery," *Radio-Electronics*, vol. 62, August 1991, pp. 69–72.

LATHI, B. P., *Modern Digital and Analog Communication Systems*, 3rd ed., Oxford University Press, Inc., London, 1998.

LEE, W. C. Y., "Elements of Cellular Mobile Radio Systems," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. VT-35, May 1986, pp. 48–56.

LEE, W. C. Y., *Mobile Cellular Telecommunications Systems*, McGraw–Hill Book Company, New York, 1989.

LEIB, H., and S. PASUPATHY, "Error-Control Properties of Minimum Shift Keying," *IEEE Communications Magazine*, vol. 31, January 1993, pp. 52–61.

LENDER, A., "The Duobinary Technique for High Speed Data Transmission," *IEEE Transactions on Communication Electronics*, vol. 82, May 1963, pp. 214–218.

LENDER, A., "Correlative Level Coding for Binary-Data Transmission," *IEEE Spectrum*, vol. 3, February 1966, pp. 104–115.

LI, V. O. K., and X. QUI, "Personal Communication Systems (PCS)," *Proceedings of the IEEE*, vol. 83, no. 9, September 1995, pp. 1210–1243.

LIN, D. W., C. CHEN, and T. R. HSING, "Video on Phone Lines: Technology and Applications," *Proceedings of the IEEE*, vol. 83, no. 2, February 1995, pp. 175–192.

LIN, S., and D. J. COSTELLO, JR., *Error Control Coding*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1983.

LINDSEY, W. C., and C. M. CHIE, "A Survey of Digital Phase-Locked Loops," *Proceedings of the IEEE*, vol. 69, April 1981, pp. 410–431.

LINDSEY, W. C., and M. K. SIMON, *Telecommunication System Engineering*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973.

LUCKY, R., "Through a Glass Darkly–Viewing Communication in 2012 from 1961," *Proceedings of the IEEE*, vol. 87, July 1999, pp. 1296–1300.

LUCKY, R. W., and H. R. RUDIN, "Generalized Automatic Equalization for Communication Channels," *IEEE International Communication Conference*, vol. 22, 1966.

LUCKY, R. W., J. SALZ, and E. J. WELDON, *Principles of Data Communication*, McGraw–Hill Book Company, New York, 1968.

MANASSEWITSCH, V., *Frequency Synthesizers*, 3d ed., Wiley-Interscience, New York, 1987.

MARAL, G., *VSAT Networks*, John Wiley & Sons, New York, 1995.

MARKLE, R. E., "Single Sideband Triples Microwave Radio Route Capacity," *Bell Systems Laboratories Record*, vol. 56, no. 4, April 1978, pp. 105–110.

MARKLE, R. E., "Prologue, The AR6A Single-Sideband Microwave Radio System," *Bell System Technical Journal*, vol. 62, December 1983, pp. 3249–3253. (The entire December 1983 issue deals with the AR6A system.)

MARPLE, S. L., *Digital Spectral Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1986.

MCELIECE, R. J., The Theory of Information and Coding (*Encyclopedia of Mathematics and Its Applications*, vol. 3), Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1977.

MCGILL, D. T., F. D. NATALI, and G. P. EDWARDS, "Spread-spectrum Technology for Commercial Applications," *Proceeding of the IEEE*, vol. 82, no. 4, April 1994, pp. 572–584.

MELSA, J. L., and D. L. COHN, *Decision and Estimation Theory*, McGraw–Hill Book Company, New York, 1978.

MENNIE, D., "AM Stereo: Five Competing Options," *IEEE Spectrum*, vol. 15, June 1978, pp. 24–31.

MILLER, S. L., *Probability and Random Processes*, 2d ed., Academic Press, Maryland Heights, MD, 2012.

MIYAOKA, S., "Digital Audio Is Compact and Rugged," *IEEE Spectrum*, vol. 21, March 1984, pp. 35–39.

MOSSBERG, W. S., "In 4G Race, Verizon Pulls Ahead with Pricey Speed," *The Wall Street Journal*, January 6, 2011.

MOTOROLA, "MC145500 Series PCM Codec-Filter Mono-Circuit," *Motorola Semiconductor Technical Data*, available from *www.motorola.com*, 1995.

MOTOROLA, *Telecommunications Device Data*, Motorola Semiconductor Products, Austin, TX, 1985.

MUMFORD, W. W., and E. H. SCHEIBE, *Noise Performance Factors in Communication Systems*, Horizon House-Microwave, Dedham, MA, 1968.

MUROTO, K., "GMSK Modulation for Digital Mobile Radio Telephony," *IEEE Transactions on Communications*, vol. COM-29, July 1981, pp. 1044–1050.

MURPHY, E., "Whatever Happened to AM Stereo?" *IEEE Spectrum*, vol. 25, March 1988, p. 17.

NILSSON, J. W., *Electric Circuits*, 3d ed., Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1990.

NORTH, D. O., "An Analysis of the Factors which Determine Signal/Noise Discrimination in Pulsed-Carrier Systems," *RCA Technical Report*, PTR-6-C, June 1943; reprinted in *Proceedings of the IEEE*, vol. 51, July 1963, pp. 1016–1027.

NYQUIST, H., "Certain Topics in Telegraph Transmission Theory," *Transactions of the AIEE*, vol. 47, February 1928, pp. 617–644.

OKUMURA, Y., and M. SHINJI (Guest Editors), Special Issue on Mobile Radio Communications, *IEEE Communications Magazine*, vol. 24, February 1986.

OLMSTED, J. M. H., *Advanced Calculus*, Appleton-Century-Crofts, New York, 1961.

O'NEAL, J. B., "Delta Modulation and Quantizing Noise, Analytical and Computer Simulation Results for Gaussian and Television Input Signals," *Bell System Technical Journal*, vol. 45, January 1966 (a), pp. 117–141.

O'NEAL, J. B., "Predictive Quantization (DPCM) for the Transmission of Television Signals," *Bell System Technical Journal*, vol. 45, May–June 1966(b), pp. 689–721.

OPPENHEIM, A. V., and R. W. SCHAFER, *Digital Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1975.

OPPENHEIM, A. V., and R. W. SCHAFER, *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.

PADGETT, J. E., C. G. GUNTHER, and T. HATTORI, "Overview of Wireless Personal Communications," *IEEE Communications Magazine*, vol. 33, no. 1, January 1995, pp. 28–41.

PANCHA, P., and M. EL ZARKI, "MPEG Coding of Variable Bit Rate Video Transmission," *IEEE Communications Magazine*, vol. 32, no. 5, May 1994, pp. 54–66.

PANDHI, S. N., "The Universal Data Connection," *IEEE Spectrum*, vol. 24, July 1987, pp. 31–37.

PANTER, P. F., *Modulation, Noise and Spectral Analysis*, McGraw–Hill Book Company, New York, 1965.

PAPOULIS, A., *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, McGraw–Hill Book Company, New York, 2d ed., 1984, 3d ed., 1991.

PARK, J. H., JR., "On Binary DPSK Detection," *IEEE Transactions on Communications*, vol. COM-26, April 1978, pp. 484–486.

PASUPATHY, S., "Correlative Coding," *IEEE Communications Society Magazine*, vol. 15, July 1977, pp. 4–11.

PEEBLES, P. Z., *Communication System Principles*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1976.

PEEBLES, P. Z., *Digital Communication Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987.

PEEBLES, P. Z., *Probability, Random Variables, and Random Signal Principles*, 3d ed., McGraw–Hill Book Company, New York, 1993.

PEEK, J. B. H., "Communications Aspects of the Compact Disk Digital Audio System," *IEEE Communications Magazine*, vol. 23, February 1985, pp. 7–15.

PERSONICK, S. D., "Digital Transmission Building Blocks," *IEEE Communications Magazine*, vol. 18, January 1980, pp. 27–36.

PETAJAN, E., "The HDTV Grand Alliance System," *Proceedings of the IEEE*, vol. 83, no. 7, July 1995, pp. 1094–1105.

PETERSON, R. L., R. E. ZIEMER, and D. E. BORTH, *Introduction to Spread-Spectrum Communications*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1995.

PETERSON, W. W., and E. J. WELDON, *Error-Correcting Codes*, MIT Press, Cambridge, MA, 1972.

PETTIT, R. H., *ECM and ECCM Techniques for Digital Communication Systems*, Lifetime Learning Publications (a division of Wadsworth, Inc.), Belmont, CA, 1982.

PRATT, T., C. W. BOSTIAN, and J.E. ALLNUTT, *Satellite Communications*, John Wiley & Sons, 2d ed., Hoboken, NJ, 2003.

PRITCHARD, W. L., and C. A. KASE, "Getting Set for Direct-Broadcast Satellites," *IEEE Spectrum*, vol. 18, August 1981, pp. 22–28.

PROAKIS, J. G., *Digital Communications*, 3d ed., McGraw–Hill Book Company, New York, 1995.

QURESHI, S., "Adaptive Equalization," *IEEE Communications Magazine*, vol. 20, March 1982, pp. 9–16.

RAMO, S., J. R. WHINNERY, and T. VANDUZER, *Fields and Waves In Communication Electronics*, 3d ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994.

RANA, A. H., J. MCCOSKEY, and W. CHECK, "VSAT Technology, Trends and Applications," *Proceedings of the IEEE*, vol. 78, July 1990, pp. 1087–1095.

RAPPAPORT, T. S., "Characteristics of UHF Multipath Radio Channels in Factory Buildings," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 37, August 1989, pp. 1058–1069.

RAPPAPORT, T. S., *Wireless Communications, Principles and Practice*, 2d ed., Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, NJ, 2002.

REEVE, W. H., *Subscriber Loop Signaling and Transmission Handbook*, IEEE Press, New York, 1995.

RHEE, M. Y., *CDMA Cellular Mobile Communications and Network Security*, Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, NJ, 1998.

RHEE, S. B., and W. C. Y. LEE (Editors), Special Issue on Digital Cellular Technologies, *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 40, May 1991.

RICE, S. O., "Mathematical Analysis of Random Noise," *Bell System Technical Journal*, vol. 23, July 1944, pp. 282–333 and vol. 24, January 1945, pp. 46–156; reprinted in *Selected Papers on Noise and Stochastic Processes*, N. Wax (Editor), Dover Publications, New York, 1954.

RICE, S. O., "Statistical Properties of a Sine-Wave Plus Random Noise," *Bell System Technical Journal*, vol. 27, January 1948, pp. 109–157.

ROOT, W. L., "Remarks, Mostly Historical, on Signal Detection and Signal Parameter Estimation," *Proceedings of the IEEE*, vol. 75, November 1987, pp. 1446–1457.

ROWE, H. E., *Signals and Noise in Communication Systems*, D. Van Nostrand Company, Princeton, NJ, 1965.

RYAN, J. S. (Editor), Special Issue on Telecommunications Standards, *IEEE Communications Magazine*, vol. 23, January 1985.

SABIN, W. E., and E. O. SCHOENIKE, *Single-Sideband Systems and Circuits*, McGraw–Hill Book Company, New York, 1987.

SALTZBERG, B. R., T. R. HSING, J. M. CIOFFI, and D. W. LIN (Editors), Special Issue on High-Speed Digital Subscriber Lines, *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 9, August 1991.

SCHARF, L. L., *Statistical Signal Processing: Detection, Estimation, and Time Series Analysis*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1991.

SCHAUMANN, R., M. S. GHAUSI, and K. R. LAKER, *Design of Analog Filters*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1990.

SCHILLING, D. L., R. L. PICKHOLTZ, and L. B. MILSTEIN, "Spread Spectrum Goes Commercial," *IEEE Spectrum*, vol. 27, August 1990, pp. 40–45.

SCHILLING, D. L., L. B. MILSTEIN, R. L. PICKHOLTZ, M. KULLBACK, and F. MILLER, "Spread Spectrum for Commercial Communications," *IEEE Communications Magazine*, vol. 29, April 1991, pp. 66–67.

SCHWARTZ, B. K., "The Analog Display Services Interface," *IEEE Communications Magazine*, vol. 31, April 1993, pp. 70–75.

SCHWARTZ, M., W. R. BENNETT, and S. STEIN, *Communication Systems and Techniques*, McGraw–Hill Book Company, New York, 1966.

SHANMUGAN, K. S., *Digital and Analog Communication Systems*, John Wiley & Sons, New York, 1979.

SHANMUGAN, K. S., and A. M. BREIPOHL, *Random Signals: Detection, Estimation and Data Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1988.

SHANNON, C. E., "A Mathematical Theory of Communication," *Bell System Technical Journal*, vol. 27, July 1948, pp. 379–423, and October 1948, pp. 623–656.

SHANNON, C. E., "Communication in the Presence of Noise," *Proceedings of the IRE*, vol. 37, January 1949, pp. 10–21. (Reprinted in *Proceedings of the IEEE*, vol. 86, no. 2, February 1998, pp. 447–457.)

SIMON, M. K., "Comments on 'On Binary DPSK Detection'," *IEEE Transactions on Communications*, vol. COM-26, October 1978, pp. 1477–1478.

SINNEMA, W., and R. MCPHERSON, *Electronic Communications*, Prentice Hall Canada, Inc., Scarborough, Ontario, Canada, 1991.

SIPERKO, C. M., "LaserNet—A Fiber Optic Intrastate Network (Planning and Engineering Considerations)," *IEEE Communications Magazine*, vol. 23, May 1985, pp. 31–45.

SKLAR, B., *Digital Communications*, 2d ed., Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, NJ, 2001.

SKLAR, B., "Rayleigh Fading Channels in Mobile Digital Communications Systems—Part 1: Characterization," *IEEE Communications Magazine*, vol. 35, September 1997, pp. 136–146.

SKLAR, B., "A Primer on Turbo Code Concepts," *IEEE Communications Magazine*, vol. 35, December 1997, pp. 94–101.

SLEPIAN, D., "On Bandwidth," *Proceedings of the IEEE*, vol. 64, no. 3, March 1976, pp. 292–300.

SMITH, B., "Instantaneous Companding of Quantized Signals," *Bell System Technical Journal*, vol. 36, May 1957, pp. 653–709.

SMITH, J. R., *Modern Communication Circuits*, McGraw–Hill Book Company, New York, 2d ed., 1998.

SOLOMON, L., "The Upcoming New World of TV Reception," *Popular Electronics*, vol. 15, no. 5, May 1979, pp. 49–62.

SPANIAS, A. S., "Speech Coding: A Tutorial Review," *Proceedings of the IEEE*, vol. 82, no. 10, October 1994, pp. 1541–1582.

SPILKER, J. J., *Digital Communications by Satellite*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1977.

STALLINGS, W., *Data and Computer Communications*, 5th ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996.

STALLINGS, W., *ISDN and Broadband ISDN*, Macmillan Publishing Company, New York, 1992.

STARK, H., F. B. TUTEUR, and J. B. ANDERSON, *Modern Electrical Communications*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.

STIFFLER, J. J., *Theory of Synchronous Communication*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1971.

STUMPERS, F. L., "Theory of Frequency—Modulation Noise," *Proceedings of the IRE*, vol. 36, September 1948, pp. 1081–1092.

SUNDE, E. D., *Communications Engineering Technology*, John Wiley & Sons, New York, 1969.

SWEENEY, P., *Error Control Coding*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.

TAUB, H., and D. L. SCHILLING, *Principles of Communication Systems*, 2d ed., McGraw–Hill Book Company, New York, 1986.

THOMAS, J. B., *An Introduction to Statistical Communication Theory*, John Wiley & Sons, New York, 1969.

THOMSON CONSUMER ELECTRONICS, Inc., *RCA Self-Installer Manual (for DSS Receiver System)*, Thomson Consumer Electronics, Inc., Indianapolis, IN, 1994.

TORRIERI, D. J., *Principles of Spread-Spectrum Communication Systems*, Springer, New York, 2004.

TURIN, G., "An Introduction to Digital Matched Filters," *Proceedings of the IEEE*, vol. 64, no. 7, July 1976, pp. 1092–1112.

UNGERBOECK, G., "Channel Coding with Multilevel/Phase Signals," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. IT-28, January 1982, pp. 55–67.

UNGERBOECK, G., "Trellis-Coded Modulation with Redundant Signal Sets," Parts 1 and 2, *IEEE Communications Magazine*, vol. 25, no. 2, February 1987, pp. 5–21.

VAN DER ZIEL, A., *Noise in Solid State Devices and Circuits*, Wiley-Interscience, New York, 1986.

VITERBI, A. J., "When Not to Spread Spectrum—A Sequel," *IEEE Communications Magazine*, vol. 23, April 1985, pp. 12–17.

VITERBI, A. J., and J. K. OMURA, *Principles of Digital Communication and Coding*, McGraw–Hill Book Company, New York, 1979.

WALDEN, R. H., "Performance Trends for Analog-to-Digital Converters," *IEEE Communications Magazine*, vol. 37, February 1999, pp. 96–101.

WEAVER, D. K., "A Third Method of Generating and Detection of Single Sideband Signals," *Proceedings of the IRE*, vol. 44, December 1956, pp. 1703–1705.

WEI, L., "Rotationally Invariant Convolutional Channel Coding with Expanded Signal Space—Part II: Nonlinear Codes," *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. SAC-2, no. 2, September 1984, pp. 672–686.

WHALEN, A. D., *Detection of Signals in Noise*, Academic Press, New York, 1971.

WHITAKER, J. C. (Editor), *The Electronics Handbook*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.

WHITTAKER, E. T., "On Functions which Are Represented by the Expansions of the Interpolation Theory," *Proceedings of the Royal Society* (Edinburgh), vol. 35, 1915, pp. 181–194.

WIENER, N., *Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series with Engineering Applications*, MIT Press, Cambridge, MA, 1949.

WILSON, S. G., *Digital Modulation and Coding*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996.

WOZENCRAFT, J. M., and I. M. JACOBS, *Principles of Communication Engineering*, John Wiley & Sons, New York, 1965.

WU, W. W., E. F. MILLER, W. L. PRITCHARD, and R. L. PICKHOLTZ, "Mobile Satellite Communication," *Proceedings of the IEEE*, vol. 82, no. 9, September 1994, pp. 1431–1448.

WYLIE, C. R., JR., *Advanced Engineering Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1960.

WYNER, A. D., and S. SHAMAI (SHITZ), "Introduction to "Communication in the Presence of Noise" by C. E. Shannon," *Proceedings of the IEEE*, vol. 86, no. 2, February 1998, pp. 442–446.

XIONG, F., "Modern Techniques in Satellite Communications," *IEEE Communications Magazine*, vol. 32, no. 8, August 1994, pp. 84–98.

YOUNG, P. H., *Electronic Communication Techniques*, Merrill Publishing Co., Columbus, OH, 1990.

ZIEMER, R. E., and R. L. PETERSON, *Digital Communications and Spread Spectrum Systems*, Macmillan Publishing Company, New York, 1985.

ZIEMER, R. E., and W. H. TRANTER, *Principles of Communications*, 4th ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995.

ZIEMER, R. E., W. H. TRANTER, and D. R. FANNIN, *Signals and Systems*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 4th ed., 1998.

ZOU, W. Y., "Comparison of Proposed HDTV Terrestrial Broadcasting Systems," *IEEE Transactions on Broadcasting*, vol. 37, December 1991, pp. 145–147.

缩略词

AC	交流
ADC	模数转换
ADM	自适应增量调制
AM	幅度调制
ANSI	美国国家标准学会
APLL	模拟锁相环
ATM	异步转移模式
ATSC	(美国)高级电视系统委员会
AT&T	美国电话电报公司
AWGN	加性高斯白噪声
BER	误比特率
BPSK	二进制相移键控
CATV	有线电视系统
CCIR	国际无线电咨询委员会
CCITT	国际电话电报咨询委员会
CDMA	码分多址
CFT	连续傅里叶变换
CMOS	互补金属氧化物半导体
C/N or CNR	载噪(功率)比
CO	电话中心局
CRT	阴极射线管
dB	分贝
DC	直流
DFT	离散傅里叶变换
DM	增量调制
DPCM	差分脉冲编码调制
DRM	世界数字广播
DSB-SC	抑制载波双边带
DSL	数字用户环线
DSS	数字卫星系统
DTV	数字电视
EIRP	有效全向辐射功率
ERP	有效辐射功率
FCC	(美国)联邦通信委员会
FDM	频分复用
FEC	前向纠错编码
FET	场效应管
FFT	快速傅里叶变换
FM	调频

FSK	频移键控
GSM	特别移动小组(蜂窝电话)
HDTV	高清晰度(数字)电视
HF	高频
HRC	谐波载波
IBOC	带内信道
IEEE	电气与电子工程师学会
IF	中频
IMD	互调失真
IRC	增量载波
ISDN	综合业务数字网
ISI	码间串扰
ISO	国际标准化组织
ITU	国际电信联盟
LAN	局域网
LED	发光二极管
LNA	低噪声放大器
LO	本机振荡器
LOS	视线
LPF	低通滤波器
LSSB	下单边带
LTE	长期演进(蜂窝系统)
MIMO	多输入多输出系统
MPEG	动态图像专家组
MPSK	多进制相移键控
MQAM	多进制正交幅度调制
MSK	最小相位频移键控
NBFM	窄带调频
NLOS	非视线
NRZ	非归零码
NTSC	(美国)国家电视标准委员会
OFDM	正交频分复用
OOK	开关键控
OQPSK	偏移正交相移键控控
PAM	脉冲幅度调制
PBX	专用交换分机
PCM	脉冲编码调制
PCS	个人通信业务
PD	相位检测
PDF	概率密度函数
PEP	峰值包络功率
PLL	锁相环
PM	调相
POTS	模拟电话业务

PPM	脉位调制
PSD	功率谱密度
PSK	相移键控
PSTN	公共交换电话网络
PTM	脉时调制
PWM	脉宽调制
QAM	正交幅度调制
QPSK	正交相移键控
RMS	均方根值
RF	射频
RT	远程电话终端
RZ	归零码
SAW	声表面波
SDARS	卫星数字音频无线业务
SDTV	标准分辨率数字电视
S/N or SNR	信噪(功率)比
SS	扩频(系统)
SSB	单边带
TCP/IP	传输控制协议/网际协议
TDM	时分复用
TDMA	时分多址
TELCO	电话公司
THD	谐波失真总量
TTL	晶体管-晶体管-逻辑电路
TV	电视
TVRO	仅能接收电视的终端
TWT	行波管
UHF	特高频
USSB	上单边带
VCO	压控振荡器
VF	音频
VHF	甚高频
VSAT	微型地球站
VSB	残留边带
WBFM	宽带调频
WLAN	无线局域网

术 语 表

A

Absolute bandwidth 绝对带宽
Absolute value 绝对值
Absolutely bandlimited waveform 绝对带限波形
Absorption 吸收
Access 接入、多址
  code-division 码分
  data multiple 数据复用
  demand-assigned multiple 按需分配复用
  fixed-assigned multiple 固定分配复用
  frequency-division multiple 频分复用
  multiple 复用
  space-division multiple 空分复用
  spread-spectrum multiple 扩频复用
  telephone signal multiple 电话信号复用
  time-division multiple 时分复用
Acknowledgment (ACK) 确认
Actual power spectral density, maximum 实际功率谱密度，最大
Adaptive delta modulation (ADM) 自适应增量调制
Adaptive filter 自适应滤波器
Adaptive pulse code modulation(ADPCM) 自适应脉冲编码调制
Additional temperature 附加温度
Additive Gaussian noise (AWGN) 加性高斯白噪声
Advanced Mobile Phone System (AMPS) 高级移动电话系统
Advanced Television System Committee(ATSC) 先进电视系统委员会
A-law compounding A律压扩
Algorithm 算法
  decoding 译码
  reconstruction 重构
  soft-decision 软判决
  step-size 台阶
Aliasing 混叠
Aliasing effect 混叠效应
Aliasing folding 混折叠
All bandpass waveform 全通波形
ALOHA technique ALOHA 技术
Alternate mark inversion (AMI) 交替传号反转
AM-to-PM conversion AM 到 PM 转换
Amplifiers 放大器
  categories of …的类别
  classification of …的分类
  low-noise 低噪
Amplitude, constant 幅度，常数
Amplitude distortion 幅度失真
Amplitude modulation(AM) 幅度调制
  digital 数字的
  with envelope detection 用包络检测
  power of …的功率
  with product detection 用乘法检测
  technical standards 技术标准
Amplitude response 幅度响应
Amplitude shift keying (ASK) 幅度键控
Analog 模拟
  circuit 电路
  information source 信息源
  phase-locked loop 锁相环
  switching 交换
  techniques 技术
  waveform 波形
Analog communication systems 模拟通信系统
  amplitude modulation systems 幅度调制系统
  baseband systems 基带系统
  black-and-white television 黑白电视
  color television 彩色电视
  comparison of 与…比
  double-sideband suppressed carrier systems 抑制载波双边带系统
  frequency modulation systems 调频系统
  ideal system performance 理想系统性能
  output signal-to-noise ratios for 输出信噪比
  phase modulation systems 调相系统
  single sideband systems 单边带系统
Analog-to-digital conversion (ADC) 模数转换
Analytic function 解析函数
Analyzing communication systems 通信系统分析
Angle-modulated signals 角度调制信号
Angle-modulated systems 角度调制系统
Antennas 天线
Antipodal signal 反向信号
Aperture 口径
Approximate envelope 近似包络
Approximation 近似值
Arbitrary waveform generators (AWG) 任意波形发生器
Armstrong method 阿姆斯特朗法
ARRL Handbook ARRL 手册
A service A 业务

Asymmetric sideband signals 非对称边带信号
  single 单独的
  vestigial 残留的
Asymmetrical digital subscriber line(ADSL) 非对称数字用户线
Asymptotically unbiased periodogram 渐近无偏周期图
Asynchronous lines 异步线
AT&T AT&T 公司
Audio distortion 音频失真
Audio mixer 音频混合器
Autocorrelation function 自相关函数
  of Fourier transform 傅里叶变换的
  normalized-data 归一化数据
  output 输出
  of waveform 波形的
Automatic gain control (AGC) 自动增益控制
Automatic repeat request (ARQ) 自动重发请求
Automatic teller machines 自动柜员机
Autoregressive (AR) model 自回归模式
Autoregressive-moving average (ARMA) model 自回归运动平均模式
Available noise power 可用噪声功率
Available power gain 可用功率增益
Available power spectral density 可用功率谱密度
Avalance photodiode (APD) 雪崩光电二极管
Average 均值
Average effective input-noise temperature 平均有效输入噪声温度
Average information source 平均信息源
Average noise figure 平均噪声系数
Average power 平均功率
  noise 噪声
  normalized 归一化的
  signal 信号
  of waveforms 波形的
Average-signal-to-average-noise ratio 平均信噪比

B

Balanced discriminator 平衡鉴频器
Band mixer, single-sided 边带混合器，单边
Bandlimiting 带限
  digital signal processing 数字信号处理
  dimensionality theorem 维数定理
  impulse sampling 脉冲抽样
  sampling theorem 抽样定理
  signals and noise 信号与噪声
  waveforms 波形
  white Gaussian-noise process 白高斯噪声过程
Bandpass 带通
  digital communication signal 数字通信信号
  dimensionality theorem 维数定理
  limiter 限幅器
  noise, white 噪声，白
  random process 随机过程
  sampling theorem 抽样定理
  signaling 信令
  transmission 传输
  wide-sense stationary process 宽平稳过程
Bandpass binary signals 带通二进制信号
  binary-phase-shift keying 二元相移键控
  coherent detection of …的相干检测
  differential phase-shift keying 差分相移键控
  frequency-shift keying 频移键控
  noncoherent detection of …的非相干检测
  on-off keying 开关键控
Bandpass filtering 带通滤波
  equivalent low-pass filter 等效低通滤波器
  impulse response of …的冲激响应
  input of …的输入
  linear 线性
  output of …的输出
Bandpass process 带通过程
  Gaussian 高斯
  real 实
  representations of …的表示
  wide-sense stationary, properties of 宽平稳，特性
Bandpass waveform 带通波形
  all 全部
  complex envelope representation of …的复包络表示
  normalized power of …的归一化功率
  physical 物理
Bands 频带
  frequency 频率
  high-frequency 高频
  medium-frequency 中频
Bandwidth 带宽
  absolute 绝对
  bounded 有界限的
  bounded spectrum 带限频谱
  channel 信道
  definition of …的定义
  equivalent 等效
  equivalent noise 等效噪声
  ergodic random processes and 各态历经随机过程
  estimation of …的估计
  expansion 扩展
  Federal Communications Commission, parameter 联邦通信委员会，参数
  requirements for …的要求
  measures of …的测量
  null-to-null 零点至零点
  occupied 占用
  of PCM signals PCM 信号的
  power 功率

C

standards for …的标准
Capacity of channel 信道容量
Capture range 捕获范围
Cardinal series Cardinal 级数
Carrier 载波
common 公共
delay 延时
double-sideband suppressed 抑制载波双边带
frequency 频率
power, wasted 功率，浪费
single channel per 每单信道
single-sideband amplitude modulation 单边带幅度调制
suppressed 抑制的
sync 同步
time delay 时延
Carrier-to-noise ratio (CNR) 载噪比
Carrierless amplitude-phase (CAP) 无载波幅相
Carson's rule 卡森定律
Cartesian transform 笛卡儿转换
Cascaded linear devices 级联线性器件
C-band satellites C 波段卫星
CBS 哥伦比亚广播公司
Cellular radio 蜂窝无线电
Cellular telephone systems 蜂窝电话系统
Advanced Mobile Phone System circuit switched system 高级移动电话电路交换系统
analog black-and-white television 模拟黑白电视
analog color television 模拟彩色电视
cable television, standards for 有线电视标准
digital circuit-switched systems 数字电路交换系统
digital TV 数字电视
digital with circuit and packet switching 数字电路及分组交换系统
digital with packet switching 数字分组交换系统
first generation 第一代
fourth generation 第四代
multichannel television sound stereo sound 多通道电视立体声
second generation 第二代
television, standards for 电视，标准
third generation 第三代
Center of gravity 概率分布中心
Central limit theorem 中心极限定理
Central office (CO) 中心局
Ceramic filter 陶瓷滤波器
Channel 信道
in band on 带内
bandwidth 带宽
capacity, calculating 容量，计算
clear 清晰的
codes 编字
common signaling 公共信令
communication systems, subsystem of 通信系统，…的子系统
distortionless 不失真
interference with 干扰
noise 噪声
professional 专业的
T-band T 波段
virtual 虚拟
wire 有线
wireless 无线
Charge transfer device (CTD) 电荷转移器件
Chebyshev filter 切比雪夫滤波器
Chip interval 码片间隔
Chrominance signal 色度信号
Circuit 电路
analog 模拟
baseband 基带
dedicated leased 专门租用
detector 检测器
digital signal processing 数字信号处理
four-wire 四线
high-impedance 高阻
hybrid 混合的
ideal envelope 理想包络
low-impedance 低阻
modulation 调制
processing 处理
receiver 接收机
resistive 电阻的
RLC 电阻、电感、电容
switch 开关
transistor 晶体管
transistor-transistor logic 晶体管-晶体管逻辑
tube 电子管
two-wire 双线
very-high-speed integrated 甚高速集成
Circuit switched transmission system 电路交换传输系统
Clean pulse amplitude modulation 干净脉冲幅度调制
Clear channel 清晰频道
Clearwire Clearwire 公司
Clock 时钟
Code-division multiple-access (CDMA) 码分多址
Codebook excited linear prediction (CELP) 码本激励线性预测
Coded orthogonal frequency-division multiplexing (COFDM) 码分正交频分复用
bidirectional frame 双向帧
binary 二进制
block 分组
Bose-Chaudhuri-Hocquenhem BCH

of triangular pulse 三角脉冲的
of waveform 波形的
Coordinate transformation 坐标变换
Correlation 相关
coefficients 系数
functions 函数
processing 处理
Cosmic noise 宇宙噪声
Costas loop Costas 环
Costas phase-locked loop Costas 锁相环
Counting encoding 计数编码
Coupling loss 耦合损耗
Covariance 协方差
Cross-correlation function 互相关函数
output 输出
properties 特性
Cross-modulation 交叉调制
Crosstalk 串话
Crystal filter 晶体滤波器
Cummulative distribution functions (CDF) 累积分布函数
distributions 分布
multivariate 多变量
N-dimensional *N* 维
properties of …的特性
Cyclic code 循环码

D

Damped sinusoid 衰减正弦
Data 数据
binary 二进制
combine 组合
concentrate 集中
decoded 译码的
multiple access 多址
multiplex 复用
network 网络
sequences 序列
two-level 二电平
Data signals distortion 数据信号失真
David Sarnoff Research Center David Sarnoff 研究中心
Decibel 分贝
Decoded data 译码数据
Decoding algorithm 译码算法
Decompression 解压缩
Dedicated leased circuit 专用租借电路
Deemphasis 去加重
in angle-modulated systems 在角度调制系统中
filter 滤波器
frequency modulation systems with 频率调制系统
Definite integrals 定积分
Definition frequency 限定频率
Delay 时延
carrier 载波
carrier time 载波时间
envelope 包络
group 群
group time 群时间
phase 相位
spread 扩展
time 时间
Delta-coded encoding 增量编码
Delta function 冲激函数
Dirac 狄拉克
evensided 双边的
Kronecker Kronecker
left-sided 左边的
Delta modulation (DM) 增量调制
adaptive 自适应
continuous variable slope 连续可变斜率
continuously variable slope 连续可变斜率
design of …的设计
granular noise 颗粒状噪声
slope overload noise 过载噪声斜率
speech coding 语音编码
voice frequency 音频频率
Demand-assigned multiple-access(DAMA) 按需分配多址
Dense wavelength division multiplexing(DWDM) 密集波分复用
Density 密度
energy spectral 能量谱
power spectral 功率谱
Derivative, constant phase 偏移, 相位常数
Derivative table 导数表
Designing communication systems 通信系统设计
Detector circuits 检测电路
envelope detector 包络检波器
frequency modulation detector 调频检测器
product detector 乘法检测器
Detector/detection 检测器/检测
coherent 相干的
differential 差分的
envelope 包络
error 误差
frequency modulation 调频
noncoherent 非相干的
phase 相位
product 积
quadrature 正交
single-sideband envelope 单边带包络
single-sideband square-law 单边带平方律
slope 斜率
zero-crossing 过零点

- filter, caused by　滤波器，由…引起
- harmonic　谐波
- intermodulation　互调
- phase　相位
- total harmonic　总谐波
- video　视频

Distortionless channel　不失真信道

Distortionless transmission　不失真传输

Distributions　分布
- binomial distributions　二项式分布
- continuous　连续的
- discrete　离散的
- Gaussian　高斯的
- Gaussian distributions　高斯分布
- normal　正态的
- point　点
- Poisson distributions　泊松分布
- sinusoidal　正弦的
- sinusoidal distributions　正弦分布
- theory of　…的理论
- uniform　均匀的
- uniform distributions　均匀分布

Doppler spread　多普勒频移

Double balanced mixer　双平衡混合器

Double-sideband suppressed carrier (DSB-SC)　抑制载波双边带

Doubler stage　双极

Down converters　下变频器

E

Early-late bit synchronizer　超前-滞后位同步器

Early sample　超前样本

Earth blackbody radiation　地球黑体辐射

Earth-to-satellite transmission　地球站到卫星传输

Echo canceller　回波抵消器

Effect　效应
- aliasing　混叠
- leakage　泄露
- picket-fence　桩栅
- quieting　静态
- threshold　门限

Effective isotropic radiated power (EIRP)　有效全向辐射功率

Effective radiated power (ERP)　有效辐射功率

Efficiency　效率

Electric energy systems　电能系统

Electromagnetic waves　电磁波

Electronic service number (ESN)　电子业务序号

Electronic switching system (ESS)　电子交换系统

Elliptical orbit　椭圆轨道

Encoding　编码
- counting　计数
- delta-coded　增量编码
- direct conversion　直接转换
- flash　闪烁
- pipeline　管线
- ramp　斜坡
- serial　串行
- sigma-delta　求和-增量
- split-phase　分相
- successive approximation　连续逼近

Energy　能量
- finite　有限
- signal　信号
- spectral density　频谱密度
- storage　存储
- waveform　波形

E_b/N_0 link budget for digital systems　数字系统的 E_b/N_0 链路预算

Ensemble　集合

Ensemble average　集合平均

Entropy　熵

Envelope　包络
- amplitude modulation systems　调幅系统
- approximate　逼近
- complex　复数
- delay　延迟
- detection　检测
- of Gaussian bandpass process　高斯带通过程的
- probability density function for　…的概率密度函数

Equality　相等

Equalization filter　均衡滤波器

Equivalent bandwidth　等效带宽

Equivalent low-pass filter　等效低通滤波器

Equivalent noise bandwidth　等效噪声带宽

Erasable programmable read-only memory (EPROM)　擦除后可再编程的只读存储器

Ergodic random process　各态历经随机过程
- digital signal for　的数字信号
- root-mean-square for　…的均方根值

Ergodicity　各态历经性

Error　误差
- binary signaling, probability for　二进制信令，概率
- bit　比特
- detection　检测
- function　函数
- phase　相位
- symbol　符号
- in time delay　时延
- timing　定时

Euler's theorem　欧拉定理

Evaluation　评价
- of entropy　熵的
- of information source　信息源的
- of power　功率的

Frequency 频率
  allocation of …的配置
  bands 频带
  carrier 载波
  definition 定义
  deviation 偏离
  instantaneous 瞬时的
  intermediate 中间的
  mean-squared 均方的
  Nyquist 奈奎斯特
  positive 正的
  radio 无线电
  sampling 抽样
  single-carrier 单载波
  specialized mobile radio 特别移动无线电
  synchronized 同步的
  synthesizers 同步器
  3 dB 3 分贝
  tuned radio 无线调谐
Frequency-division multiple access (FDMA) 频分多址
Frequency-division multiplexing (FDM) 频分复用
Frequency-hopped (FH) 跳频
Frequency modulation (FM) 调频
  angle-modulated systems 角度调制系统
  with deemphasis 去加重
  detector 检测器
  digital 数字的
  index 指数
  multiplier 倍频器
  narrowband angle modulation 窄带角度调制
  noise performance for 噪声性能
  preemphasized 预加重的
  receiver with feedback 带反馈的接收机
  representation of …的表示
  resolution 分辨率
  response 响应
  selectivity 选择性
  single-sideband 单边带
  with sinusoidal modulation 正弦波调制
  technical standards 技术标准
  with threshold extension 门限扩展
  wireband frequency modulation 宽带调频
Frequency-shift keying (FSK) 频移键控
  binary 二进制
  bit error rate for 误比特率
  with coherent detection 相干检测
  continuous 连续的
  discontinuous 不连续的
  noncoherent detection 相干检测
  power spectral density for 功率谱密度
Front-end processors 前端处理器
Full-duplex capability 全双工能力
Function 函数
  analytic 解析
  autocorrelation 自相关
  cross-correlation 互相关
  cumulative distribution 累积分布
  delta 冲激
  deterministic 确定的
  error 误差
  generalized 一般的
  help 帮助
  nonlinear 非线性的
  orthogonal complex exponential 正交复指数
  orthonormal 标准的
  power transfer 功率变换
  probability density 概率密度
  of random process 随机过程的
  sample 样本
  singular 奇特的
  time 时间
  transfer 变换
  unit impulse 单位脉冲
  unit step 单位阶跃

G

Gain 增益
  coding 编码
  decibel 分贝
  power 功率
  processing 处理
Galaxy satellites 银河系卫星
Gating, natural 门，自然
Gaussian 高斯的
  bandpass process 带通过程
  bivariate distribution 双变量分布
  distributions 分布
  noise 噪声
  probability density function 概率密度函数
  process 过程
  random process 随机过程
  random variables 随机变量
Gaussian-filtered minimum-shift keying (GMSK) 高斯滤波最小频移键控
G. DMT G. DMT 标准
General Instrument Corporation 通用仪器公司
General Motors (GM) 通用汽车公司
General technique 通用技术
Generalized function 通用函数
Generalized receivers 通用接收机
Generators, arbitrary waveform 发生器，任意波形
Geostationary orbit (GEO) 同步轨道
Geostationary satellites 同步卫星
G. Lite G. Lite 标准

Integrated service digital network (ISDN) 综合业务数字网
 basic rate 基本速率
 broadband 宽带
 narrowband 窄带
 primary rate 初始速率
Intel Intel 公司
Intelligent time-division multiplexing 智能时分复用
Intelsat series satellites 国际电信卫星组织系列卫星
Intensity video signal 视频信号强度
Intercarrier signal 载波间信号
Intercept point 交叉点
Interchange, time-slot 交换，时隙
Interference 干扰
 causes of …的原因
 with channel 信道
 intersymbol 码间
 with receiver 接收机
 in receivers 在接收机中
Interframe (I-frame) coding 帧间编码
Interlacing technique 交织技术
Interleaving 交织
Intermediate frequency (IF) 中频
Intermodulation distortion (IMD) 互调失真
International Radio Consultative Committee (CCIR) 国际无线电咨询委员会
International Telecommunications Union (ITU) 国际电信联盟
International Telecommunications Union Telecommunication Development Sector (ITU-D) 国际电信联盟发展部
International Telegraph and Telephone Consultative Committee (CCITT) 国际电报与电话咨询委员会
Internet protocol (IP) 互联网协议
Internet service provider (ISP) 互联网业务提供商
Intersection 交集
Intersymbol interference (ISI) 码间串扰
 Nyquist's control of …的奈奎斯特控制
 raised cosine-rolloff Nyquist filtering 升余弦滚降奈奎斯特滤波
 RC low-pass filtering, caused by RC 低通滤波，由…引起
Interval 间隔
 bit 比特
 chip 码片
 observation 观察
Inverse discrete Fourier transform (IDFT) 离散傅里叶反变换
Inverse Fourier transform 傅里叶反变换
Inversion, alternate mark 反转，传号交替
Ionization 电离
Ionosphere 电离层
Ionospheric scatter propagation 电离层散射传播
IPhone telephone IPhone 电话

J

Jacobian 雅可比
Joint events 联合事件
Joint mean 联合平均
Joint probability 联合概率
Jointly wide-sense stationarity 联合宽平稳性

K

Keying 键控
 amplitude shift 幅移
 binary phase-shift 二进制相移
 frequency-shift 频移
 M-ary phase-shift *M* 元相移
 minimum-shift 最小频移
 on-off 开关
 phase-reversal 相位反转
 phase-shift 相移
 quadrature phase-shift 正交相移
Known signal waveshape 已知信号波形
Known waveshape 已知波形
Kronecker delta function Kronecker 冲激函数
Ku band satellites Ku 波段卫星

L

Laboratory radio-frequency waves 实验室无线电电波
Late sample 滞后采样
Lead 导线
Leakage effect 泄漏效应
Learning preambles 学习序文
Learning sequences 学习序列
Left-sided delta function 左边冲激函数
L'Hospital's rule L'Hospital 罗必塔法则
Light-emitting diodes (LED) 发光二极管
Limiter 限幅器
Line 传输线
 digital subscriber 数字用户
 transmission 传输
Line code 线路编码
 binary line coding 二进制线路编码
 bipolar 双极性
 bit synchronization 位同步
 differential coding 差分编码
 eye patterns 眼图
 multi-level polar NRZ signals, power, spectra for 多电平极性非归零信号，功率…的频谱
 nonreturn-to-zero 非归零
 regenerative repeaters 再生中继器
 return-to-zero 归零
 spectral efficiency 频谱效率
Line of sight (LOS) 视距

① 应为 u-law。——译者注

polar 极性的
RC low-pass filtering with RC 低通滤波
unipolar 单极的
Nonuniform quantizing 非均匀量化
Nonuniformly spaced sample 非均匀间隔抽样
Nonwireline service 无线业务
Normal distributions 正态分布
Normalized average power 归一化平均功率
Normalized covariance 归一化协方差
Normalized-data autocorrelation function 归一化数据自相关函数
Normalized peak envelope power 归一化峰值包络功率
Normalized power 归一化功率
North D. O. D. O 诺斯
North American digital cellular (NADC) system 北美数字蜂窝系统
Notation phasor 符号相量
Null events 空事件
Null-to-null bandwidth 零点到零点带宽
Numeric assignment module (NAM) 号码分配模式
Nyquist 奈奎斯特
control of intersymbol interference 码间串扰控制
filter 滤波器
first method 第一准则
frequency 频率
raised cosine-rolloff filter 升余弦滚降滤波器
rate 速率

O

Observation interval 观察间隔
Observation length 观察长度
Occupied bandwidth 占用带宽
Offset quadrature phase-shift keying(OQPSK) 偏移四相相移键控
On-off keying (OOK) 开关键控
bit error rate for 误比特率
with noncoherent detection 非相干检测
offset 偏移
unbalanced 非平衡
One-sided spectrum 单边谱
OnStar OnStar 公司
Orbit 轨道
Orthogonal complex exponential function 正交复指数函数
Orthogonal frequency-division multiplexing (OFDM) 正交频分复用
functions 函数
generalization of …的一般化
power spectral density for 功率谱密度
process 过程
random variables 随机变量
signals and noise 信号和噪声
value 值
Orthonormal function 正交函数
Oscillator 振荡器
Output 输出
autocorrelation 自相关
of bandpass filter 带通滤波器的
cross-correlation 互相关
signal phase of 信号…的相位
Output-to-input transfer 输出输入转移
Overlay spread spectrum 交叠频谱扩展
Overload noise 过载噪声

P

Packets 分组
data transmission 数据传输
switched service 交换业务
switched transmission system 交换传输系统
time modulation 时间调制
transmission system 传输系统
Palm telephone 手掌电话
Parallel method 并行方法
Parity bit 奇偶位
Parseval's Theorem 帕塞瓦尔定理
Party 方
Paths, multiple 路径,多重
Patterns, eye 图,眼
Peak envelope power (PEP) 峰值包络功率
Peak frequency deviation 峰值频率偏移
Peak phase deviation 峰值相位偏移
Peak power 峰值功率
Peak signal 峰值信号
Performance 性能
Periodic rectangular waves 周期矩形波形
Periodic waveforms 周期波形
Periodogram 周期图
Personal communication service (PCS) 个人通信业务
Personal computer as a tool 以个人计算机为工具
Phase 相位
carrierless amplitude 无载波幅度
clock 时钟
delay 时延
detector 检测器
deviation 偏移
distortion 失真
error 误差
function 函数
of input signal 输入信号的
method 方法
of output signal 输出信号的
random start-up 随机起始
synchronized 同步的
unwrapping 解缠

Probability 概率
  conditional probability 条件概率
  evaluation of …的评估
  joint probability 联合概率
  simple probability 简单概率
Probability density function (PDF) 概率密度函数
  binomial 二项式
  conditional 条件的
  for diodes 二极管
  distributions 分布
  Gaussian 高斯的
  marginal 边缘
  multivariate 多变量
  N-dimensional *N* 维
  properties of …的特性
  Rayleigh 瑞利
  Rician 莱斯
  for sinusoid 对正弦波
  uniform 均匀的
Probability of bit error (Pe) 误比特率
Proceedings of the IEEE IEEE 会刊
Process/processing 过程/处理
  process 过程
  bandpass 带通
  circuit 电路
  digital signaling 数字信令
  ergodic 各态历经的
  front-end 前端
  gain 增益
  Gaussian 高斯的
  in-phase and quadrature-phase 同相和正交
  of linear system 线性系统的
  orthogonal 正交的
  stochastic 随机的
  uncorrelated 不相关的
  white Gaussian-noise 白高斯噪声
  white-noise 白噪声
  wide-sense stationary 宽平稳
Product time-bandwidth 乘积时间-带宽
Product detection 乘积检测
Professional channel 专业信道
Programmable read-only memory (PROM) 可编程序的只读存储器
Propagation 传播
  of electromagnetic waves 电磁波的
  ground-wave 地波
  ionospheric scatter 全向散射
  line-of-sight 视距
  sky-wave 天波
  through ionosphere 通过电离层
Pseudonoise (PN) code 伪噪声码
Pseudoternary 伪三进制
Public switched telephe network (PSTN) 公共电话交换网
Pull-in range 捕捉带
Pulse 脉冲
  exponential, spectrum of 指数，频谱
  horizontal 水平的
  narrow 窄的
  rectangular 矩形的
  sync 同步
  synchronization 同步
  triangular 三角形的
  wide 宽的
Pulse amplitude modulation (PAM) 脉冲幅度调制
  clean 干净的
  flat-top spectrum for 平顶频谱
  instantaneous sampled 瞬时抽样的
  instantaneous sampling 瞬时抽样
  natural sampling 自然抽样
  quantized 量化的
Pulse code modulation (PCM) 脉冲编码调制
  adaptive 自适应
  bandwidth of …的带宽
  differential 差分的
  encoding 编码
  linear 线性的
  noise effects of 噪声…的效应
  nonuniform 非均匀的
  output signal-to-noise ratio for 输出信噪比
  practical 实际的
  quantizing 量化
  recovered analog signal at output of 输出端恢复的模拟信号
  sampling 抽样
  for telephone systems 对电话系统
Pulse duration modulation (PDM) 脉冲持续时间调制
Pulse position modulation(PPM) 脉冲位置调制
Pulse time modulation (PTM) 脉冲时间调制
Pulse width modulation (PWM) 脉冲宽度调制

Q

Q function Q 函数
Quadrature amplitude modulation (QAM) 正交幅度调制
Quadrature components 正交分量
Quadrature detector 正交检测器
Quadrature Fourier series 正交傅里叶级数
Quadrature modulation (QM) 正交调制
Quadrature phase-shift keying (QPSK) 四相相移键控
  offset 偏移
  $\pi/4$ $\pi/4$
Quadrature transform 正交变换
Qualcomm 高通公司

Recovered analog signal 恢复的模拟信号
Rectangular pulse 矩形脉冲
  with an exponential 按指数的
  convolution of …的卷积
  sampling theorem for 抽样定理
  spectrum 频谱
Rectangular pulses 矩形脉冲
Rectification, linear 整流，线性
Redundancy time of code 码字的冗余时间
Reed-Solomon code R-S 码
Reed-Müller code Reed-Müller 码
Refraction index 折射指数
Regenerative repeaters 再生中继器
Relative frequency 相对频率
  conditional probability 条件概率
  joint probability 联合概率
  simple probability 简单概率
Relative value 相对值
Remote terminals telephone systems 远程终端电话系统
Repeater, regenerative 中继器，再生
Reservations 限制
Resistance, radiation 电阻，辐射
Resistive circuit 阻性电路
Resistive load 阻性负载
Resolution 分辨率
Response 响应
  amplitude 幅度
  Butterworth 巴特沃思
  Chebyshev 切比雪夫
  frequency 频率
  image 影像
  impulse 脉冲
  magnitude 强度
Return-to-zero line code 归零线路码
Return-to-zero (RZ) 归零
Rice S. O. S. O 赖斯
Rician probability density function 赖斯概率密度函数
Ring lead 导线环
RLC circuit RLC 电路
Roam mode 漫游模式
Rolloff factor 滚降因子
Root-mean-square bandwidth 均方根带宽
Root-mean-square (RMS) 均方根
  for bipolar line code 对双极性线路码
  for ergodic random processes 对各态历经过程
  waveforms 波形
Roots, real 根，实
Rotating phasor 旋转相量
Rule 法则、定律
  Carson's 卡森
  L'Hospital's 罗必塔
  6 dB 6 分贝

S

Sampling/sample 抽样/样值
  early 早
  frequency 频率
  function 函数
  instantaneous 瞬时的
  late 迟
  natural 自然的
  nonuniformly spaced 非均匀间隔
  for rectangular pulse 对矩形脉冲
  theorem 定理
  uniformly spaced 均匀间隔
Satellite communication systems 卫星通信系统
  analog television transmission 模拟电视传输
  data multiple access 数据多路接入
  digital television transmission 数字电视传输
  satellite radio broadcasting 卫星无线广播
  telephone signal multiple access 电话信号多路接入
Satellite digital audio radio service (SDARS) 数字卫星音频无线业务
Satellite radio broadcasting 卫星无线广播
Satellite signal 卫星信号
  link budget evaluation for 链路预算评估
  television receive-only terminal for 只接收电视终端
Satellite-to-Earth transmission 卫星到地球站传输
Satellites 卫星
  C-band C 波段
  communication 通信
  direct-broadcast 直接广播
  Galaxy 银河系
  geostationary 静止的
  high-power 高功率
  Intelsat series 国际电信卫星组织系列
  Ku band Ku 波段
  low-power 低功率
  medium-power 中功率
Saturation 饱和
Scanning, raster 扫描，光栅
Scattering, tropospheric 散射，对流层的
Schwarz's inequality 许瓦兹不等式
SDTV 标准清晰度电视
Second audio program (SAP) 第二音频节目
Second generation (2G) 第二代
Selectivity, frequency 选择性，频率
Self-synchronization 自同步
Sequences 序列
  data 数据
  direct 直接的

Signal-to-noise ratio (SNR) 信噪比
Signal waveshape, known 信号形状，已知
Simple events 简单事件
Simple probability 简单概率
Single-asymmetric sideband signals 不对称单边带信号
Single-balanced mixer 单平衡混频器
Single-carrier frequency 单载波频率
Single-channel per carrier (SCPC) 单路单载波
Single-quadrant multiplier 单象限乘法器
Single-sideband amplitude modulation suppressed carrier (SSB-AM-SC) 抑制载波的单边带幅度调制
Single-sideband envelope (SSB-EV) 单边带包络
  detectable 可检测的
Single-sideband frequency modulation (SSBFM) 单边带调频
Single-sideband phase modulation(SSB-PM) 单边带调相
Single-sideband square-law (SSB-SQ)
  detectable 单边带平方律
Single-sideband (SSB) 单边带
Single-sided band mixer 单边带混频器
Singular function 奇特函数
Sinusoid 正弦的
  characteristic 特性
  damped, spectrum of 减弱，…的频谱
  distributions 分布
  fast Fourier transform 快速傅里叶变换
  modulation 调制
  power spectral density of …的功率谱密度
  probability density function for 概率密度函数
  spectrum of …的频谱
  switched, spectrum of 交换，…的频谱
  waveform 波形
  waveshape 形状
Sirius XM Sirius XM 公司
6 dB bandwidth 6 分贝带宽
6 dB rule 6 分贝准则
Sky noise temperature 天空噪声温度
Sky-wave propagation 天波传播
Sky waves 天波
Slant range 倾斜范围
Slicing level 限幅电平
Slope detector 斜率检测器
Slope overload noise 斜率过载噪声
Slotted ALOHA technique 时隙 ALOHA 技术
Small aperture terminals (VSAT) 甚小口径终端
Smart card 智慧卡
Snell's law Snell(斯奈尔)定理
Soft-decision algorithm 软判决算法
Software radios 软件无线电
Source 源
  codes 码字
  noise 噪声
  rate 速率
  signal 信号
  statistic 统计
Space-division multiple access(SDMA) 空分多址
SPADE system SPADE 系统
Specialized mobile radio (SMR) frequency SMR(特别移动无线)频率
Spectral efficiency 频谱效率
  maximum 最大
  with raised cosine filtering 升余弦滤波
Spectral folding 频谱折叠
Spectral shape 频谱形状
Spectrum 频谱
  of angle-modulated signals 角度调制信号的
  of Bell-type 103 modem Bell 型 103 调制解调器的
  binary line coding 二进制线路编码
  bit synchronization 位同步
  convolution 卷积
  definition of …的定义
  differential coding 差分编码
  Dirac delta function 狄拉克冲激函数
  energy spectral density 能量谱密度
  eye patterns 眼图
  for fast Fourier transform, calculating 对快速傅里叶变换，计算
  flat-top sampled pulse amplitude modulation 平顶抽样脉冲幅度调制
  multi-level polar NRZ signals, power spectra for 多电平极性非归零信号，功率频谱
  one-sided 单边
  Parseval's Theorem 帕塞瓦尔定理
  rectangular pulse 矩形脉冲
  of rectangular pulse 矩形脉冲的
  regenerative repeaters 再生中继器
  of sinusoid 正弦的
  spectral efficiency 频谱效率
  square wave 方波
  of triangular pulse 三角脉冲的
  triangular pulses 三角脉冲
  two-sided 双边的
  unit step function 单位阶跃函数
Speech coding 语音编码
Split-phase encoding 分相编码
Splitter, installation of 分离器，安装
Spot-effective input-noise temperature 点有效输入噪声温度
Spot noise figure 点噪声系数
Spread-spectrum multiple access(SSMA) 扩频多址
Spread spectrum (SS) 扩频
  direct sequence 直接序列

interlacing 隔行
signaling 信令
time-division multiple access 时分多址
Telecommunications 电信
Telegraph systems 电报系统
Telephone 电话
Blackberry 黑莓
extension 电话分机
historical basis 历史背景
iPhone iPhone
modern 调制解调器
Palm 手掌
remote terminals 远程终端
two-wire 双线
Telephone company (TELCO) 电话公司
Telephone signal multiple access 电话信号多址
Television (TV) 电视
cable 电缆
digital 数字的
high-definition 高清晰度
receive-only terminal 只接收终端
standards for …的标准
Telstar I satellite I 系列通信卫星
Temperature 温度
additional 附加
input-noise 输入噪声
noise 噪声
Terminals 终端
remote 远程的
small aperture 小口径
very small aperture 甚小口径
Test statistic 试验统计
Theorem 定理
bandpass dimensionality 带通维数
bandpass sampling 带通采样
Bayes 贝叶斯
central limit 中心极限
dimensionality 维数
of distributions 分布的
Euler's 欧拉的
sampling 抽样
Wiener-Khintchine 维纳-辛钦
Thermal noise, sources of 热噪声,…的源
Third generation (3G) 第三代
Thomson Consumer Electronics 汤姆森消费电子
3 dB bandwidth 3 分贝带宽
3 dB frequency 3 分贝频率
Threshold effect 门限效应
Threshold extension 门限扩展
TI carrier system TI 载波系统
Time average operator 时间平均运算
Time axis of digital signal 数字信号的时间轴
Time-bandwidth (TW) product 时间带宽乘积
Time constant 时间常数
Time delay 时延
Time-division multiple access (TDMA) 时分多址
Time-division multiplexing (TDM) 时分复用
asynchronous lines 异步线
design of …的设计
frame synchronization 帧同步
hierarchy 等级
intelligent 智能的
synchronous lines 同步线
T1 PCM system T1 PCM 系统
Time function 时间函数
Time-invariant linear system 线性时不变系统
Time limited waveform 时限波形
Time resolution 时间分辨率
Time-slot interchange (TSI) 时隙交换
Time Warner Cable Time Warner Cable 公司
Timing 定时
Timing error 定时误差
Tip lead 导线顶端
T1 PCM system T1 PCM 系统
Total harmonic distortion (THD) 总谐波失真
Tracking antennas 跟踪天线
Training preambles 训练预告
Training sequences 训练序列
Transfer function 转移函数
of filter 滤波器的
in linear systems 在线性系统中
output-to-input 输出输入
Transform 变换
Cartesian 笛卡儿
coordinate 整合
discrete cosine 离散正弦
Hilbert 希尔伯特
linear 线性的
magnitude-phase 幅相
polar 极性的
quadrature 正交的
Transistor circuit 晶体管电路
Transistor-transistor logic (TTL) 晶体管-晶体管逻辑
Transmission 传输
bandpass 带通
bandwidth 带宽
communication systems subsystem of 通信系统…的子系统
Earth-to-satellite 地球站到卫星
generalized 一般化的
of information source 信息源的
line 线路
line filter 线路滤波器

packet data 分组数据
point-to-multipoint 点对多点
satellite-to-Earth 卫星到地球站
time-division multiplex 时分复用
Transmitting antennas 发射天线
Transparency 透明
Transponders 转发器
Transversal filter 横向滤波器
Transversal matched filter 横向匹配滤波器
Traveling-wave tubes (TWT) 行波管
Trellis-coded modulation (TCM) 格码调制
Triangular modulation 三角波调制
Triangular pulse 三角脉冲
convolution of 卷积
spectrum of 频谱
Trigonometry 三角学
Tripler stage 三级
Tropospheric scattering 对流层散射
Tube circuit 真空管电路
Tuned radio-frequency (TRF) 调谐射频
Turbo code Turbo 码
Two-level data 两电平数据
Two-quadrant multiplier 两象限乘法器
Two random variables sum of 两个随机变量…的和
Two-sided spectrum 双边谱
Two-wire circuit 双导线电路
Two-wire telephone system 双导线电话系统
Type II minimum-shift signaling II 型最小移频信令

U

Unbalanced mixer 非平衡混频器
Unbalanced on-off keying 非平衡开关键控
Unbiased power spectral density 公平功率谱密度
Uncorrelated process 非相关过程
Uncorrelated random process 非相关随机过程
Undesired signal 非期望信号
Uniform distributions 均匀分布
Uniform probability density function 均匀概率密度函数
Uniformly distributed random variables 均匀分布随机变量
Uniformly spaced sample 均匀间隔抽样
Uniform quantizing 均匀量化
Union 联盟
Unipolar nonreturn-to-zero signaling 单极性非归零信令
Unipolar return-to-zero 单极性归零
Unipolar signaling 单极性信令
Unit impulse function 单位冲激函数
Unit step function 单位阶跃函数
Universal asynchronous receiver/transmitter(UART) 通用异步接收机/发射机
Universal set 全集
Universal synchronous/asynchronous receiver/transmitter (USART) 通用同步/异步接收机/发射机
Universal synchronous receiver/transmitter(USRT) 通用同步接收机/发射机
Unsampled signal 未采样信号
Unsampled waveform 未采样波形
Unwrapping phase 相位展开
Up converters 上变频器
Upper single sideband (USSB) 上单边带
Urban wireless environments, path loss for 城区无线传播环境,路径损耗

V

Value 值
absolute 绝对的
expected 期望的
integer 整数
noninteger 非整数
orthogonal 正交的
relative 相对的
root-mean-square 均方根
Voice frequency (VF) delta modulation 音频增量调制
Vector representation 矢量表示
Vector-sum excited linear prediction (VSELP) 矢量和激励线性预测
Vectors, real 矢量,实
Vectorscope 矢量显示器
Venn diagram 维恩图
Verizon Verizon 公司
Vertical-line resolution 垂直分辨率
Vertical sync 垂直同步
Very-high-bit-rate digital subscriber line(VDSL) 甚高速率数字用户线
Very-high-speed integrated (VHSIC) circuit 甚高速率集成电路
Vestigial asymmetric sideband signals 残留非对称边带信号
Vestigial sideband (VSB) 残留边带
Video distortion in linear systems 线性系统中的视频失真
Video on demand (VOD) 视频点播
Video signal 视频信号
Virtual channel 虚拟信道
Virtual private network (VPN) 虚拟专网
Viterbi decoding 维特比译码
Vocoders 语音编码器
Voice-frequency (VF) telephone signal 音频电话信号
Voice over Internet (VoIP) protocol IP 电话
Voltage-controlled clock (VCC) 压控时钟
Voltage-controlled oscillator (VCO) 压控振荡器

W

Wasted carrier power 浪费的载波功率
Waveform 波形
  analog 模拟
  autocorrelation of 自相关
  bandlimited 带限
  bandpass 带通
  baseband 基带
  coders 编码器
  convolution of 卷积
  deterministic 确定的
  digital 数字的
  direct current 直流
  direct current value of 直流值
  energy 能量
  monitor 显示屏
  periodic 周期的
  physical 物理的
  physically realizable 物理可实现的
  power 功率
  power spectral density of …的功率谱密度
  properties of …的特性
  random 随机的
  root-mean-square value of …的均方根值
  sinusoidal 正弦的
  stochastic 随机的
  time average operator of …的时间平均运算
  time limited 时限的
  transistor-transistor logic 晶体管-晶体管逻辑
  unsampled 未抽样的
  windowed 加窗的
Waves 波
  ground 地面
  periodic rectangular, Fourier coefficients for 周期矩形，傅里叶系数
  radio-frequency 射频
  sky 天空
  square 方波
Waveshape 形状
  filtered 滤波的
  input-signal 输入信号
  known 已知的
  signal 信号
  sinusoidal 正弦的
WaveStar fiber optic system WaveStar 光纤系统
Weaver's method Weaver 方法
White bandpass noise 带通白噪声
White Gaussian noise 白高斯噪声
White noise 白噪声
  process 过程
  results for …的结果
Wide pulse 宽脉冲
Wide-sense stationarity (WSS) 宽平稳
  bandpass 带通
  bandpass process properties of 带通过程…的特性
  definition of …的定义
  Gaussian process 高斯过程
  jointly 联合地
  low-pass 低通
  random process 随机过程
Wideband frequency modulation (WBFM) 宽带调频
Wiener, N., N. 维纳
Wiener-Khintchine theorem 维纳-辛钦定理
WiFi WiFi
Wikipedia 维基百科
WiMAX WiMAX
Windowed waveform 加窗波形
Wire channel 有线信道
Wideband frequency modulation 宽带调频
Wireless channel 无线信道
Wireless data networks 无线数据网络
  WiFi WiFi
  WiMAX WiMAX
Wireless local area network (WLAN) 无线局域网
Wireless metropolitan area network (WMAN) 无线城域网
Wireline service 无线业务

Y

Y-factor method *Y* 因子法

Z

Zenith Electronics Corporation Zenith 电子公司
Zero-crossing bandwidth 过零点带宽
Zero-crossing detector 过零点检测器
Zero-IF receivers 零中频接收机
Zero-padding 补零